现代数学基础丛书 180

集合论导引

（第三卷：高阶无穷）

冯　琦　著



现代数学基础丛书 180

集合论导引

(第三卷：高阶无穷)

冯　琦　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本卷是在前两卷的基础上对集合论保证无穷集合存在的无穷公理的层次分析. 这种分析既包含组合分析, 也包含逻辑分析; 既包含内模型分析, 也包含外模型分析; 归根结底是揭示各种高阶无穷公理对整个集合论论域的影响, 尤其是对实数集合的影响. 因此, 第三卷的第 1 章侧重于大基数的组合分析、逻辑分析以及内模型构造; 第 2 章侧重于在大基数上构造各种各样的具有典范意义的力迫扩张, 从而解决包括奇异基数假设在内的一些长期遗留问题的独立性问题; 第 3 章侧重于分析高阶无穷对实数子集合正则性的影响.

本卷的内容即可作为数理逻辑研究生高等教程的内容, 也可作为研究人员的参考材料.

图书在版编目(CIP)数据

集合论导引. 第三卷, 高阶无穷/冯琦著. —北京: 科学出版社, 2019.12
(现代数学基础丛书; 180)

ISBN 978-7-03-063623-2

Ⅰ. ①集… Ⅱ. ①冯… Ⅲ.①集论 Ⅳ. ①O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 271777 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 12 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2019 年 12 月第一次印刷 印张: 32 3/4
字数: 645 000

定价: 198.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序　言

宇宙世界浩瀚、丰富、五彩缤纷, 很久以前, 人类就以极大的热情去探索这个包括我们自身在内的客观的宇宙, 以及以不懈的努力去应用已有的探索结果到实践之中来解决包括生存问题在内的一切实际问题, 并将这种探索的结果和求解问题的真实体会尽可能清楚地记录下来. 也正是在这种探索、应用、体会、交流、思考和记录过程中, 人类不断开拓视野, 深化认识, 丰富知识和提升智慧. 在这个人类思想宝库的建设过程中, 曾经有过两个困惑人类智者的哲学问题：一个是关于如何确保语言表述的正确性以及如何消除语言表达中的二义性的问题; 另外一个是关于无穷这个观念的确切含义的问题.

表面上看起来, 第一个问题是一个系统性的问题, 一个更具一般性的问题; 第二个问题则是一个比较专门的问题, 似乎不可相提并论. 从实际求解过程上看, 也似乎的确如此. 但是, 当读者通读这本《集合论导引》(以下简称《导引》) 之后便能够看透它们之间深刻的内在联系.

早在古希腊时期, 从柏拉图 (Plato) 开始到亚里士多德 (Aristotle), 经历了由 (自然语言下的) 非形式逻辑到 (规范语言表达格式下的) 形式逻辑的演变过程. 在思辨过程中, 柏拉图更愿意将重点放在前提的合理性上, 在他看来只要前提合理, 道理之结论的合理性就应当自然而然依据某种方法得到. 追求这种保持思辨过程中前提和结论之间的合理性关系的一般方法曾经是柏拉图和他的学生们的一个重要任务. 亚里士多德在柏拉图非形式逻辑的基本思想的基础上, 提炼出影响整个西方哲学两千年的形式逻辑体系[1]. 亚里士多德的形式逻辑体系在很大范围内成功地实现了柏拉图的愿望：先将表达式的内涵搁置起来, 只关注表达形式之间的逻辑关系. 应当说, 将思想表达式的形式与内涵有意识地分离开是一个了不起的进步. 思想的表达方式与思想的内涵所持有的对立性是自然存在的, 是客观存在的; 而清楚意识到这一点, 并且明确地将这种自然对立面分开去寻找确保思维正确性的基本形式规则, 毫无疑问是人类认识论的一大飞跃. 历史的发展也表明这种飞跃是一个里程碑式的起点.

进一步推进第一个问题求解的人当属德国的莱布尼茨 (Gottfried Leibniz). 在莱布尼茨看来, 正像五线谱音符可以表现声音那样, 应当有一种特殊的可以用来表达概念的字符表; 在这个字符表上建立一种语言, 经过符号计算就能确定此语言中

---

1 Aristotle, The complete works of Aristotle (ed. Jonathan Barnes), Princeton University Press, 1984.

的句子是否为真, 以及这些语句之间具有什么样的逻辑关系. 莱布尼茨希望在有了这样的形式语言和符号计算方法之后, 当人们遇到思辨中争论不清的问题的时候, "让我们来算一算", 答案就在笔头产生, 其正确性必然为大家所接受. 莱布尼茨的一个终生抱负就是要找到一个真实表现人类思想的字符表以及相应的处理这些符号的计算方法, 他也是一个一生将自己奇思妙想和抱负付诸探索行动的人. 将莱布尼茨的梦想实现的人是英国的布尔 (G. Boole). 关于在数学中适当地运用符号所带来的威力, 布尔和莱布尼茨是心灵相通的. 莱布尼茨在少年时代产生了符号计算的奇想; 布尔则是在十六七岁的时候, 在一次穿越田野的漫步之中, 突发灵感：有可能将逻辑关系用代数形式来表示. 在莱布尼茨看来, 恰当地应用符号表达式是一种艺术, 而这样一种艺术是代数的特征和成功的秘诀之一; 布尔则认为代数的威力就在于两点：一是用符号表示数量; 二是那些代数运算只需要遵守几个很少的基本规则. 莱布尼茨企图寻求表达概念的字符表; 布尔则简单地用字母符号来表达任何一个概念, 或者概念之外延. 莱布尼茨坚持形式简洁而准确、表达的结果可以坐下来"算一算"; 布尔则将 "算一算" 的过程通过几条很少的 "代数" 运算规则来实现. 这就是当今我们所熟悉的布尔代数, 这也正是以我们现在几乎人手一部的手机为代表的各种计算机硬件逻辑线路设计以及各种计算机软件程序设计的基础. 布尔将他少年时代的灵感和多年来的思考集中在 1854 年出版的《思维规律》[2] 中, 这本书的雏形曾于 1847 年发表. 在这本书里, 布尔把亚里士多德的古典形式逻辑转换成了布尔代数, 或者布尔逻辑. 布尔显然相信符号代数在人类思维发展进程中所具有的威力, 但布尔未必预测到他对逻辑的代数解释在极大改变人类生活的现代计算机中所具有的不可替代的作用. 这必须归功于对莱布尼茨的 "算一算" 提出数学解释的图灵.

在布尔代数基础上, 或者在形式逻辑基础上, 真正解决 "算一算" 理论模型问题的人是英国的图灵 (Alan Turing). 因为, 在莱布尼茨那里, 什么是 "计算" 依旧是观念的计算, 就如同小学生的加减乘除四则算术观念那样; 在布尔那里, 运算虽然是逻辑代数的, 但这些依旧只是具体的从输入到输出的计算. 真正对 "计算" 这个观念给出圆满解释的是图灵. 图灵 1936 年发表在《伦敦数学会会刊》上的文章[3] 定义了图灵机这一数学模型以及以此为基础的图灵机计算的数学概念. 经过图灵的工作, 观念的计算变成了概念的计算：所有可计算的都是那些图灵机可计算的. 图灵所设计的通用图灵机则是可以以手机为代表的各种计算机内置操作系统

---

2 George Boole, An Investigation of The Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities, Cambridge: Walton and Maberly, London: Macmillan, 1854; New York: Dover Publications, Inc., 1958.

3 Alan Turing, On Computable Numbers with An Application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., 1936/1937, 42(1): 230-265.

和编译系统的最高典范.

如果说布尔的逻辑代数中运算还可以建立在潜无穷的观念之上, 那么图灵的通用图灵机则不得不建立在实无穷的概念之上, 这是图灵建立通用图灵机和定义图灵机计算概念的内核基础. 毫无疑问, 图灵是在接受了数学意义上的实在的无穷之后才建立起自己对于计算观念进行系统的数学解释的计算理论的. 那么在图灵之前, 关于无穷到底发生过什么呢?

在古希腊先贤那里, 观念中的无穷只是被简单地分为实无穷和潜无穷两类, 至于什么为实无穷, 什么是潜无穷, 并没有给予过多的关注或者思考. 我们的祖先[4] 也曾留下 "一尺之棰, 日取其半, 万世不竭" 的断言, 但却与幂级数 $1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 无缘. 著名意大利科学家伽利略[5] 在发现自由落体下落的距离与下落时间的平方成正比关系这一物理学定律的时候, 第一个意识到在自然数全体与自然数平方数全体之间存在着一一对应. 但是他令人不无遗憾地认为在无限的情形下谈论多和少是一件不合时宜的事情, 可谓与无穷的数学理论失之交臂. 事实上, 当无理数成为数学研究的对象时, 关于无穷的问题就开始从哲学问题转向数学问题. 如果说有理数都是有穷对象, 无理数在失去了有理数所具有的全部有限特征的情况下就只能是一种无穷对象, 从事数学探索的人们也就必须面对实实在在的无穷对象. 如果说代数数都是某一类有穷对象, 超越数就必须是一种实实在在的无穷对象. 集合论就始于 19 世纪伟大的数学变革过程, 这个过程最为显著的特点是将分析算术化以及由此而来的抽象化和一般化. 随着微积分的出现, 数学家们必须面对诸如序列、函数、级数 (尤其是三角级数)、极限、收敛、发散、连续性、导数、积分等等的问题. 数学家们开始意识到有必要探讨作为数学对象的无穷. 在解决数学分析的诸多问题的过程中, 在为牛顿 (Isaac Newton) 和莱布尼茨创立的微积分中的函数观念提供严格的数学解释的过程中, 起初以解析表达式来解释函数观念的做法逐渐演变为以一般的对应法则来解释函数观念. 这种演变的一个结果就是对于那些用来表示点的实数的整体观念越发明确起来, 尤其是无穷级数观念以及无穷级数的收敛问题更加清楚地呼唤着自然数整体与实数整体的实在性. 也正是在解决三角级数收敛唯一性问题的过程中, 德国数学家康托尔 (G. Cantor) 意识到所需要的整体唯一性与收敛点的全体之间难以分割的紧密关系, 年轻的康托尔由此开始专注地探讨这些收敛点全体以及无穷罗列全体的概念问题. 这种探讨的结果便在康托尔那里产生了对于实数集合

4《庄子 · 天下篇》.

5 Galileo Galilei, Discorces and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences, (1638, 原书为意大利语). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali (pag.664, of Claudio Pierini) publication Cierre, Simeoni Arti Grafiche, Verona, 2011.

及其子集合探索的基本概念以及超限数的概念. 就在布尔将形式逻辑转换成布尔代数后的 20 年, 也就是 1874 年, 康托尔发表了他将无穷作为数学探讨的对象建立起的关于无穷的数学理论 —— 集合论的第一篇文章[6]. 在这篇文章中, 康托尔证明了只有可数个代数数 (那些以有理数为系数的多项式的实根), 而存在不可数个超越数 (那些包括圆周率 π 以及自然对数基数 e 在内的不是任何以有理数为系数的多项式的实根的实数). 康托尔第一次向数学家们展示出具有实质上更多不可以简单定义的实数. 这是人类关于无穷认识的第一次飞跃. 1883 年, 康托尔发表了《一般集合论基础》[7]. 几年之后, 康托尔将这期间的几篇文章整理成一本专著《超限数理论基础》[8], 这就标志着一个丰富多彩的无穷集合宇宙被展现在世人面前. 整个数学, 也因此即将被放置在一个崭新的基础之上. 现代数学的大门被打开了. 布尔代数, 只能作为集合代数的一种特殊情形, 存在于人类认识的长河之中. 实际上, 从康托尔开始的集合论为人类提供了不仅仅具有丰富内涵的关于无穷的数学理论, 也为人类提供了最精炼的概念语言文字 —— 最初始的不加定义的概念只有一个 —— 集合; 最初始的不加定义的二元关系只有一个 —— 属于. 有关集合的任何复杂的认识都可以系统地在完全确定的基本理论之下归结于初始本原 —— 集合与集合之间的属于关系.

在康托尔的分析中, 将实数整体解释为实数集合; 在实数集合的基础上, 以实数子集合序型, 尤其是秩序的序型, 作为实数子集合的第一抽象, 以实数子集合的势作为第二抽象. 这样抽象的结果便是序数和基数这两个基本概念. 在康托尔的观念中, 无穷集合具有秩序是天经地义的事情, 就像任何有限集合都自然而然地拥有秩序一样. 在康托尔的概念中, 数的概念从有限飞跃到超限, 并且成功地证明了实数的整体比起自然数的整体具有本质上的数量的差别：自然数的整体可数, 而实数的整体不可数. 在康托尔的理解中, 与自然数集合相对应的基数是第一个无穷基数, 而与整个实数集合相对应的基数则是第一个不可数的基数; 任何一个实数的集合的基数要么是不超过自然数的基数, 要么是第一个不可数基数. 这就是著名的连续统假设. 正是在求解连续统假设的过程中, 康托尔开启了对可定义实数子集合的探索. 比如, 他证明了任何完备实数子集都与整个实数集合等势; 任何实数的闭子集都不会是连续统假设的反例. 正因为他对实数集合具有某种秩序的坚信, 康托尔致力于定义实数集合的一种秩序来解决他的连续统问题. 就这样, 当数的概念从有限领域上升到超限领域时, 康托尔不仅建立了序数和基数的超限算术理论, 还为后来者展

6 Georg Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1874, 77: 258-262.

7 Georg Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leibzig: Teubner, 1883.

8 Georg Cantor, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. New York: Dover Publications, Inc., 1955.

示了两个具有强大驱动力或者牵引力的基本问题：连续统问题以及可秩序化问题. 连续统问题问是否存在势居自然数集合之势与整个实数集合之势之间的实数的子集合？可秩序化问题问实数集合上是否存在一种秩序, 尤其是可定义 (可描述) 的秩序？对这两个问题的求解将是贯穿本书的一条中心线. 这本《导引》的压台定理将为实数集合可秩序化问题提供终结性答案：尽管选择公理保证实数轴可以被秩序化, 但不会有可定义的秩序; 对连续统问题提供最佳答案：连续统假设不会有可定义的反例, 但这不是最终答案. 写这本《导引》的一个基本目的就是期望能有后来者继续对这个问题的终极答案施展自己超群出众的才能.

几乎就在康托尔开始建立集合论的同时, 1879 年, 德国哲学家弗雷格 (Gottlob Frege) 出版了逻辑史上自亚里士多德以来划时代的著作《概念–文字：一种算术式的纯粹思维之形式语言》[9], 这本书为朝着系统地实现莱布尼茨抱负的方向迈出了奠基性的一步; 成功地克服了亚里士多德古典形式逻辑所面临的困难, 这包括满足数学演绎推理的需要和解决多重广延性表述难题; 打开了数理逻辑时代的大门; 同时也提出了一个崭新的问题：数学基础问题.

自 1879 年弗雷格出版《概念–文字：一种算术式的纯粹思维之形式语言》和 1883 年康托尔出版《一般集合论基础》开始, 人们对于数学基础问题探讨的热情高涨起来.

1889 年意大利数学家佩亚诺 (Giuseppe Peano) 出版了《算术原理 —— 用一种新方法展现》[10], 开数学基础研究之先河, 在这本书中, 佩亚诺明确地给出了关于自然数理论的公理, 尤其是关于数学归纳法的公理, 并且严格地将逻辑符号和算术符号区分开来. 这就标志着关于自然数一阶算术特性的形式表述和内涵的最后分离：在自然数性质的讨论过程中依赖于直觉的证明从此被完全抛弃.

弗雷格运用自己的形式语言逻辑系统来探讨二阶算术基础, 1893 年他出版了《算术基本律》[11] 第一卷.

1898 年冬季学期在哥廷根大学执教的希尔伯特 (David Hilbert) 给学生开了一门 "欧几里得几何元素" 的课程. 1899 年, 希尔伯特出版了这门课的讲义：《几何基础》[12]. 希尔伯特在欧几里得几何理论的基础上提出了新的几何公理系统. 希尔伯

9 Gottlob Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelspache des reinen Denkens, English translation: Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithemetic, for pure thought, In: From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, J. van Heijenoort ed. Cambridge: Harvard University Press, 1967, 1-82.

10 Giuseppe Peano, Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita. (The principles of Arithmetic, presented by a new method), Turin, 1889.

11 Gottlob Frege, Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. (Jena), vol. 1 (1893); reprinted 1962 (Olms, Hildesheim).

12 David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig: Teubner, 1899.

特强调这个几何公理体系之中, “点” “线” “面” 完全可以被替换成 “桌子” “椅子” “杯子”, 只要这些对象遵守那些明列出来的公理. 在这里, 希尔伯特提炼出了探讨数学基础的 “公理化方法”: 形式和内涵的分离、对立与统一. 希尔伯特证明了这个新的几何公理系统相对于 (二阶) 算术系统的无矛盾性: 只要 (二阶) 算术系统是无矛盾的, 那么几何便不会有矛盾.

1903 年, 弗雷格完成了《算术基本律》[13] 第二卷. 就在 1903 年第二卷即将付印的时候, 未曾想象的麻烦出现了. 英国哲学家罗素 (Bertrand Russell) 发现由弗雷格第二卷中的第五条 “基本律”—— 概括律, 可以导出一个矛盾 (详情见第一卷《引言》). 也就是说弗雷格的这些 “基本律” 是一个 “矛盾共同体”.

受到佩亚诺算术公理体系和希尔伯特几何公理体系的影响, 既为了解决康托尔连续统假设问题, 也为了应对康托尔集合论所面临的罗素悖论的挑战, 策梅洛 (Enrst Zermelo) 从 1905 年起开始进行集合论公理化的工作. 尽管没有能够证明自己所提出的公理系统是一个无矛盾的系统, 策梅洛在 1908 年正式发表了现在被称为 “策梅洛集合论公理” 的文章《集合论基础探讨》[14]. 显然是为了消除罗素悖论, 策梅洛将弗雷格的 “毫无限制的” 概括律改变成了具有明确限定范围的 “合成规则” 或者 “分解原理”: 策梅洛的集合论公理体系后来进一步得到完善 (详见第一卷《引言》), 从而成为当今集合论的基本理论体系.

正是在康托尔奠定的集合论 —— 这一关于实在无穷集合的基本理论 —— 的基础上, 斯科伦 (Thoralf Skolem) 开始将弗雷格一阶逻辑中对数学结构的语法表现与它们在被表现对象中的语义解释统一起来, 并且试图以集合论来作为数学的基础. 斯科伦在 1920 年发表的文章[15] 中证明了一阶数理逻辑中的三大基本定理之一的罗文海–斯科伦定理. 也正是在这样的基础上, 哥德尔 (Kurt Gödel) 在他 1930 年的博士论文[16] 中证明了具有新里程碑意义的一阶逻辑完备性定理. 这个定理表明被有意识地分离开的表达式的形式与内涵在实在无穷的数学理论上重新归于统一; 关于正确性的形式规则理论非常完备地符合着我们对于客观事物的正确认识. 从而斯科伦的想法变成了数学领域中的现实. 最后, 塔尔斯基 (Alfred Tarski) 成功地

13 Gottlob Frege, Grundgesetze Der Arithmetik, Begriffsschriftlich Abgeleitet. (Pohle, Jena), vol. 2(1903); reprinted 1962 (Olms, Hildesheim).

14 Enrst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Math. Ann., 1908, 65: 261-281.

15 Thoralf Skolem, Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: a simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem, In: From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931, J. van Heijenoort ed., Cambridge: Harvard University Press, 1967: 252-263.

16 Kurt Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Functionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1930, 37: 349-360.

奠定了现代模型论[17] 的基础, 他系统地严格地解决了数学理论中表达式何为真何为假的基本问题, 从而作为实在无穷理论的集合论便成为现代数学理论的实实在在的基础.

尽管康托尔关于实数集合是否可秩序化的问题已经由策梅洛提出的选择公理所解决 (详情见第一卷第 2 章), 但是连续统问题依旧还是一个悬而未决的基本问题. 哥德尔于 1938 年以构造内模型的方式[18][19][20] 证明了连续统假设以及选择公理相对于基本集合公理系统 ZF (详情见第一卷第 1 章) 的相对相容性：如果基本集合公理系统 ZF 没有矛盾, 那么这个基本集合论公理系统加上连续统假设以及选择公理也不会有矛盾, 并且在哥德尔的内模型 L 中, 实数集合上有一个具有最佳定义的秩序. 因此, 在哥德尔的 L 中, 康托尔的两个问题 —— 实数集合秩序化问题与连续统问题 —— 都有最好的肯定答案. 哥德尔的内模型 L 将在本《导引》第二卷第 2 章中专门讨论. 大约 25 年后, 科恩 (Paul Cohen) 以力迫构思泛型扩张[21][22][23] 的方式 (详情见本《导引》第二卷第 3 章) 证明了连续统假设之否定与集合论公理系统 ZFC 的相对相容性以及 "实数集合上不存在任何秩序" 这一否定选择公理的命题与集合论基本公理体系 ZF 的相对相容性. 于是, 康托尔的两个问题 —— 实数集合秩序化问题与连续统问题 —— 都与集合论基本公理体系相对独立：ZF 既不能给出肯定的答案, 也不能给出否定的答案.

康托尔在试图求解连续统问题时采取了一条对实数集合**可定义子集**展开系统分析的路线. 这一路线在 20 世纪 30 年代被苏联和波兰数学家们继续采用, 并且形成了**描述集合论**分支. 描述集合论专门研究实数集合的可定义性 (这种可定义性问题也是本《导引》贯穿全书的一个牵引问题). 康托尔曾试图以对可定义的不可数的实数子集寻找一个完备子集的方式来证明可定义子集不会是连续统假设的反例. "要么可数, 要么包含一个完备子集", 这样一种二分原理作为一种实数子集的正则性被称为 "完备子集特性". 实数子集合的另外一个正则性是勒贝格可测性. 勒贝

17 Alfred Tarski, Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych. (The concept of truth in the language of deductive sciences.) Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III (Travaux de la Société des Sciences et des Letters de Varsovie, Classe III) #34 (1933).

18 Kurt Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis. Proc. Nati. Acad. Sci. U.S.A., 1938, 24: 556-557.

19 Kurt Gödel, Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. Proc. Nati. Acad. Sci. U.S.A., 1939, 25: 220-224.

20 Kurt Gödel, the consistency of the continuum hypothesis. Ann. of Math. Studies, No. 3, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1940.

21 Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. I. Proc. Nati. Acad Sci. U.S.A., 1963, 50: 1143-1148.

22 Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. II. Proc. Nati. Acad Sci. U.S.A., 1964, 51: 105-110.

23 —, Set Theory and the Continuum Hypothesis, New York: Benjamin, 1966.

格 (Henri Lebesgue)1902 年在他的学位论文[24]中引进了勒贝格测度, 从而实数子集的可测性便被视为一种正则性. 实数子集合的第三种古典正则性则是贝尔 (René Baire) 早在 1899 年[25] 所引进的**贝尔特性**: 一个实数子集合具有贝尔特性指的是它与某个开子集的对称差是一个稀疏集合 (详情见第一卷第 3 章). 出于对实数子集的可定义性的探索, 博雷尔 (Emile F. Borel) 以代数的方式[26] 引进了实数轴上包含全体开子集、对于集合取补运算封闭、对于可数并以及可数交封闭的最小代数, 其中的元素便被称为**博雷尔集合**. 博雷尔集合就具有完备子集特性, 都是勒贝格可测的; 也都具有贝尔特性. 勒贝格于 1905 年发表的文章[27] 对博雷尔集合进行了严格分层, 用康托尔的对角线方法证明了这种分层是真实分层, 并且存在不是博雷尔集合的但是可定义的实数子集合. 令描述集合论真正得到激励的是苏斯林 (Mikhail Suslin) 发现了[28] 勒贝格证明中存在一个看走眼的地方. 透过对勒贝格看走眼的地方的详细分析, 苏斯林引进了**解析集**的概念, 并且证明了一个实数集合是一个博雷尔集合的充分必要条件是: 不仅它是一个解析集合并且它的补集也是一个解析集合 (详细内容见第一卷第 3 章). 在苏斯林发现的基础上, 卢津 (Nikolai Luzin)[29] 和谢尔品斯基 (Wacław Sierpiński)[30] 建立起实数子集的**投影集层次**, 并且以**树**来表示实数子集, 这也为有秩关系进入数学实践开启了先河. 经过他们的工作, 我们知道每一个解析集都具有完备子集特性 (Suslin), 从而不会是连续统假设的反例; 都是勒贝格可测的 (Luzin); 都具有贝尔特性 (Luzin-Sierpiński). 后面我们会看到, 苏联和波兰描述集合论古典学派在对实数子集正则性分析中, 在 ZFC 基础上, 已经达到思维成就的顶峰, 这从哥德尔可构造论域 L 中关于实数集合上的可定义秩序就可以看出. 当然, 这些都是后话. 之所以如此, 就在于 ZF 或者 ZFC 所能提供的资源能够被利用的全都被利用了. 因此, 要想将对实数正则性的分析推向更高层次的投影集合上去, 就必须增加集合论论域的资源.

依旧对增加集合论论域的资源留有空间的是无穷公理. 在基本集合论公理系统中, 无穷公理本质上只是断言自然数集合存在. 因此, 在此基础上不断引进更强

---

24 Henri Lebesgue, Intégrale, Longuer, Aire, Paris: Thèse, 1902.

25 René Baire, Sur les fonctions de variables réelles. Annali di Math, 1899, 3(3): 1-123.

26 Emile F. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en series de polynomes. Paris: Gauthier-Villars, 1905.

27 Henri Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement. J. de. Math., 1905, 1(6): 139-216.

28 Mikhail Suslin, Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. C.R. Acad. Sci. Paris, 1917, 164: 88-91.

29 Nikolai Luzin, Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. C. R. Acad. Sci. Paris, 1925, 180: 1572-1574; Remarques sur les ensembles projectifs. C. R. Acad. Sci. Paris, 1927, 185: 835-837.

30 Wacław Sierpiński, Sur une classe d’ensembles. Fund. Math., 1925, 7: 237-243; Sur quelques propriétés des ensembles projectifs. C. R. Acad. Sci. Paris, 185(1927), 833-835.

的无穷公理便成为一种有效的追求.

基于与彻底有限集合的论域 (见第一卷第 1 章) 的**相似性**, 谢尔品斯基和塔尔斯基[31] 以及策梅洛[32]引进了 (强)**不可达基数**存在的公理. 借助于第一个不可数基数在哥德尔论域 L 中的不可达特性, 数学家们终于意识到解析集的补集是否具备完备集特性是一个地地道道的大基数是否存在的问题 (所有这些都会在第三卷第 3 章中展开讨论, 这里就简要地介绍一下).

基于实数集合上的勒贝格测度以及不可测实数集合的存在性这样的事实, 以及对一般测度问题的完美解答的追求, 乌拉姆 (Stainsław Ulam) 引进了[33] **可测基数**存在的公理. 事实上, 可测基数的概念仍然可以看成自然数集合之基数概念的相似推广. 每一个可测基数都是不可达基数, 并且在一个可测基数之下存在许许多多不可达基数, 可测基数的存在的确为数学家提供了丰富的新资源 (详情见第三卷第 3 章). 恰恰由于它所提供的丰富资源, 可测基数的存在表明集合论论域在本质上完全不同于哥德尔可构造论域 L. 第一个指明这种实质差别的是斯卡特 (Dana S. Scott)[34].

基于第一个无穷基数的组合特性, 艾尔铎希 (Paul Erdös) 和塔尔斯基[35] 引进了**弱紧基数**(见第一卷第 2 章).

基于第一个无穷基数的紧致性, 凯斯乐 (H. Jerome Keisler) 和塔尔斯基[36]引进了**强紧基数**(见第三卷第 1 章). 不仅如此, 在这篇文章中, 两位作者利用可测基数上的可数完全超滤子, 构造了集合论论域的超幂, 以证明最小的可测基数严格大于最小的不可达基数. 斯卡特也正是应用这种超积方法 (由可测基数上的正规超滤子所确定的超幂) 证明了如果存在一个可测基数, 那么集合论论域一定不同于哥德尔可构造论域 L.

因为存在着从集合论论域到由可测基数上的正规超滤子所确定的集合论论域的超幂的典型同质嵌入映射, 所以人们很快将关注大基数的眼光转移到了具有不同

31 Wacław Sierpiński and Alfred Tarski, Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles. Fund. Math., 1930, 15: 292-300.

32 Ernst Zemelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. Fund. Math., 1930, 16: 29-47.

33 Stainsław Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fund. Math., 1930, 16: 140-150.

34 Dana S. Scott, Measurable cardinals and constructible sets. Bull. Acad. Polon.Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1961, 9: 521-524.

35 Paul Erdös and Alfred Tarski, On some problems involving inaccessible cardinals. In: Essays on the Fuondations of Mathematics (Y. Bar-Hillel et al., eds.), Magnes Press, Hebrew University, Jerusalem, 1961: 50-82.

36 H. Jerome Keisler and Alfred Tarski, From accessible to inaccessible cardinals. Fund Math., 1964, 53: 225-308.

特点的同质嵌入映射之上. 正是基于对嵌入映射的目标模型所持有的封闭特点的考量, 索洛维 (Robert M. Solovay) 等[37] 引进了**超紧基数**, 这一切都显得十分自然. 超紧基数的存在为解决诸多集合论中悬而未决的问题带来了前所未有的突破. 在本《导引》的第三卷中我们将会看到不少这样的典型例子. 在第三卷第 3 章中我们会看到超紧基数对于完全解决康托尔关于实数集可定义秩序问题以及其他关于实数集合正则性问题的优美解答.

大基数作为无穷公理的自然加强或者推广, 为集合论论域增添了极其丰富的资源, 有许多已经被开发和利用, 更多的还被隐藏着, 等待智慧的发现、开发和利用, 以期对于无穷的认识会不断得到升华.

这本《导引》的基本宗旨就是向读者解释以康托尔集合论为基础的现代集合论的基本内涵以及这样的有关无穷的集合理论何以具备先贤们所期望的那些功能. 这本《导引》分为三卷, 每卷三章. 下面我们简要地介绍一下各卷各章的主要内容, 更为详细的引言将分布在各卷之首.

第一卷是基础理论部分. 在这里我们将奠定整个集合论的基础, 在引进集合论的基本公理系统的基础上, 引进集合论中通用的基本概念, 引进具体的具有典范意义的无穷集合, 并展开一些具体的组合分析. 第 1 章的主要内容是引进可数集合的最基本的例子：自然数集合、整数集合、有理数集合以及彻底有限集合; 中心则是解释递归定义、归纳法以及传递化这些集合论分析中最基本的最常用的方法. 第 2 章的基本内容是组合分析, 主要有选择公理、基数运算以及一些基本组合原理. 第 3 章是实数集合. 除了证明一系列重要的基本定理之外, 第一卷的一个重要任务是为后面的理论发展提出具有引导意义的基本问题, 这包括连续统问题、奇异基数假设、实数子集的正则性问题, 对这些问题的求解将是贯穿这本《导引》的中轴线.

第二卷是集合论的模型分析部分. 这一卷的主要任务是将逻辑植入到集合论之中, 并以此为基础实现三大目标：第一大目标是将同质子模型分析引入集合论, 这是一种不同于组合分析的对无穷集合展开分析的基本方法. 如果说组合分析具有纯粹局部特点, 那么同质子模型方法则具有很强的总体特点. 从逻辑的角度看, 组合分析是在论域内部展开的某些特定的性质的讨论, 而同质子模型分析则是利用围绕事物在相对论域中的外部特性与内部特性的比较来展开的讨论, 这也正是集合论在解决许多问题上具有强大功能的关键所在. 第二大目标则是建立集合论论域的具有典范作用的内模型, 这是哥德尔为解决连续统假设的合理性而开创的一个研究领域. 所谓内模型, 就是在集合论的论域之内寻求既包括所关注的对象又对于各种集合运算封闭的最小的传递类, 从而得到所关注对象的某种特性的合理性证明. 第三大目标是建立集合论论域的具有典范意义的外模型, 这是科恩为解决连续统

37 Robert M. Solovay, William N. Reinhardt, Akihiro Kanamori, Strong axioms of infinity and elementary embeddings, Ann. Math. Logic, 1978, 13: 73-116.

假设的独立性而开创的一个研究领域. 所谓外模型, 就是在集合论论域之内定义一个具有特别组合特点的偏序集合, 并以此为基础, 系统地将集合论的论域向外扩张, 得到一个扩张模型, 从而得到所关注对象的某种特性的合理性证明. 由于集合论本身的一种基本特点：不依赖任何外部因素, 完全独立地发展自身体系. 这种向外扩张必须以内部完全可控的方式来实现, 这便是科恩所创立的力迫论. 这三大目标的基本实现也就分别构成了第二卷三章的内容.

第三卷是对集合论保证无穷集合存在的无穷公理的层次分析. 这种分析既包含组合分析, 也包含逻辑分析; 既包含内模型分析, 也包含外模型分析; 归根结底是揭示各种高阶无穷公理对于整个集合论论域的影响, 尤其是对实数集合的影响. 因此, 第三卷的第 1 章侧重于大基数的组合分析、逻辑分析以及内模型构造; 第 2 章侧重于在大基数上构造各种各样的具有典范意义的力迫扩张, 从而解决包括奇异基数假设在内的一些长期遗留问题的独立性问题; 第 3 章侧重于分析高阶无穷对实数子集合正则性的影响. 如果说不同的无穷公理从不同层次上在集合论论域中提供了不同丰富程度的资源, 那么剩下的便是在集合论论域中探索的人们如何将自己的高端智慧发挥到极致来发现、挖掘和利用这些丰富资源的事情. 就如同一部庞大的歌剧必定有全剧高潮那样, 这本《导引》的最后一章也就是截止于 1990 年左右的集合论这一人类智慧结晶的最优美的展现.

这本《导引》涵盖从 1874 年起将近 145 年的集合论发展主线上的具有引领作用的内容. 本书通篇将以问题为牵引, 以概念为基础, 以例子为蓝本, 来展开分析, 力求清楚地展现核心思想和方法及其作用的精髓, 努力实现逐步铺垫、循序渐进、化解难度. 在作者心中, 集合论既是纯粹的数学, 也是精美的哲学, 就如同五线谱与音乐, 它以完全抽象展现具体, 又以十分具体实现纯粹抽象. 本书力图为读者展现一幅高端智慧探索无穷的完美图画. 为此, 本书将力图清晰地勾勒集合论的内在思想结构, 包括自然性和典型演绎发展路径. 作者的悟性有限, 集合论宇宙风光无限, 作者也因此期待具有更高悟性的读者能够将作者在本书中展现的粗糙和短缺完善, 使其更加精致和完美, 这便是 “导引” 一词的本来含义. 课题的选择往往是困难的, 许多更是难以取舍, 但是受篇幅限制, 就不得不忍痛割爱. 最大的缺憾自然是没有能够将内模型的精细分析理论、可测基数之下的内核模型、武丁基数之下的内核模型以及武丁的 $\mathbb{P}_{\max}$- 模型等内容放到这本《导引》之中. 这是无可奈何的事情, 因为这些优美的内容足以各自另成一本厚厚的专门著作. 同样由于篇幅所限, 我们常常不去关注一些定理的最佳形式, 除非它们的最佳形式无论是表述还是证明都不会增加额外的复杂性. 正如我们不得不舍弃几大专题那样, 我们也忽略了许多优美的大基数概念和定理, 因为《导引》毕竟不会是 “百科全书”. 对于希望了解更为综合性集合论内容的读者, 我们推荐耶赫 (Thomas Jech) 的《集合论》(2003 年版本), 这也是这本《导引》通篇所用的主要参考书.

作者曾以这本书的第一卷中的大部分内容为教材分别在新加坡国立大学、清华大学和中国科学院大学为高年级本科生讲授集合论课程; 也曾以第二卷和第三卷的前两章中的主要内容为教材在新加坡国立大学和中国科学院数学与系统科学研究院给集合论专业的研究生讲授集合论课程. 因此, 作者真诚希望这本《导引》能够启发和引导未来的能够被集合论所吸引的读者进入这个浩瀚的领域.

本书三卷全部由中国科学院数学与系统科学研究院资助出版, 谨此深表谢意. 作者也借此机会表达对科学出版社, 尤其是李静科编辑的真诚谢意.

冯 琦
中国科学院数学与系统科学研究院
2019 年 4 月 30 日

目　录

引　言

在前两卷里, 我们已经见到集合理论 ZFC 为我们提供了一个相当丰富的数学无穷宇宙. 同时, 我们依旧面临许许多多基本的、古典的、悬而未决的疑难问题. 比如, 连续统假设问题, 可定义实数子集合的正则性问题, 等等. 自然的想法是为公理集合理论 ZFC 添加合适的、新的存在性公理. 根据哥德尔不完全性定理, 我们知道这会是一个永无休止的过程: 随着新公理的添加, 原有的问题可能被解决, 但是新的难以解决的问题必然出现. 不断完善我们对于无穷的认识, 不断地解决面临的问题, 这不正是我们的追求吗?

在 ZFC 的公理列表中, 可以进一步添加新内容的自然是无穷公理 (第 I.14 页的公理 I.7). 事实上我们已经在第一卷第 2 章中见到过这样的例子: 不可达基数以及弱紧基数. 不可达基数的存在不仅为我们提供了更为丰富的集合资源, 还解决了 ZFC 的相容性问题, 因为如果 κ 是一个不可达基数, 那么 V_κ 就是 ZFC 的一个模型. 根据哥德尔完全性定理, 集合理论 ZFC 就是一个无矛盾的理论. 当然, 我们只是将 ZFC 的相容性转嫁出去了, 因为我们并不知道集合理论 ZFC +"存在一个不可达基数" 是否相容. 根据哥德尔第二不完全性定理, 这不是我们在这个理论之中可以解决的问题. 这个问题可以同样地转嫁给弱紧基数. 因为如果 κ 是一个弱紧基数, 那么 κ 也是一个不可达基数, 并且在 κ 之下还存在 κ 个不可达基数. 因此, 弱紧基数的存在蕴涵集合理论 ZFC +"存在一个不可达基数" 是相容的. 这些还只是起点.

本卷的内容非常丰富. 在这一卷里, 我们以崭新的高阶无穷集合的存在性开篇. 这些新的大基数包括可测基数、强紧基数、超紧基数, 以及由它们导出的拉姆齐基数、$x^{\#}$、强基数、超强基数和武丁基数. 我们讨论的重点将是可测基数、$0^{\#}$、超紧基数以及武丁基数. 因为它们将为我们解决可定义实数子集的正则性问题提供最终答案. 十分明显, 我们完全忽略了许多用途广泛的大基数. 由于篇幅所限和既定目标的原因, 我们不得不在这本《集合论导引》中对诸多大基数一字不提. 如果读者希望了解更多大基数理论, 我们向读者推荐两本标准读物: 耶赫 (Thomas Jech) 的第三千禧版《集合论》[1] 以及 Akihiro Kanamori 的《高阶无穷》[2]. 前者是一本综合性集合论著作, 后者则专门讨论高阶无穷理论.

1 Thomas Jech, Set Theory, the Third Millennium Edition, revised and expanded. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.

2 Akihiro Kanamori, The Higher Infinite. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997.

本卷依旧分为三章. 这也是完全由各章内容本身的思想结构所确定的. 尽管每一章都比较长, 尤其是第 3 章, 但就思想内容结构而言, 各自成为一个有机整体, 因此, 作者没有将它们分割开来的意愿.

在第 1 章中, 将对关注的大基数展开组合的与逻辑的分析. 读者会发现, 这一章里同质嵌入映射将扮演主角或者占领中心舞台. 所以, 更多的是逻辑分析或者模型分析在发挥作用. 在这一章里, 我们将讨论线性迭代超幂以及由可测基数所携带的正规超滤子所确定的相对构造内模型, 并且将讨论哥德尔可构造集合论域到自身的同质嵌入映射以及与它对等的自然数子集合 $0^{\#}$; 与此相关的是鄢森 (Ronald Jensen) 覆盖引理. 在第 1 章的第二部分, 我们围绕超紧基数展开分析, 从而引进后面所需要的组合分析与逻辑分析的资源. 最后的落脚点将是武丁基数. 武丁基数是与可定义实数子集正则性问题密切关联的大基数.

在第 2 章中, 我们应用大基数资源来定义几种力迫构思以解决包括奇异基数假设在内的疑难问题的相对独立性; 还将引进比马丁公理更强的恰当力迫公理; 本章中的最后部分是为第 3 章准备的. 在这里, 我们会探讨获得 ω_1 上的具有特别组合性质的理想问题, 并会引进泛型超幂以及荟萃塔力迫构思.

第 3 章是全书的高潮部分. 在这里我们的中心是在大基数下可定义实数子集的正则性问题的求解. 我们将从可测基数对于投影集合底层的影响开始. 在这里我们会看到古典分析方法在大基数下如何被发扬光大. 我们将引进具有特殊含义的广泛贝尔特性. 这是联结力迫构思不变性、大基数以及可定义实数集合的正则性的结合部. 接下来, 我们专注于在大基数下可定义实数子集理论以及它在大基数下的不变性. 这包括索洛维可定义实数子集正则性模型、武丁的不变性定理、马丁和斯蒂尔胜负确定性定理, 以及武丁表示定理. 这些定理的证明依赖两大技术支撑：武丁的荟萃塔以及泛型超幂, 马丁和斯蒂尔的非线性超幂迭代、迭代树. 这两种技术支撑都将在这一章中事先建立起来. 这一章是最长的一章, 也是内容极大丰富的一章. 但是它美妙的内涵会始终激励着我们的感悟.

[引用记号说明] 本卷中需要引用前两卷中的概念、引理或者定理. 我们将用前缀 Ⅰ. 表明所引用的是第一卷中的概念、引理或者定理; 用前缀Ⅱ. 表明所引用的是第二卷中的概念、引理或者定理. 比如, 由康托尔定理 (定理 I.1.4), 我们有 $\kappa < 2^{\kappa}$; 依据罗文海–斯科伦定理 (定理Ⅱ.1.22)(见第二卷第 74 页), $\mathscr{H}_{\omega_1}$ 有一个可数同质子模型.

第 1 章　大基数理论

集合论中的高阶无穷理论包含着事实上的三层内容: 一层是组合的, 一层是逻辑的, 一层是哲学的. 我们将着重探讨高阶无穷的组合内涵及逻辑内涵, 而将它们的哲学内涵留给读者去体会. 实际上前面我们已经探讨过一些高阶无穷对象的组合性质. 在这里, 先从高阶无穷的逻辑性质的探讨开始.

1.1　可 测 基 数

在滤子与理想小节中, 我们引进了滤子与超滤子的概念 (定义 I.2.12), 并且探讨了不可数正则基数上的无界闭子集滤子以及非荟萃集理想; 在选择公理成立条件下我们知道没有任何不可数正则基数上的无界闭子集滤子会是一个超滤子. 我们当时面临的悬而未决的问题 I.2.5 为: 是否存在不可数的正则基数 κ 以至于它上面存在一个 κ-完全的滤子? 现在来探讨这个问题的肯定答案对于我们到底意味着什么, 到底会将我们引入到一个什么样的崭新的集合宇宙?

定义 1.1　称一个基数 κ 是一个**可测基数**当且仅当 κ 上存在一个满足下述要求的**正规超滤子** $\mathscr{U}$:

(1) $\mathscr{U}$ 是一个非平凡的超滤子, 即它是一个超滤子, 并且 $[\kappa]^{<\kappa} \cap \mathscr{U} = \varnothing$;

(2) (完全性) $\mathscr{U}$ 是 κ-**完全**的, 即如果 $\gamma < \kappa$ 并且

$$\langle A_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle \in \mathscr{U}^\gamma,$$

那么 $\bigcap_{\alpha<\gamma} A_\alpha \in \mathscr{U}$;

(3) (正规性) $\mathscr{U}$ 是**正规**的, 即如果 $A \in \mathscr{U}$, f 是 A 上的一个选择函数, 那么 f 一定在 $\mathscr{U}$ 中的某一个元素 $B \subset A$ 上取常值.

首先我们来看看一个可测基数如果存在, 那么它们到底会有多大, 从而明了为什么它们的存在性会是一种高阶无穷公理.

定理 1.1　(1) 如果 κ 是一个可测基数, 那么 κ 是一个不可达基数;

(2) 如果 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个正规超滤子, 那么

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是一个不可达基数}\} \in \mathscr{U}.$$

证明　(1) 设 κ 是一个可测基数. 设 $\mathscr{U}$ 是 κ 上非平凡、κ-完全的正规超滤子.

首先, κ 不可数. 如果 $\kappa = \omega$, 那么, $A = \omega - 1 \in \mathscr{U}$; 对于 $n+1 \in A$, 令 $f(n+1) = n$, 则 f 是 A 上的一个单值选择函数; 此时, 条件 (1) 和 (3) 相冲突.

其次, κ 是正则基数. 否则, κ 是一个奇异基数, 根据奇异基数特征定理 (定理 I.2.9), κ 是 $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 个势小于 κ 的子集合 $A_\xi\,(\xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ 之并. 依据条件 (1), 对于每一个 $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, 必有 $(\kappa - A_\xi) \in \mathscr{U}$. 依据条件 (2),

$$\varnothing = \bigcap_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} (\kappa - A_\xi) \in \mathscr{U}.$$

这是一个矛盾.

最后, κ 是一个强极限基数. 我们需要证明: 如果 $\lambda < \kappa$ 是一个无穷基数, 那么 $2^\lambda < \kappa$. 假设不然, 令 $\lambda < \kappa$ 为一个无穷基数, 并且 $2^\lambda \geqslant \kappa$ (比如, κ 是一个后继基数; 或者是极限基数但不是强极限基数). 令 X 为一个势为 κ 的从 λ 到 $\{0,1\}$ 的函数之集. 令 $H : X \to \kappa$ 为一个双射. 令

$$\mathscr{V} = \{A \subseteq X \mid H[A] \in \mathscr{U}\}.$$

那么, $\mathscr{V}$ 是 X 上的一个 κ-完全的超滤子. 对于 $\gamma < \lambda$, 令

$$X_\gamma^0 = \{f \in X \mid f(\gamma) = 0\} \text{ 以及 } X_\gamma^1 = \{f \in X \mid f(\gamma) = 1\};$$

再令 $\epsilon_\gamma \in \{0,1\}$ 满足 $X_\gamma^{\epsilon_\gamma} \in \mathscr{V}$.

令 $Y = \bigcap\limits_{\gamma < \lambda} X_\gamma^{\epsilon_\gamma}$. 根据 κ-完全性, $Y \in \mathscr{V}$. 但是, 如果 $f \in Y$, 那么,

$$\forall \gamma < \lambda\,(f(\gamma) = \epsilon_\gamma).$$

所以, $|Y| \leqslant 1$.

(2) (a) 令 $A_0 = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ 是一个基数}\}$. 那么, $A_0 \in \mathscr{U}$.

如果不然, $B = (\kappa - A_0) \in \mathscr{U}$. 对于每一个 $\alpha \in B$, 令 $g(\alpha) = |\alpha|$. 因为 $\omega \subset A_0$, g 是 B 上的一个选择函数. 根据 $\mathscr{U}$ 的正规性, g 必定在 $\mathscr{U}$ 中 B 的一个无界子集 B_0 上取常值. 这就意味着 $B_0 \in \mathscr{U}$ 中的每一个元素之势都是某一个 $\lambda < \kappa$. 但这不可能.

(b) 令 $A_1 = \{\lambda \in A_0 \mid \lambda \text{ 是一个正则基数}\}$. 那么, $A_1 \in \mathscr{U}$.

如果不然, $B = (A_0 - A_1) \in \mathscr{U}$. 对于每一个 $\alpha \in B$, 令 $g(\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$. 那么, g 是 B 上的一个选择函数. 根据正规性, g 在 B 的一个在 $\mathscr{U}$ 中的子集 B_1 上取常值 λ. 对于每一个 $\alpha \in B_1$, 固定一个定义在 λ 上的单调递增收敛于 α 的序列 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$. 然后, 对于每一个 $\xi < \lambda$, 对于每一个 $\alpha \in B_1$, 令 $h_\xi(\alpha) = \alpha_\xi$. 那么, 每一个 h_ξ 都是

B_1 上的选择函数. 根据正规性, h_ξ 在 $\mathscr{U}$ 中 B_1 的一个子集 C_ξ 上取常值 η_ξ. 令

$$C = \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi.$$

那么, $C \in \mathscr{U}$ 并且 $|C| = 1$. 这是一个矛盾.

(c) 令 $A_2 = \{\lambda \in A_1 \mid \lambda$ 是一个正则极限基数$\}$. 那么, $A_2 \in \mathscr{U}$.

如果不然, $B = (A_1 - A_2) \in \mathscr{U}$. 那么, B 中的每一个元素都是一个后继基数. 对于 $\alpha \in B$, 令 $g(\alpha) = \max(\{\gamma < \alpha \mid \gamma = |\gamma|\})$. 那么, g 是 B 上的一个选择函数. 根据正规性, g 在 $\mathscr{U}$ 中 B 的一个子集 B_1 上取常值. 但这就意味着 $|B_1| = 1$.

(d) 令 $A_3 = \{\lambda \in A_2 \mid \lambda$ 是一个不可达基数$\}$. 那么, $A_3 \in \mathscr{U}$.

如果不然, $B = (A_2 - A_3) \in \mathscr{U}$. 也就是说, 对于 $\alpha \in B$, $\exists\lambda < \alpha\ \left(2^\lambda \geqslant \alpha\right)$, 因而, 令

$$g(\alpha) = \min(\{\lambda < \alpha \mid 2^\lambda \geqslant \alpha\}).$$

g 是 B 上的一个选择函数. 根据正规性, g 在 $\mathscr{U}$ 中 B 的一个子集 B_1 上取常值 λ. 令 $\mu = \left(2^\lambda\right)^+$. 那么, $\mu < \kappa$ 并且 $B_1 \subset \mu$. 这就是一个矛盾. □

上面的定理表明可测基数的存在性远非集合论 ZFC 所能够解决的问题, 因为一个可测基数的存在性足以保证集合理论 "ZFC+ 存在无界多个不可达基数" 的无矛盾性. 根据哥德尔不完全性定理, 这就表明我们不可能在 ZFC 中证明可测基数的存在性.

在可测基数的定义中, 我们应用了超滤子的完全性以及正规性. 这两条性质都是不可数正则基数上的无界闭子集滤子的基本性质. 对于非平凡的超滤子而言, 正规性蕴涵着完全性, 但完全性并不蕴涵正规性. 那么一个自然的问题就是: 如果我们只要求非平凡的完全的超滤子存在, 那么是否会得到一种实质上弱化的理论? 下面的定理表明正规性要求并没有实质上增强所得到的理论.

定理 1.2 如果 $\kappa > \omega$ 上存在一个非平凡的 κ-完全的超滤子, 那么 κ 上存在一个非平凡、κ-完全、正规的超滤子.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是 $\kappa > \omega$ 上非平凡的 κ-完全的超滤子. 令

$$X = \{f \in \mathfrak{P}(\kappa \times \kappa) \mid f : \kappa \to \kappa\} = \kappa^\kappa.$$

对于 $f, g \in X$, 定义

$$f =^* g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

那么, $=^*$ 是 X 上的一个等价关系. 令

$$[f]_{=^*} = \{g \in X \mid f =^* g\}\ \wedge\ X/\mathscr{V} = \{[f]_{=^*} \mid f \in X\},$$

以及

$$[f] \in^* [g] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

那么, $\in^*$ 在商集 $X/\mathscr{V}$ 上的定义无歧义, 并且是一个线性序.

由于 $\kappa > \omega$, 以及 $\mathscr{V}$ 是 κ-完全的, $(X/\mathscr{V}, \in^*)$ 是一个秩序. 如果不然, 在 $X/\mathscr{V}$ 中存在一个 $\in^*$ 单调递减的序列

$$[f_{n+1}] \in^* [f_n] \ (n \in \omega).$$

对于 $n \in \omega$, 令 $A_n = \{\alpha < \kappa \mid f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)\}$. 那么 $A_n \in \mathscr{V}$. 于是,

$$\varnothing = \bigcap_{n<\omega} A_n \in \mathscr{V}.$$

这就是一个矛盾.

根据秩序表示定理 (定理 I.1.64), 令 λ 是与 $(X/\mathscr{V}, \in^*)$ 同构的序数, 并且令

$$\pi : X/\mathscr{V}[g] \mapsto \pi([g]) \in \lambda$$

为它们之间的同构映射, 即从 $X/\mathscr{V}$ 到 λ 的唯一的传递化映射.

断言一　$\lambda \geqslant \kappa^+$.

为此, 我们定义一个模理想 $\mathscr{I} = [\kappa]^{<\kappa}$ 几乎处处单调递增的函数序列

$$\langle f_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle.$$

对于 $\alpha < \kappa$, 令 $f_\alpha(\gamma) = \alpha \ (\gamma < \kappa)$. 这样, 对于 $\alpha < \beta < \kappa$, $f_\alpha <^*_{\mathscr{I}} f_\beta$.

$f_\kappa(\gamma) = \mathrm{Id}(\gamma) = \gamma \ (\gamma < \kappa)$. 由此, 对于

$$\alpha < \kappa \, \forall \gamma < \kappa \, (\alpha < \gamma \to f_\alpha(\gamma) = \alpha < \gamma = f_\kappa(\gamma)),$$

即 $f_\alpha <^*_{\mathscr{I}} f_\kappa$.

对于 $\kappa < \beta < \kappa^+$, 递归地定义 $f_\beta : \kappa \to \kappa$ 如下:

如果 $\beta = \alpha + 1$, 那么对 $\gamma < \kappa$, 令 $f_\beta(\gamma) = f_\alpha(\gamma) + 1$. 从而 $\forall \delta < \beta \ (f_\delta <^*_{\mathscr{I}} f_\beta)$.

如果 β 是一个极限序数, 令 $\langle \alpha_\xi \in \beta \mid \xi < \mathrm{cf}(\beta) \rangle$ 为收敛于 β 的一个连续单调递增的序数序列, 那么对于 $\gamma < \kappa$, 令

$$f_\beta(\gamma) = \sup \left\{ f_{\alpha_\xi}(\gamma) + 1 \;\middle|\; \xi < \min\{\mathrm{cf}(\beta), \gamma + 1\} \right\}.$$

于是, 由定义, 当 $\mathrm{cf}(\beta) < \kappa$ 时, 对于每一个 $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$, 对于每一个 $\gamma > \mathrm{cf}(\beta)$, 必有 $f_\beta(\gamma) > f_{\alpha_\xi}(\gamma)$; 当 $\mathrm{cf}(\beta) = \kappa$ 时, 对于每一个 $\xi < \kappa$, 对于每一个 $\gamma > \xi$, 必有 $f_\beta(\gamma) > f_{\alpha_\xi}(\gamma)$. 因此, 对于每一个 $\alpha < \beta$ 都有 $f_\alpha <^*_{\mathscr{I}} f_\beta$.

于是, $(\{[f_\beta]_{=^*} \mid \beta < \kappa^+\}, \in^*)$ 是一个序型为 κ^+ 的子序. 这便证明了断言.

现在令 $h : \kappa \to \kappa$ 满足等式要求:

$$\pi : (\{\, [g] \in X/\mathscr{V} \mid\ [g] \in^* [h]\} \,, \in^*) \cong (\kappa, \in),$$

即 h 满足等式 $\pi([h]) = \kappa$. 令

$$\mathscr{U} = \left\{ A \subseteq \kappa \;\middle|\; h^{-1}[A] \in \mathscr{V} \right\},$$

其中, $h^{-1}[A] = \{\alpha \in \kappa \mid h(\alpha) \in A\}$.

断言二 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个超滤子.

我们有如下不等式和等式成立:

$$\begin{aligned} &\left(A \subseteq B \leftrightarrow h^{-1}[A] \subseteq h^{-1}[B]\right), \\ &h^{-1}[A \cap B] = h^{-1}[A] \cap h^{-1}[B], \\ &h^{-1}[A - B] = h^{-1}[A] - h^{-1}[B], \end{aligned}$$

以及 $\mathscr{V}$ 是 κ 上的一个超滤子, 由此得知 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个超滤子.

断言三 $\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) \leqslant \alpha\} \in \mathscr{V}$, 并且

$$\forall \beta < \kappa \, (\{\alpha < \kappa \mid \beta < h(\alpha)\} \in \mathscr{V} \ \wedge \ \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) \leqslant \beta\} \notin \mathscr{V}).$$

从而 $\mathscr{U}$ 是一个非平凡的超滤子.

我们先用归纳法来证明一个简单事实: 如果 $\beta < \kappa$, 令 $g_\beta \in \kappa^\kappa$ 为 κ 上的取常值 β 的函数, 那么 $\pi\left([g_\beta]\right) = \beta$.

当 $\beta = 0$ 时, 等式自然成立.

设 $\beta = \alpha + 1$, 并且对于 $\xi \leqslant \alpha$ 都有 $\pi\left([g_\xi]\right) = \xi$. 设 $[f] \in [g_{\alpha+1}]$. 那么

$$\{\gamma < \kappa \mid f(\gamma) \in \alpha + 1\} \in \mathscr{V}.$$

而 $f(\gamma) \in \alpha + 1 \leftrightarrow (f(\gamma) \in \alpha \vee f(\gamma) = \alpha)$. 因此, 或者 $[f] \in^* [g_\alpha]$ 或者 $[f] = [g_\alpha]$. 根据归纳假设, $\exists \delta \leqslant \alpha \, (\pi([f]) = \delta)$. 于是, $\pi\left([g_{\alpha+1}]\right) = \alpha + 1$.

设 $\beta < \kappa$ 是一个极限序数, 并且对于 $\xi \leqslant \alpha$ 都有 $\pi\left([g_\xi]\right) = \xi$. 设 $[f] \in^* [g_\beta]$. 那么

$$\{\gamma < \kappa \mid f(\gamma) \in \beta\} \in \mathscr{V}.$$

由于 $\beta < \kappa$, $\mathscr{V}$ 是 κ- 完全的, 必定存在 $\delta < \beta$ 来见证

$$\{\gamma < \kappa \mid f(\gamma) = \delta\} \in \mathscr{V}.$$

于是, $[f]=[g_\delta]$. 从而 $\pi([f])=\delta$. 因此, $\pi\left([g_\beta]\right)=\beta$.

由这个简单事实我们立即得到: 如果 $\beta<\kappa$ 以及 $\pi([g])=\beta$, 那么

$$\{\gamma<\kappa \mid g(\gamma)=g_\beta(\gamma)\}\in\mathscr{V}.$$

给定 $\beta<\kappa$, 那么, $\pi\left([g_\beta]\right)=\beta<\kappa=\pi([h])$, 所以

$$\{\alpha<\kappa \mid g_\beta(\alpha)=\beta<h(\alpha)\}\in\mathscr{V}.$$

如果 $\{\alpha<\kappa \mid \alpha<h(\alpha)\}\in\mathscr{V}$, 那么 $[\mathrm{Id}]\in^*[h]$ 以及 $\forall\beta<\kappa\,([g_\beta]\in[\mathrm{Id}])$. 从而

$$(\kappa,\in)\cong(\{[g]\mid[g]\in^*[\mathrm{Id}]\},\in^*).$$

这会是一个矛盾.

断言四　$\mathscr{U}$ 是一个 κ-完全的.

$\mathscr{U}$ 的 κ-完全性由其定义和 $\mathscr{V}$ 的 κ-完全性以及下述不等式给出:

$$\left(\bigcup_{\alpha<\gamma}h^{-1}\left[A_\alpha\right]\right)\subseteq h^{-1}\left[\bigcup_{\alpha<\gamma}A_\alpha\right].$$

断言五　$\mathscr{U}$ 是正规的.

设 $A\in\mathscr{U}$ 以及 $f:A\to\kappa$ 为一个选择函数. 令 $g=f\circ h$. 根据断言三的第一个结论以及 f 的性质, 我们有 $[g]\in^*[h]$. 于是 $\exists\beta<\kappa\;[g_\beta]=[g]$. 因此, g 在 $\mathscr{V}$ 中的一个集合 B 上为一个常值 $\beta<\kappa$. 所以 f 就在 $h[B]$ 上取常值 β. 而 $h^{-1}[h[B]]\supseteq B$, 所以 $h[B]\in\mathscr{U}$. □

上面的证明还清楚地告诉我们为什么在可测基数的定义中使用选择函数的常值化来定义正规性, 因为这样一来序数 κ 就可以在商集 $\kappa^\kappa/\mathscr{U}$ 中用最简单的 κ 上的恒等函数来表示. 这自然会令对许多问题的讨论变得相对简单. 正规性还有一个副产品: 非平凡的正规超滤子中的每一个集合都一定是一个荟萃子集. 这便是下述定理的内容.

定理 1.3　*设 κ 是一个可测基数以及 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规的超滤子. 如果 $C\subseteq\kappa$ 是 κ 上的一个无界闭集, 那么 $C\in\mathscr{U}$.*

证明　设 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 κ' 为 κ 中的所有极限序数的集合. 因为 $\mathscr{U}$ 是一个正规超滤子, κ 中的所有后继序数之集合上有一个单调自然选择函数, 所以 κ 中的所有后继序数的集合不在 $\mathscr{U}$ 中. 因此 $\kappa'\in\mathscr{U}$. 设 $C\subset\kappa$ 是一个不在 $\mathscr{U}$ 中的无界闭子集. 令 $T=\kappa'-(C\cup\{\min(C)+1\})$. 那么 $T\in\mathscr{U}$. 对于 $\alpha\in T$, $C\cap\alpha$ 是无穷极限序数 α 的一个有界闭子集, 从而 $\max\{\alpha\cap C\}\in C\cap\alpha$ 存在. 故令

$$\forall\alpha\in T\,(f(\alpha)=\max\{\alpha\cap C\}).$$

f 是 T 上的一个选择函数. 由 $\mathscr{U}$ 的正规性, 令 $T_0 \subset T$ 为 $\mathscr{U}$ 中的 f 在其上为常值 γ 的集合. 由于 $\mathscr{U}$ 是非平凡超滤子, T_0 必是 κ 的一个无界子集. 又因为 C 在 κ 中也无界, 故必然有 $\beta \in C$ 和 $\alpha \in T_0$ 来满足要求 $\gamma < \beta < \alpha$ 以及 $\beta \in C$ 和 $\alpha \in T_0$. 可是这就意味着一个矛盾：一方面 $f(\alpha) \geqslant \beta > \gamma$; 另一方面 $f(\alpha) = \gamma$. □

1.1.1 超幂

由定理 1.2 我们知道如果一个不可数的正则基数 κ 上存在一个非平凡的 κ-完全的超滤子，那么它上面一定存在一个正规超滤子. 在证明这个定理时, 我们引进了一种 "超幂构造". 现在将这种超幂构造延拓到整个集合论域上去. 先来看看超幂 $(\kappa^\kappa/\mathscr{V}, \in^*)$ 的一般化.

定义 1.2 (超幂) 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{V}$ 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 设 M 为一个非空传递集合. 对于 $f, g \in M^\kappa$, 定义

$$f =^* g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{V},$$

以及

$$[f] \in^* [g] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

令 $\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) = (M^\kappa/\mathscr{V}, \in^*)$, 并且称 $\mathrm{ult}(M, \mathscr{V})$ 为 $(M, \in)$ 在超滤子 $\mathscr{V}$ 上的**超幂**.

引理 1.1 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{V}$ 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 设 M 为一个非空传递集合. 那么

(1) $=^*$ 是 M^κ 上的一个等价关系;

(2) $\in^*$ 在商集 $M^\kappa/\mathscr{V}$ 上的定义毫无歧义;

(3) $\in^*$ 在商集 $M^\kappa/\mathscr{V}$ 上是一个自同一的有秩关系;

(4) 存在唯一的传递集合 N 以及传递化映射 $\pi : \mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \cong (N, \in)$.

证明 我们只需证明 (3) 和 (4).

(3) $\in^*$ 是一个有秩关系, 这是因为 $\mathscr{V}$ 是 σ-完全的以及 $\in$ 在传递集合 M 上是有秩关系.

现在我们来验证 $\in^*$ 在 $M^\kappa/\mathscr{V}$ 上是自同一的. 设 $f, g \in M^\kappa$, 并且

$$\{[h] \in M^\kappa/\mathscr{V} \mid [h] \in^* [f]\} = \{[h] \in M^\kappa/\mathscr{V} \mid [h] \in^* [g]\}.$$

我们来验证等式 $[f] = [g]$. 也就是说, 我们需要验证

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

假设不然. 那么 $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq g(\alpha)\} \in \mathscr{V}$. 不妨假设 $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) - g(\alpha) \neq \varnothing\} \in \mathscr{V}$. 令

$$A = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) - g(\alpha) \neq \varnothing\}.$$

对于 $\alpha \in A$, 令 $h(\alpha) \in f(\alpha) - g(\alpha)$; 对于 $\alpha \in \kappa - A$, 令 $h(\alpha) = a \in M$. 这样 $h : \kappa \to M$, 并且 $[h] \in^* [f]$, 但是 $[h] \notin^* [g]$. 这与给定条件不符. 因此得到一个矛盾.

(4) 由 (3), 依据自同一有秩关系表示定理 (定理 I.1.100) 立即得到. □

定理 1.4 (Łoś)　设 M 为一非空传递集合, κ 为一个无穷基数, $\mathscr{V}$ 是 κ 上的一个超滤子. 那么对于集合论纯语言的任意一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$, 以及 M^κ 中的任意一组函数 $f_1, \cdots, f_n$, 都有

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \varphi\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]] \iff \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \varphi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}.$$

证明　应用表达式复杂性的归纳法.

设 φ 是 $(v_1 \in v_2)$, $f, g \in M^\kappa$. 那么根据定义以及 Δ_0-性质对于传递模型的绝对不变性 (定理 II.1.19),

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models [f_1] \in^* [f_2] \iff \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models f_1(\alpha) \in f_2(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

设 φ 是 $(v_1 = v_2)$, $f, g \in M^\kappa$. 那么根据定义以及 Δ_0-性质对于传递模型的绝对不变性 (定理 II.1.19),

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models [f_1] =^* [f_2] \iff \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models f_1(\alpha) = f_2(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是 $(\neg\psi(v_1, \cdots, v_n))$, $f_1, \cdots, f_n \in M^\kappa$. 那么

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \varphi\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]]\\
\leftrightarrow\,&\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \not\models \psi\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]]\\
\leftrightarrow\,&\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \notin \mathscr{V}\\
\leftrightarrow\,&\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \not\models \psi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}\\
\leftrightarrow\,&\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models (\neg\psi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)])\} \in \mathscr{V}.
\end{aligned}$$

设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是 $(\theta(v_1, \cdots, v_n) \vee \psi(v_1, \cdots, v_n))$, $f_1, \cdots, f_n \in M^\kappa$. 那么根据归纳假设,

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \theta\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]] \iff \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \theta\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V},$$

以及

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \psi\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]] \iff \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models (\theta \vee \psi)\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}\\
\leftrightarrow&\begin{pmatrix} \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \theta\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V} \vee \\ \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V} \end{pmatrix}\\
\leftrightarrow\,&(\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \theta\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]] \vee \mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \psi\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]])\\
\leftrightarrow\,&\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models (\theta \vee \psi)\,[[f_1]\,, \cdots, [f_n]]\,.
\end{aligned}$$

设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是 $(\exists v_{n+1}\, \psi(v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}))$, $f_1, \cdots, f_n \in M^\kappa$.

假设 $\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \varphi\, [[f_1], \cdots, [f_n]]$. 令 $g \in M^\kappa$ 实现

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \psi\, [[f_1], \cdots, [f_n], [g]] .$$

那么根据归纳假设,

$$\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), g(\alpha)]\} \in \mathscr{V}.$$

因此,

$$\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models (\exists x\, \psi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), x])\} \in \mathscr{V}.$$

也就是

$$\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \varphi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}.$$

反之, 假设 $\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \varphi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{V}$. 令

$$A = \{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models (\exists x\, \psi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), x])\},$$

以及

$$g(\alpha) = \begin{cases} \min_{<}\{a \in M \mid (M, \in) \models \psi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), a]\} & \text{如果 } \alpha \in A, \\ b & \text{如果 } \alpha \notin A, \end{cases}$$

其中 $b \in M$ 为一个固定元素, $<$ 是 M 上的一个秩序 (假设选择公理成立). 根据归纳假设,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \psi\, [[f_1], \cdots, [f_n], [g]] \\ \leftrightarrow &\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi\, [f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), g(\alpha)]\} \in \mathscr{V}. \end{aligned}$$

根据假设, $A \in \mathscr{V}$. 所以, $\{\alpha < \kappa \mid (M, \in) \models \psi\, [f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha), g(\alpha)]\} \in \mathscr{V}$. 因此,

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \psi\, [[f_1], \cdots, [f_n], [g]] .$$

从而,

$$\mathrm{ult}(M, \mathscr{V}) \models \varphi\, [[f_1], \cdots, [f_n]] .$$

□

定理 1.5 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个正规超滤子. 令 $(M, \in)$ 为与 $\mathscr{H}_{\kappa^+}$ 的超幂

$$(\mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*)$$

同构的传递集合. 令

$$\pi : (\mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*) \to (M, \in)$$

为它们的同构映射; 令 $i : \mathscr{H}_{\kappa^+} \to \mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}/\mathscr{U}$ 为自然嵌入:

$$\mathscr{H}_{\kappa^+} \ni x \mapsto i(x) = [\{(\alpha, x) \mid \alpha \in \kappa\}] \in \mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}/\mathscr{U},$$

以及令 $j = \pi \circ i : \mathscr{H}_{\kappa^+} \to M$. 那么,

(1) $j(\kappa) > \kappa$, 并且 $\forall \alpha < \kappa \, (j(\alpha) = \alpha)$;

(2) 对于任意的 $A \subseteq \kappa$, 都有

$$A \in \mathscr{U} \leftrightarrow \kappa \in j(A);$$

(3) 如果 $f : \kappa \to M$, 那么 $\exists g \in \mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa} \, (\forall \alpha < \kappa \, (j(g)(\alpha) = f(\alpha)))$;

(4) $M = \left\{ j(f)(\kappa) \;\middle|\; f \in \mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa} \right\}$;

(5) $j : \mathscr{H}_{\kappa^+} \to M$ 是一个同质嵌入映射, 即对于集合论纯语言的任意一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$, 对于任意的 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathscr{H}_{\kappa^+}^n$, 都有

$$(\mathscr{H}_{\kappa^+}, \in) \models \varphi[a_1, \cdots, a_n] \iff (M, \in) \models \varphi\,[j(a_1), \cdots, j(a_n)]\,.$$

证明 (1) 因为对于 $\alpha \in \kappa$, $\pi\,([g_\alpha]) = \alpha$; $i(\alpha) = [g_\alpha]$. 所以, $j(\alpha) = \alpha$.

又因为对于 $\alpha \in \kappa$, $\{\gamma < \kappa \mid \alpha < \gamma\} \in \mathscr{U}$, 所以 $[g_\alpha] \in^* [\mathrm{Id}]$, 从而 $\alpha \in \pi([\mathrm{Id}])$. 因此, $\kappa \subseteq \pi([\mathrm{Id}])$. 另一方面, 如果 $[g] \in^* [\mathrm{Id}]$, 那么

$$\{\gamma < \kappa \mid g(\gamma) \in \mathrm{Id}(\gamma) = \gamma\} \in \mathscr{U}.$$

因为 $\mathscr{U}$ 是正规超滤子, 一定存在 $\alpha < \kappa$ 来见证 $[g] = [g_\alpha]$. 所以, $\pi([g]) = \alpha \in \kappa$. 这就表明 $\pi([\mathrm{Id}]) = \kappa$. 由此, 以及

$$\{\gamma < \kappa \mid \gamma = \mathrm{Id}(\gamma) < \kappa = g_\kappa(\gamma)\} \in \mathscr{U},$$

我们就有 $\kappa = \pi([\mathrm{Id}]) \in \pi\,([g_\kappa]) = \pi(i(\kappa)) = j(\kappa)$.

(2) 首先注意 $\mathfrak{P}(\kappa) \subset \mathscr{H}_{\kappa^+}$, 所以 $\mathfrak{P}(\kappa) \subset \mathrm{dom}(j)$.

设 $A \in \mathscr{U}$. 那么 $\{\gamma \mid \gamma \in A\} = A \in \mathscr{U}$. 所以 $[\mathrm{Id}] \in^* [\{(\gamma, A) \mid \gamma < \kappa\}]$. 于是, $\kappa \in j(A)$.

设 $A \subseteq \kappa$, 并且 $\kappa \in j(A)$. 那么

$$\{\gamma < \kappa \mid \mathrm{Id}(\gamma) \in A\} \in \mathscr{U}.$$

也就是说, $A \in \mathscr{U}$.

(3) 设 $f : \kappa \to M$. 对于每一个 $\alpha < \kappa$, 令 $h_\alpha : \kappa \to H_{\kappa^+}$ 来实现 $\pi\,([h_\alpha]) = f(\alpha)$. 注意, 对于每一个 $\alpha < \kappa$, $h_\alpha \in \mathscr{H}_{\kappa^+}$, 并且

$$\langle h_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \mathscr{H}_{\kappa^+}.$$

令 $F:\kappa\to H_{\kappa^+}^{<\kappa}\subset H_{\kappa^+}$, 由下式定义:

$$\forall\gamma<\kappa\,\forall\delta<\gamma\ (F(\gamma)(\delta)=h_\delta(\gamma))\,.$$

因为对于任意的 $\alpha<\kappa$, $F(\alpha)$ 都是一个长度为 $\mathrm{Id}(\alpha)$ 的序列, $[F]$ 就是一个长度为 κ 的序列. 设 $\xi<\kappa$. 我们来验证 $[F](\xi)=[h_\xi]$. 因为对于 $\xi<\alpha<\kappa$, $F(\alpha)(\xi)=h_\xi(\alpha)$, 所以

$$\{\alpha<\kappa\mid F(\alpha)(c_\xi(\alpha))=h_\xi(\alpha)\}\in\mathscr{U}\,.$$

于是, $[F](\xi)=[h_\xi]$.

(4) 一方面, 对于 $f\in\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}$, $f\in\mathscr{H}_{\kappa^+}$, 因而 $j(f)\in M$, 以及 $j(f)(\kappa)\in M$. 这样,

$$\{j(f)(\kappa)\ \mid f\in\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}\}\subseteq M.$$

另一方面, $M=\left\{\pi([h])\ \middle|\ h\in\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}\right\}$. 对于 $h\in\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}$, $\pi([h])=j(h)(\kappa)$. 这是因为从等式

$$\{\alpha<\kappa\mid c_h(\alpha)(\alpha)=h(\alpha)\}\in\mathscr{U}\,,$$

我们得到 $[c_h]([\mathrm{Id}])=[h]$, 其中, $c_h=\{(\alpha,h)\mid\alpha<\kappa\}$. 于是, $j(h)(\kappa)=\pi([h])$.

(5) 根据 Łoś 定理 (定理 1.4), 对于集合论纯语言的任意一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1,\cdots,v_n)$ 以及任意一组函数 $f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}$, 都有

$$\begin{aligned}&\left(\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}/\mathscr{U},\in^*\right)\models\varphi\left[[f_1],\cdots,[f_n]\right]\\ \leftrightarrow&\{\alpha<\kappa\mid\ (\mathscr{H}_{\kappa^+},\in)\models\varphi\left[f_1(\alpha),\cdots,f_n(\alpha)\right]\}\in\mathscr{U}\,.\end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $a_1,\cdots,a_n\in\mathscr{H}_{\kappa^+}$, 令 $c_{a_i}=\{(\alpha,a_i)\mid\ \alpha<\kappa\}\,(1\leqslant i\leqslant n)$, 那么

$$\begin{aligned}&(\mathscr{H}_{\kappa^+},\in)\models\varphi[a_1,\cdots,a_n]\\ \leftrightarrow&\{\alpha<\kappa\mid\ (\mathscr{H}_{\kappa^+},\in)\models\varphi\left[c_{a_1}(\alpha),\cdots,c_{a_n}(\alpha)\right]\}\in\mathscr{U}\\ \leftrightarrow&\left(\mathscr{H}_{\kappa^+}^{\kappa}/\mathscr{U},\in^*\right)\models\varphi\left[[c_{a_1}],\cdots,[c_{a_n}]\right]\\ \leftrightarrow&(M,\in)\models\varphi\left[j(a_1),\cdots,j(a_n)\right].\end{aligned}$$ □

应用上面的超幂定理, 我们来揭示可测基数的强划分特性. 我们将看到可测基数不仅是弱紧基数, 还是更强的拉姆齐基数, 并且比它小的拉姆齐基数组成一个荟萃子集.

定义 1.3 (拉姆齐基数) 对于 $\omega<\kappa=|\kappa|$, 表达式 $\kappa\to(\kappa)_2^{<\omega}$ 等价于下述命题:

$$\forall f:[\kappa]^{<\omega}\to 2\ \exists H\in[\kappa]^\kappa\,\forall n\in\omega\ |f[[H]^{n+1}]|=1.$$

称不可数基数 κ 为一个**拉姆齐基数**当且仅当 $\kappa\to(\kappa)_2^{<\omega}$.

自然地, 任何一个拉姆齐基数都必然是弱紧基数; 但反过来则不对. 事实上, 进一步的分析表明: 如果 κ 是一个弱紧基数, 那么 κ 在哥德尔构造集合论域之中依旧保持其弱紧特性; 而一旦存在拉姆齐基数, 那么 $\mathbb{R} - L \neq \varnothing$, 其中, L 是哥德尔可构造集论域.

定理 1.6　如果 κ 是一个可测基数, 那么 $\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}$; 不仅如此, 如果 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子, $f : [\kappa]^{<\omega} \to \{0,1\}$, 那么

$$\exists H \in \mathscr{U}\ \forall n < \omega\ (|f[[H]^n]| = 1)\,.$$

证明　设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个正规超滤子.

用归纳法先证明：

$$\forall A \in \mathscr{U}\ \forall f : [A]^{n+1} \to 2\ \exists H_n \in \mathscr{U}\ (H_n \subset A\ \wedge\ f\text{ 在 }[H_n]^{n+1}\text{ 上取常值}).$$

当 $n = 0$ 时, 两个不相交的集合 $\{\alpha \in A \mid f(\{\alpha\}) = 0\}$ 与 $\{\alpha \in A \mid f(\{\alpha\}) = 1\}$ 有且只有一个在 $\mathscr{U}$ 之中.

对于 $\alpha < \kappa$, 如下定义 $f_\alpha : [A - (\alpha+1)]^k \to 2$ ：对于 $x \in [A - (\alpha+1)]^k$, 令

$$f_\alpha(x) = f(\{\alpha\} \cup x).$$

根据归纳假设, f_α 在 $\mathscr{U} \ni A_\alpha \subset A - (\alpha+1)$ 的全体 k-元单增子集的集合 $[A_\alpha]^k$ 上取常值 i_α.

应用 $\mathscr{U}$ 的正规性, 令

$$B = \Delta_{\alpha<\kappa} A_\alpha \in \mathscr{U}.$$

令 $B_0 = \{\gamma \in B \mid i_\gamma = 0\}$ 以及 $B_1 = \{\gamma \in B \mid i_\gamma = 1\}$. 这两个集合中必有一个且只有一个在 $\mathscr{U}$ 之中. 令 B_ϵ 为这样的一个集合.

设 $\{\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k\} \subset B_\epsilon$. 那么

$$f(\{\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = f_{\gamma_0}(\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = i_{\gamma_0} = \epsilon.$$

所以, $f[[B_\epsilon]^{k+1}] = \{\epsilon\}$.

设 $A \in \mathscr{U}$, 以及 $f : [A]^{<\omega} \to 2$. 根据上面的事实, 对于每一个 $n \in \omega$, 令 $H_n \in \mathscr{U}$ 见证 $H_n \subset A$ 以及 $|f[[H_n]^{n+1}]| = 1$. 令

$$H = \bigcap_{n<\omega} H_n.$$

那么, $H \in \mathscr{U}$ 以及 $\forall n < \omega\ |f[[H]^n]| = 1$. □

定理 1.7 如果 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子, 那么

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{是一个拉姆齐基数}\} \in \mathscr{U}.$$

证明 令 $\mathrm{ult}\,(\mathscr{H}_{\kappa^+}, \mathscr{U})$ 为 $\mathscr{H}_{\kappa^+}$ 在 $\mathscr{U}$ 之上的超幂.

令 $\pi : \mathrm{ult}\,(\mathscr{H}_{\kappa^+}, \mathscr{U}) \to (M, \in)$ 为超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathscr{H}_{\kappa^+}, \mathscr{U})$ 的传递化映射. 我们来验证 $(M, \in) \models \kappa$ 是一个拉姆齐基数.

为此, 设 $f \in M$ 为一个函数 $f : [\kappa]^{<\omega} \to 2$. 由于 $\mathfrak{P}(\kappa) \subset M$, $f \in \mathscr{H}_{\kappa^+}$, 根据定理 1.6, 令 $H \in \mathscr{H}_{\kappa^+}$ 为 f 的齐一子集. 那么 $H \in M$, 并且

$$(M, \in) \models H \text{是} f \text{的一个齐一子集}.$$

这就表明: $(M, \in) \models \kappa$ 是一个拉姆齐基数. 因此,

$$\mathrm{ult}\,(\mathscr{H}_{\kappa^+}, \mathscr{U}) \models [\mathrm{Id}] \text{是一个拉姆齐基数}.$$

根据 Łoś 定理 (定理 1.4), 必有

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{是一个拉姆齐基数}\} \in \mathscr{U}.$$ □

现在我们将传递集合上的超幂定义 (定义 1.2) 推广为集合论论域 V 的超幂定义.

定义 1.4 (超幂) 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{V}$ 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 对于定义在 κ 上的任意两个函数 f 和 g, 定义

$$f =^* g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{V},$$

并令

$$[f] = \left\{ g \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} g \text{是一函数} \wedge \mathrm{dom}(g) = \kappa \wedge g =^* f \wedge \\ \forall h\,((\mathrm{dom}(h) = \kappa \wedge h =^* f) \to \mathrm{RK}(g) \leqslant \mathrm{RK}(h)) \end{array} \right) \right\},$$

以及

$$\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{V} = \{[f] \mid f \text{是一个函数, 并且} \mathrm{dom}(f) = \kappa\}.$$

再定义

$$[f] \in^* [g] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in \mathscr{V}.$$

令 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{V}) = (V^\kappa/\mathscr{V}, \in^*)$, 并且称 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{V})$ 为 $(\mathrm{V}, \in)$ 在超滤子 $\mathscr{V}$ 上的**超幂**.

与传递集合的超幂略有不同的地方就在于一个函数的等价类一般来说不是一个集合. 所以, 我们需要确保集合论论域上的超幂定义是合理的, 关键就在于每一个等价类都必须是一个集合, 而不是一个真类.

引理 1.2　给定一个定义在 κ 上的函数 f, 下述定义确定一个非空集合:

$$\left\{ g \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} g \text{ 是一函数} \wedge \mathrm{dom}(g) = \kappa \wedge g =^* f \wedge \\ \forall h \,((\mathrm{dom}(h) = \kappa \wedge h =^* f) \to \mathrm{RK}(g) \leqslant \mathrm{RK}(h)) \end{array} \right) \right\}.$$

证明　给定函数 f, 令 $\alpha = \mathrm{RK}(f)$. 那么 $f \in \mathrm{V}_{\alpha+1}$. 所以 $f \subset \mathrm{V}_\alpha$. 因为 $\kappa = \mathrm{dom}(f)$, $\kappa \leqslant \alpha$. 于是, $f \in \mathrm{V}_\alpha^\kappa$. 如果 $g \in \mathrm{V}_\alpha^\kappa$, 那么 $g \subset \mathrm{V}_\alpha$, 从而 $\mathrm{RK}(g) \leqslant \alpha$. 如果 h 是一个定义在 κ 上的函数, 并且 $\mathrm{RK}(h) \leqslant \alpha$, 那么 $h \in \mathrm{V}_\alpha^\kappa$.

由此, $A_f = \{g \in \mathrm{V}_{\alpha+1} \mid g =^* f\}$ 是一个非空集合, 并且

$$B_f = \{g \in A_f \mid \forall h \in \mathrm{V}_\alpha^\kappa \,(h =^* f \to \mathrm{RK}(g) \leqslant \mathrm{RK}(h))\}$$

也是一个非空集合. 现在我们断言 $B_f = [f]$. 只需验证 $B_f \subseteq [f]$. 给定 $g \in B_f$. 设 h 是一个定义在 κ 上的函数, 并且 $h =^* f$. 如果 $\mathrm{RK}(h) > \alpha$, 那么 $\mathrm{RK}(g) < \mathrm{RK}(h)$; 如果 $\mathrm{RK}(h) \leqslant \alpha$, 那么 $h \in \mathrm{V}_\alpha^\kappa$, 所以, $\mathrm{RK}(g) \leqslant \mathrm{RK}(h)$. 这就表明 $g \in [f]$. □

这就夯实了我们的 “等价类” $[f]$ 定义的基础. 需要注意的一点是此时我们得到的并非真正意义上的等价类, 因为 f 自身未必在 $[f]$ 之中. 下面的引理给出必要的解释.

引理 1.3　设 f 和 h 是定义在 κ 上的两个函数. 那么

$$f =^* h \iff [f] = [h].$$

证明　假设 $f =^* h$. 设 $g \in [f]$. 那么 $\mathrm{RK}(h) \geqslant \mathrm{RK}(g)$, 并且 $h =^* g$; 如果 k 是一个定义在 κ 上的函数, 并且 $k =^* h$, 那么 $k =^* f$, 以及 $\mathrm{RK}(g) \leqslant \mathrm{RK}(k)$. 这就表明 $g \in [h]$. 由对称性得知 $[h] \subseteq [f]$. 所以 $[f] = [h]$.

假设 $[f] = [h]$. 由于它们非空, 令 $g \in [f]$. 那么 $g \in [h]$. 从而 $f =^* g =^* h$. 于是, $f =^* h$. □

还有一个问题我们需要解决：$\in^*$ 的定义是毫无歧义的. 这种保证由下面的引理提供.

引理 1.4　设 f_1, f_2, h_1, h_2 是定义在 κ 上的函数. 如果 $f_1 =^* f_2$ 以及 $h_1 =^* h_2$, 那么

$$[f_1] \in^* [h_1] \iff [f_2] \in^* [h_2].$$

证明　假设 $f_1 =^* f_2$ 以及 $h_1 =^* h_2$, 并且 $[f_1] \in^* [h_1]$. 我们来证明 $[f_2] \in^* [h_2]$. 根据定义和假设, 我们有

$$\begin{array}{l} \{\alpha < \kappa \mid f_1(\alpha) = f_2(\alpha)\} \in \mathscr{U} \wedge \\ \{\alpha < \kappa \mid h_1(\alpha) = h_2(\alpha)\} \in \mathscr{U} \wedge \\ \{\alpha < \kappa \mid f_1(\alpha) \in h_1(\alpha)\} \in \mathscr{U}. \end{array}$$

于是,

$$\{\alpha<\kappa \mid f_2(\alpha)=f_1(\alpha)\in h_1(\alpha)=h_2(\alpha)\}\in \mathscr{U}.$$

也就是说, $[f_2]\in^* [h_2]$. □

引理 1.5 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{V}$ 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 那么

(1) $\in^*$ 是 $\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{V}$ 上的一个自同一的有秩关系;

(2) 存在唯一的传递类 M 以及传递化映射 $\pi:\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathscr{V})\cong(M,\in)$.

证明 (1) 的证明与引理 1.1 的证明完全相同.

(2) 应用集合上的自同一有秩关系的传递化证明思想: 对于任意的 $[f]\in \mathrm{V}^\kappa/\mathscr{V}$, 令

$$\pi([f])=\{\pi([g])\mid [g]\in^* [f]\}.$$

再令 $M=\{\pi([f])\mid [f]\in \mathrm{V}^\kappa/\mathscr{V}\}$. 那么, M 是一个传递类, 并且

$$\pi:(\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{V},\in^*)\cong(M,\in).$$ □

与集合上的超幂具有 Łoś 定理完全一样, 我们有下述超幂基本定理.

定理 1.8 (Łoś 超幂基本定理) 设 κ 为一个无穷基数, $\mathscr{V}$ 是 κ 上的一个超滤子. 那么对于集合论纯语言的任意一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1,\cdots,v_n)$, 以及任意一组定义在 κ 上的函数 $f_1,\cdots,f_n$, 都有

$$\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathscr{V})\models\varphi\left[[f_1],\cdots,[f_n]\right]\iff\{\alpha<\kappa\mid\varphi\left[f_1(\alpha),\cdots,f_n(\alpha)\right]\}\in\mathscr{V}.$$

这个基本定理的证明与前面的 Łoś 定理的证明完全相同.

现在我们将定理 1.5 自然地转化成 V 的超幂上来, 并且它的证明也是一样的.

定理 1.9 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个正规超滤子. 令 $(M,\in)$ 为与 V 的超幂

$$(\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{U},\in^*)$$

同构的传递类. 令

$$\pi:(\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{U},\in^*)\to(M,\in)$$

为传递化映射; 令 $i:\mathrm{V}\to\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{U}$ 为自然嵌入:

$$\mathrm{V}\ni x\mapsto i(x)=[\{(\alpha,x)\mid\alpha\in\kappa\}]\in\mathrm{V}^\kappa/\mathscr{U},$$

以及令 $j=\pi\circ i:\mathrm{V}\to M$. 那么,

(1) $j(\kappa)>\kappa$, 并且 $\forall\alpha<\kappa\,(j(\alpha)=\alpha)$.

(2) 对于任意的 $A \subseteq \kappa$, 都有

$$A \in \mathscr{U} \leftrightarrow \kappa \in j(A).$$

(3) 如果 $f : \kappa \to M$, 那么 $\exists g \in \mathrm{V}^\kappa (\forall \alpha < \kappa (j(g)(\alpha) = f(\alpha)))$; 也就是说, $M^\kappa \subset M$.

(4) $M = \{j(f)(\kappa) \mid f \in \mathrm{V}^\kappa\}$.

(5) $j : \mathrm{V} \to M$ 是一个同质嵌入映射, 即对于集合论纯语言的任意一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$, 以及任意的 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathrm{V}^n$, 都有

$$\varphi[a_1, \cdots, a_n] \iff (M, \in) \models \varphi\left[j(a_1), \cdots, j(a_n)\right].$$

下面的命题揭示了论域超幂所具有的全局性质.

命题 1.1 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个正规超滤子. 令 $(M, \in)$ 为与 V 的超幂

$$(\mathrm{V}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*)$$

同构的传递类. $j : \mathrm{V} \to M$ 为超幂所诱导的同质嵌入映射. 那么

(1) $\mathscr{U} \notin M$;

(2) $2^\kappa \leqslant (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$;

(3) 如果 λ 是一个极限序数, 那么

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa \to j(\lambda) > \sup\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}] \\
&\wedge \\
&(\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa \to j(\lambda) = \sup\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\});
\end{aligned}$$

(4) 如果 λ 是一个强极限基数, 并且 $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$, 那么 $j(\lambda) = \lambda$.

证明 (1) 假设不然. 若 $\mathscr{U} \in M$. 考虑从 κ^κ 到 $j(\kappa)$ 的映射 $e(f) = \pi([f])$. 由于 $\kappa^\kappa \in M$, $\mathscr{U} \in M$, 映射 $e \in M$, 并且 $(M, \in) \models e$ 是一个从 κ^κ 到 $j(\kappa)$ 的满射. 这就意味着 $(M, \in) \models |j(\kappa)| \leqslant 2^\kappa$. 可是, $(M, \in) \models \kappa < j(\kappa)$ 并且 $j(\kappa)$ 是不可达基数. 这便是一个矛盾.

(2) 因为 $\mathfrak{P}(\kappa) = (\mathfrak{P}(\kappa))^M$ 以及 $M \subset \mathrm{V}$, 所以 $2^\kappa \leqslant (2^\kappa)^M$; 由于 $j(\kappa)$ 是 M 中的不可达基数, $\kappa < j(\kappa)$, 所以 $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$; 由于 $j(\kappa)$ 中的每一个序数都来自于一个 κ^κ 中的元素, 所以在 V 中, $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

(3) 设 $\mathrm{cf}(\lambda) = \kappa$. 令 $f = \langle \alpha_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ 为一个收敛于 λ 的单调递增连续序列. 那么, 对于每一个 $\xi < \kappa$, $j(\alpha_\xi) < \pi([f])$; 并且 $\pi([f]) < j(\lambda)$.

设 $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$. 那么每一个 $f : \kappa \to \lambda$ 都在 λ 中有界, 从而存在 $\alpha < \lambda$ 来见证 $\pi([f]) < j(\alpha)$. 因此所要的等式成立.

设 $\gamma = \mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$. 令 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ 为一个收敛于 λ 的单调递增连续序列. 对于每一个 $f : \kappa \to \lambda$, 一定存在一个 $\xi < \gamma$ 来见证

$$\{\beta < \kappa \mid f(\beta) < \alpha_\xi\} \in \mathscr{U}.$$

因为 $\mathscr{U}$ 是一个 κ-完全的超滤子. 于是, 存在一个 $\xi < \gamma$ 来实现 $\pi([f]) < j(\alpha_\xi)$. 于是, 所要的等式成立.

(4) 设 λ 是一个强极限基数, 并且 $\mathrm{cf}(\lambda) \neq \kappa$. 固定一个序数 $\alpha < \lambda$. 序数 $j(\alpha)$ 中的序数都由从 κ 到 α 的函数所表示. 因此, $|j(\alpha)| \leqslant |\alpha^\kappa| < \lambda$. 根据 (3), 我们就有

$$j(\lambda) = \sup\{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} = \lambda. \qquad \square$$

应用超幂构造, 我们可以明确存在可测基数的集合论论域必然不同于哥德尔可构造集内模型. 下面的斯卡特 (Dana Scott)[1]定理明确了这一点.

定理 1.10 (Scott) 如果存在一个可测基数, 那么 $\mathrm{V} \neq L$.

证明 假设 $\mathrm{V} = L$ 以及存在一个可测基数. 令 κ 为可测基数, $\mathscr{U}$ 为 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 $j : \mathrm{V} \to M$ 为超滤子 $\mathscr{U}$ 所诱导出来的同质嵌入映射.

由于 $\mathrm{V} = L$, 唯一的内模型 $M = L = \mathrm{V}$. 根据前面的命题 1.1, $\mathscr{U} \notin M$. 可是 $\mathscr{U} \in \mathrm{V} = M$. 这就是一个矛盾. $\square$

由可测基数上的正规超滤子所给出的超幂以及自然的嵌入映射为我们提供了一个崭新的概念: 同质嵌入映射.

定义 1.5 一个从集合论论域 V 到它的一个传递内模型 M 的映射 $j : \mathrm{V} \to M$ 是一个**同质嵌入映射**, 记成 $j : \mathrm{V} \prec M$, 当且仅当

(1) $\exists \kappa \in \mathrm{Ord}\,(\kappa < j(\kappa))$;

(2) 如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $a_1, \cdots, a_n$ 是论域中的集合, 那么

$$\varphi[a_1, \cdots, a_n] \iff (M, \in) \models \varphi[j(a_1), \cdots, j(a_n)].$$

对于一个同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 而言, 定义它的**临界点**(或者**关键点**) 为满足不等式 $\alpha < j(\alpha)$ 的最小序数, 并将其记成 $\mathrm{Crit}(j)$.

比如, 定理 1.9 中的 (1) 就表明如果 κ 是可测基数, $\mathscr{U}$ 是它上面的非平凡的 κ-完全的正规超滤子, $j : \mathrm{V} \prec M$ 是由 $\mathscr{U}$ 诱导出来的同质嵌入映射, 那么 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 就是 j 的临界点.

---

1 Dana S. Scott, Measurable cardinals and constructible sets. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 1961, 9: 521-524.

一个自然的问题就是：可测基数的存在性是否为 (非平凡) 同质嵌入映射的不必要条件？下面的引理表明任何一个非平凡的同质嵌入映射的临界点都是一个可测基数.

引理 1.6 设 $j : \mathrm{V} \prec M$ 是一个同质嵌入映射, $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 为 j 的临界点. 令

$$\mathscr{U} = \{A \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(A)\}.$$

那么 κ 是一个可测基数, 并且 $\mathscr{U}$ 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令

$$j_{\mathscr{U}} : \mathrm{V} \to N \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$$

为由超滤子 $\mathscr{U}$ 诱导出来的超幂同质嵌入映射. 那么存在唯一的从 N 到 M 的同质映射 k 来实现交换图 $j = k \circ j_{\mathscr{U}}$.

证明 令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$. 由于 $\forall n \in \omega\,(j(n) = n)$, 以及 $j(\omega) = \omega$, 我们必有 $\kappa > \omega$.

事实(1) κ 一定是一个基数.

假设不然. 令 $\gamma = |\kappa| < \kappa$, 以及 $f : \gamma \to \kappa$ 为一个双射. 那么, 根据 j 的同质嵌入特性,

$$(M, \in) \models j(f) : j(\gamma) \to j(\kappa)\ \text{是一个双射}.$$

由于 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $\forall \alpha < \kappa\,(j(\alpha) = \alpha)$, 所以, $j(\gamma) = \gamma$, 并且

$$\forall \alpha < \gamma\,(j(f)(\alpha) = j(f)(j(\alpha)) = j(f(\alpha)) = f(\alpha)).$$

这表明 $j(f) = f$. 因此, $\kappa \notin \mathrm{rng}(f) = \mathrm{rng}(j(f))$. 这与 $\kappa < j(\kappa)$ 和 $\kappa \in \mathrm{rng}(j(f))$ 相矛盾.

事实(2) κ 是一个正则基数.

假设不然. 令 $\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ 以及 $\langle \beta_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ 为收敛于 κ 的单调递增连续序列. 那么

$$(M, \in) \models j\,(\langle \beta_\xi \mid \xi < \gamma \rangle)\ \text{是收敛于}\ j(\kappa)\ \text{的单调递增连续序列}.$$

可是, $j(\gamma) = \gamma$, 对于每一个 $\xi < \gamma$, $j(\beta_\xi) = \beta_\xi$. 也就是说,

$$j\,(\langle \beta_\xi \mid \xi < \gamma \rangle) = \langle \beta_\xi \mid \xi < \gamma \rangle.$$

这又是一个矛盾, 因为 $\kappa < j(\kappa)$, “序列在 $j(\kappa)$ 中无界” 是一个关于 M 绝对不变的性质.

事实(3) κ 是一个可测基数.

我们需要在 κ 上找到一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 为此, 定义 $D \subset \mathfrak{P}(\kappa)$ 如下：对于 $A \subseteq \kappa$, 令

$$A \in D \iff \kappa \in j(A).$$

我们来验证 D 就是所要的超滤子. 这由下述命题 (a)—(d) 的验证来完成.

(a) D 是一个超滤子. 首先, $\kappa \in D$, 因为 $\kappa \in j(\kappa)$; $\varnothing \notin D$, 因为 $\kappa \notin j(\varnothing)$. 其次, 如果 $A, B \in D$, 那么 $\kappa \in j(A)$ 以及 $\kappa \in j(B)$, 从而 $\kappa \in j(A) \cap j(B) = j(A \cap B)$, 因此 $A \cap B \in D$. 如果 $A \in D$ 以及 $A \subseteq B \subseteq \kappa$, 那么自然地有 $\kappa \in j(A) \subseteq j(B)$, 从而 $B \in D$. 这些表明 D 是 κ 上的一个滤子. 给定 $X \subseteq \kappa$, 或者 $\kappa \in j(X)$, 或者 $\kappa \in j(\kappa - X) = j(\kappa) - j(X)$, 二者必居其一, 也只有一种情形成立. 于是, D 是一个超滤子.

(b) D 非平凡. 因为对于任何 $\alpha < \kappa$, $\kappa \in j(\kappa - \alpha) = j(\kappa) - j(\alpha) = j(\kappa) - \alpha$, 所以, $(\kappa - \alpha) \in D$.

(c) D 是 κ-完全的. 设 $\gamma < \kappa$ 以及 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ 为一个长度为 γ 的序列, 并且每一个 $X_\alpha \in D$. 那么,

$$j\left(\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle\right) = \langle j\left(X_\alpha\right) \mid \alpha < \gamma \rangle .$$

因为 $j(\gamma) = \gamma$, 以及 $\forall \alpha < \gamma\, (j(\alpha) = \alpha)$. 由于 $\forall \alpha < \gamma\ (\kappa \in j\left(X_\alpha\right))$, 我们得到

$$\kappa \in \bigcap_{\alpha < \gamma} j\left(X_\alpha\right) = j\left(\bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right).$$

因此, $\left(\bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha\right) \in D$.

(d) D 是一个正规超滤子. 设 $A \in D$, $f : A \to \kappa$ 为一个选择函数. 那么

$$(M, \in) \models (\kappa \in j(A)\ \wedge\ j(f) : j(A) \to j(\kappa)\ \wedge\ \forall \alpha \in j(A)\, (j(f)(\alpha) \in \alpha)).$$

令 $\gamma = j(f)(\kappa)$. 那么, $\gamma < \kappa$. 令 $B = \{\alpha \in A \mid f(\alpha) = \gamma\}$. 那么

$$j(B) = \{\alpha \in j(A) \mid j(f)(\alpha) = j(\gamma)\} = \{\alpha \in j(A) \mid j(f)(\alpha) = j(\gamma) = \gamma\}.$$

由于 $\kappa \in j(A)$, 并且 $\gamma = j(f)(\kappa)$, 所以, $\kappa \in j(B)$. 这就表明 $B \in D$, f 在 B 上取常值 γ.

综上所证, 引理中定义的 $\mathscr{U} = \{A \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(A)\}$ 的确是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子.

现在令 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 为 V 的经 $\mathscr{U}$ 确定的超幂, 令 $j_{\mathscr{U}} : \mathrm{V} \to \mathbb{N} \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 为超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 所确定的同质嵌入映射. 我们来证明存在唯一的从 N 到 M 的同质嵌入映射 $k : N \to M$ 来实现交换图 $j = k \circ j_{\mathscr{U}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{j} & M \\ \downarrow j_{\mathscr{U}} & \nearrow_{k} & \\ N & & \end{array}$$

映射 k 的定义其实很自然：对于 $f \in \mathrm{V}^\kappa$, $\pi([f])$ 是超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 中的 $[f]$ 在 N 中的传递化像, 所以, 就令

$$k(\pi([f])) = j(f)(\kappa).$$

由于 $N = \{\pi([f]) \mid f \in \mathrm{V}^\kappa\}$, 如果 k 的定义是毫无歧义的, 那么 k 便在 N 上处处有定义. 而 k 的定义的确是毫无歧义的. 因为任意给定两个定义在 κ 上的函数 f 和 g, 在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 的定义中,

$$\begin{aligned}
[f] = [g] &\iff f =^* g \\
&\iff \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathscr{U} \\
&\iff \kappa \in j\left(\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}\right) = \{\alpha < j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\alpha)\} \\
&\iff j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa).
\end{aligned}$$

接下来, 我们先验证等式 $j = k \circ j_{\mathscr{U}}$：任给 $a \in \mathrm{V}$, 令 $c_a = \{(\alpha, a) \mid \alpha \in \kappa\}$ 为定义在 κ 上取常值 a 的函数, 根据自然嵌入映射 $i_{\mathscr{U}}$ 的定义以及嵌入映射 $j_{\mathscr{U}}$ 的定义,

$$i_{\mathscr{U}}(a) = [c_a] \ \wedge \ j_{\mathscr{U}}(a) = \pi([c_a]) = \pi\left(i_{\mathscr{U}}(a)\right).$$

于是, $k\left(j_{\mathscr{U}}(a)\right) = k\left(\pi\left([c_a]\right)\right) = j\left(c_a\right)(\kappa) = j(a)$.

剩下的工作是验证 $k : N \to M$ 是一个同质嵌入映射. 设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为定义在 κ 上的函数. 根据超幂基本定理 (定理 1.8),

$$\begin{aligned}
&(N, \in) \models \varphi[\pi([f_1]), \cdots, \pi([f_n])] \\
\iff &\{\alpha < \kappa \mid \varphi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in \mathscr{U} \\
\iff &\kappa \in j\left(\{\alpha < \kappa \mid \varphi[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\}\right) \\
\iff &(M, \in) \models \varphi[j(f_1)(\kappa), \cdots, j(f_n)(\kappa)].
\end{aligned}$$

所以

$$(N, \in) \models \varphi[\pi([f_1]), \cdots, \pi([f_n])] \iff (M, \in) \models \varphi[k(\pi([f_1])), \cdots, k(\pi([f_n]))]. \quad \square$$

推论 1.1　如果存在一个 (非平凡) 同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$, 那么 $\mathrm{V} \neq L$, 并且 $M \neq L$.

证明　设 $j : \mathrm{V} \to M$ 为一个非平凡的同质嵌入映射. 根据上面的引理 1.6, j 的临界点 κ 是一个可测基数. 根据前面的斯卡特定理 (定理 1.10), $\mathrm{V} \neq L$. 由于 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 在 V 中是一个可测基数, $j(\kappa)$ 在 M 中就是一个可测基数. 在 M 中应用斯卡特定理 (定理 1.10) 就得知 $M \neq L$. □

由此产生一个自然的问题：M 是否可以等于 V? 库能 (Kenneth Kunen)[2] 指出在选择公理的宇宙之中 M 不可能等于 V.

定理 1.11 (Kunen) 如果 $j : V \prec M$ 为一个非平凡的同质嵌入映射, 那么 $M \neq V$.

证明 设 $j : V \prec M$. 假设 $M = V$. 我们来寻找一个矛盾.

令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 以及 $\lambda = \sup(\{j^n(\kappa) \mid n < \omega\})$, 其中

$$j^0(\kappa) = \kappa,\ j^1(\kappa) = j(\kappa),\ j^{n+1}(\kappa) = j\left(j^n(\kappa)\right).$$

那么 $j(\lambda) = \lambda$, $\lambda^+ \leqslant j(\lambda^+) = (\lambda^+)^M \leqslant \lambda^+$.

根据荟萃集分裂定理 (定理 I.2.30), λ^+ 上的荟萃子集

$$E = \mathcal{C}_\omega\left(\lambda^+\right) = \{\alpha < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$$

是 λ^+ 个彼此互不相交的荟萃子集的并. 令 $F : \kappa \to \mathfrak{P}(\lambda^+)$ 为一个满足下述要求的函数:

(i) $\forall \alpha < \kappa\, (F(\alpha) \subset E)$ 是 λ^+ 上的一个荟萃集;

(ii) $\forall \alpha < \beta < \kappa\, (F(\alpha) \cap F(\beta) = \varnothing)$;

(iii) $E = \bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$.

由于 j 是同质嵌入映射, $j(F) : j(\kappa) \to \mathfrak{P}(j(\lambda^+)) = \mathfrak{P}(\lambda^+)$ 具备下述性质:

(i) $\forall \alpha < j(\kappa)\, (j(F)(\alpha) \subset j(E))$ 是 λ^+ 上的一个荟萃集;

(ii) $\forall \alpha < \beta < j(\kappa)\, (j(F)(\alpha) \cap j(F)(\beta) = \varnothing)$;

(iii) $j(E) = \bigcup\{j(F)(\alpha) \mid \alpha < j(\kappa)\}$.

尤其是, $j(F)(\kappa) \subset \{\alpha < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\} = E$, 并且 $j(F)(\kappa)$ 是 λ^+ 的一个 (在 $M = V$ 中的) 荟萃子集. 因为

$$j(F)(\kappa) = \bigcup_{\alpha<\kappa} \left(j(F)(\kappa) \cap F(\alpha)\right),$$

以及 λ^+ 上的非荟萃集理想是 λ^+-完全的, 必然存在一个 $\alpha < \kappa$ 来见证交集 $j(F)(\kappa) \cap F(\alpha)$ 也是 λ^+ 上的一个荟萃子集. 令 $\alpha_0 < \kappa$ 为满足这一要求的最小序数.

令 $C = \{\xi < \lambda^+ \mid j(\xi) = \xi \wedge \mathrm{cf}(\xi) = \omega\}$. 此 C 在 λ^+ 中是一个无界子集, 并且它是一个 ω-闭子集, 即如果 $\alpha < \lambda^+$, $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, $C \cap \alpha$ 在 α 中无界, 那么 $\alpha \in C$. 于是

$$C \cap j(F)(\kappa) \cap F(\alpha_0) \neq \varnothing.$$

令 $\xi_0 = \min\left(C \cap j(F)(\kappa) \cap F(\alpha_0)\right)$. 我们就有

$$\xi_0 = j(\xi_0) \in j\left(F(\alpha_0)\right) = j(F)\left(j(\alpha_0)\right) = j(F)(\alpha_0),$$

2 Kenneth Kunen, Elementary embeddings and infinitary combinatorics. Journal of Symbolic Logic, 1971, 36: 407-413.

以及 $\xi_0 \in j(F)(\kappa)$. 可是, $j(F)(\alpha_0) \cap j(F)(\kappa) = \varnothing$. 这就是一个矛盾. □

库能定理的证明需要选择公理. 那么一个自然的迄今为止依旧悬而未决的公开问题如下:

问题 1.1 (公开问题) 如果选择公理在 V 中不成立, 是否有可能存在非平凡的 $j : \mathrm{V} \prec \mathrm{V}$? 换一种说法, 是否在集合理论 ZF 中证明不可能有非平凡的 $j : \mathrm{V} \prec \mathrm{V}$?

1.1.2 $0^{\#}$

在前面小节中, 我们知道, 如果 $j : \mathrm{V} \prec M$, 那么 $\mathrm{V} \neq L \neq M \neq V$. 由此看来, 下面的引理就别具一番风味.

引理 1.7 如果 $j : \mathrm{V} \prec M$, 那么 $j\restriction_L : L \prec L$.

证明 设 $j : \mathrm{V} \prec M$. 根据 L 的定义以及 j 的同质嵌入特性就有

$$\forall x \in L\ \left(j(x) \in L^M\right).$$

根据最小内模型定理 (定理 II.2.8), $L^M = L$. 所以,

$$\forall x \in L\,(j(x) \in L).$$

□

自然, 我们知道 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 在 L 中不会是可测基数; 后面我们会看到在 L 中它甚至连拉姆齐基数都不是. 那么, 它在 L 中具有什么样的特性? 比如, 在 L 中它也是一个弱紧基数, 因为基数的弱紧性质在 L 中会被继承下来 (见定理 II.2.16).

现在我们就来分析命题 "存在非平凡的 $j : L \prec L$" 对我们而言究竟意味着什么.

可定义斯科伦函数

同质嵌入映射的基本特点是这种映射保持所有的一阶性质. 直接与一阶性质相关的一种函数是斯科伦函数. 在模型论概要 II.1.2.2 小节, 我们引入了一个结构的斯科伦函数以及完备斯科伦函数集合的概念 (见定义 II.1.38 以及定义 II.1.39). 这里我们很自然地将关注 L 上的可定义斯科伦函数. 这是因为我们知道, 根据哥德尔定理 (定理 II.2.9), 在 L 中存在一个 Σ_1-可定义的秩序 $<_L$. 现在应用这个秩序以及这个秩序的简单可定义性, 我们为所有的以不可数基数为模型高度的模型 $(L_\lambda, \in)$ 引进可一致定义的斯科伦函数, 从而它们的同质子模型就会事实上由这样的斯科伦函数在一些序数集合上作用而得到, 并且这样的斯科伦函数与同质嵌入映射有很好的可交换性.

令 $\Theta(v_0, v_1)$ 为集合论纯语言的一个彰显两个自由变元的 Σ_1 表达式, 并且此表达式在 L 上引进 L 的秩序 $<_L$, 以至于对于任意的极限序数 $\alpha > \omega$ 以及任意的 $x, y \in L_\alpha$, 都有

$$x <_L y \leftrightarrow (L_\alpha, \in) \models \Theta[x, y].$$

定义 1.6 (典型斯科伦项) 设 $\varphi(v_0, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 定义**适合表达式** φ **的典型斯科伦项** t_φ 如下:

$$t_\varphi(v_1, \cdots, v_n) = v_0 \leftrightarrow \\ \left(\begin{array}{l} ((\forall v_{n+2}\ (\neg\varphi(v_{n+2}, v_1, \cdots, v_n))) \wedge v_0 = \varnothing) \vee \\ (\varphi(v_0, v_1, \cdots, v_n) \wedge (\forall v_{n+1}\ (\Theta(v_{n+1}, v_0) \to (\neg\varphi(v_{n+1}, v_1, \cdots, v_n))))) \end{array} \right).$$

称一个项 t 为一个**斯科伦项**当且仅当 t 是一个适合某一个表达式 φ 的典型斯科伦项.

这些斯科伦项对具备由 Θ 所定义的一个秩序的结构 $\mathcal{M} = (M, E)$ 而言有着自然的解释 $t_\varphi^{\mathcal{M}}$ (一个定义在论域 M 上的斯科伦函数): $t_\varphi^{\mathcal{M}}(x_1, \cdots, x_n)$ 就是当存在某个 y 满足

$$\mathcal{M} \models \varphi[y, x_1, \cdots, x_n]$$

时, 在由 Θ 所定义的秩序之下满足这一要求的最小的 y. 于是, 在这样的情形下, 结构 $\mathcal{M} = (M, E)$ 的增添结构

$$\left(M, E, t_\varphi^{\mathcal{M}}\right)_\varphi$$

就是一个携带斯科伦函数的结构, 并且由于可定义性, 这些典型斯科伦函数的集合

$$\left\{t_\varphi^{\mathcal{M}} \mid \varphi\text{是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式}\right\}$$

是一个关于函数合成封闭的集合, 因而这些斯科伦函数组成一个斯科伦函数的完备集合 (见定义 II.1.39). 于是, 任意给定 $X \subseteq M$, 由 X 所生成的斯科伦闭包 $\mathcal{SH}(X)$ 的论域就是如下集合:

$$\left\{t_\varphi^{\mathcal{M}}(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in X \wedge \varphi\text{是集合论纯语言的表达式}\right\}.$$

尤其当 $\alpha > \omega$ 是一个极限序数时, 增添模型 $\left(L_\alpha, \in, t_\varphi^{L_\alpha}\right)_\varphi$ 就是一个携带完备典型斯科伦函数集合的模型, 并且根据这些典型斯科伦函数的定义, 我们立即得到如下同质嵌入映射与典型斯科伦函数的可交换性引理:

引理 1.8 设 $j: L \prec L$ 为一个非平凡的同质嵌入映射, $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $\alpha > \kappa$ 为一个极限基数. 令 $k = j\restriction_{L_\alpha}$. 那么

$$k: \left(L_\alpha, \in, t_\varphi^{L_\alpha}\right)_\varphi \prec \left(L_{j(\alpha)}, \in, t_\varphi^{L_{j(\alpha)}}\right)_\varphi.$$

更一般地, 设 $\omega < \alpha < \beta$ 为极限序数; 设 $k: L_\alpha \prec L_\beta$ 为一个非平凡的同质嵌入映射; 设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 那么, 对于任意的 $a_1, \cdots, a_n \in L_\alpha$,

$$t_\varphi^{L_\beta}(k(a_1), \cdots, k(a_n)) = k\left(t_\varphi^{L_\alpha}(a_1, \cdots, a_n)\right).$$

从而, 在增添关于典型斯科伦项符号的语言环境下, 同质映射 k 在增添模型中依旧是一个同质映射.

L-超滤子与 L-超幂

当然, 如果 $j: L \prec L$ 存在, j 便不能是 L 的一个可以在 L 中定义出来的类. 也就是说任何这样的映射对于 L 而言都完全是外部的事物. 为了阐明这一点, 让我们引进下述概念.

定义 1.7 (M-超滤子)　设 M 为集合理论 ZFC 的一个传递模型. 设 $\kappa \in M$ 是 M 中的一个无穷基数.

(1) $D \subset (\mathfrak{P}(\kappa))^M$ 被称为 κ 上的一个 M-**超滤子**当且仅当它是布尔代数 $(\mathfrak{P}(\kappa))^M$ 上的一个超滤子. 明确地讲, $D \subset (\mathfrak{P}(\kappa))^M$ 被称为 κ 上的一个 M-超滤子当且仅当 D 具备下述性质:

(a) $\kappa \in D$ 以及 $\varnothing \notin D$;

(b) 如果 $X \in D$, $Y \in D$, 那么 $X \cap Y \in D$;

(c) 如果 $X \in D$, $Y \in M$, 并且 $X \subseteq Y \subseteq \kappa$, 那么 $Y \in D$;

(d) 对于任意的 $X \subseteq \kappa$ 而言, 如果 $X \in M$, 那么或者 $X \in D$, 或者 $(\kappa - X) \in D$, 二者必居其一.

(2) κ 上的 M-超滤子 D 是非平凡的当且仅当 $([\kappa]^{<\kappa})^M \cap D = \varnothing$.

(3) κ 上的 M-超滤子 D 是 κ-**完全**的当且仅当如果 $\alpha < \kappa$, $\langle X_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \in M \cap D^\alpha$, 那么 $\bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi \in D$.

(4) κ 上的 M-超滤子 D 是**正规**的当且仅当如果 $f \in M$ 是定义在某个 $X \in D$ 上的选择函数, 那么 f 一定在某个 $Y \in D$ 上取常值.

引理 1.9　(1) 设 $j: L \prec L$ 非平凡. 令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$. 令

$$D = \{X \subseteq \kappa \mid X \in L \wedge \kappa \in j(X)\}.$$

那么 κ 在 L 中是一个不可数的正则基数; D 是一个非平凡的 κ-完全的正规的 L-超滤子.

(2) 设 M 和 N 是 ZFC 的传递模型, 并且设 $j: M \prec N$ 非平凡. 令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$.

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid X \in M \wedge \kappa \in j(X)\}.$$

那么 κ 在 M 中是一个不可数的正则基数; U 是一个非平凡的 κ-完全的正规的 M-超滤子.

证明　(1) 只是 (2) 的一个特例. 而 (2) 的证明与引理 1.6 中关于 V-超滤子 $\mathscr{U}$ 的性质的证明完全相同. M-超滤子 U 的 κ-完全性保证了 κ 为 M 中的正则基数. □

类似于利用 V-超滤子构造 V 的超幂 (定义 1.4), 我们也可以利用 M-超滤子 D 来构造 M 的超幂：对于 $f, g \in M^\kappa \cap M$, 定义

$$f =^* g \iff \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha) \in D\}.$$

这是 $M^\kappa \cap M$ 上的一个 (M-类) 等价关系. 类似地, 我们也可以定义 $[f]$ 以至于 $[f] = [g] \iff f =^* g$, 并且由此定义

$$[f] \in^* [g] \iff \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in D.$$

这样就得到 M 在 D 上的超幂 $\mathrm{ult}(M, D)$.

类似于 V-超幂基本定理 (定理 1.8), 我们也有 M-超幂基本定理：

$$\mathrm{ult}(M, D) \models \varphi\,[[f_1], \cdots, [f_n]] \iff \{\alpha < \kappa \mid M \models \varphi\,[f_1(\alpha), \cdots, f_n(\alpha)]\} \in D.$$

如果 M-超幂 $\mathrm{ult}(M, D)$ 上的 $\in^*$ 是有秩的, 那么它也就有唯一的传递化, 并且此时 M 也自然地嵌入到它的传递化之中. 需要注意的是, 由于 M-超幂是一个外部构造, 尽管 D 可以是 σ-完全的超滤子, M-超幂上的 $\in^*$ 未必是有秩的. 当然, 当 $D \in M$ 时, 一切都如同 V-超幂构造. 如果 D 是由一个非平凡的同质嵌入映射 $j : M \prec N$ 诱导出来的 M-超滤子, 那么由 D 所给出的 M-超幂 $\mathrm{ult}(M, D)$ 上的 $\in^*$ 是有秩的. 原因是此时如同引理 1.6 那样, 存在唯一的从 M-超幂到 N 上的自然的同质嵌入映射 $k : \mathrm{ult}(M, D) \ni [f] \mapsto j(f)(\kappa) \in N$. k 的存在保证了 $\mathrm{ult}(M, D)$ 上的 $\in^*$ 是有秩的：如果不然, 假如有

$$[f_0] \ni^* [f_1] \ni^* \cdots \ni^* [f_n] \ni^* [f_{n+1}] \ni^* \cdots,$$

那么在 k 的作用下,

$$j\,(f_0)\,(\kappa) \ni j\,(f_1)\,(\kappa) \ni \cdots \ni j\,(f_n)\,(\kappa) \ni j\,(f_{n+1})\,(\kappa) \ni \cdots$$

会在 ZFC 的传递模型 N 中出现.

综上所述, 我们得到如下引理：

引理 1.10 设 $j : L \prec L$ 非平凡, $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $D = \{X \subseteq \kappa \mid X \in L \wedge \kappa \in j(X)\}$. 那么 L-超幂 $\mathrm{ult}(L, D)$ 有唯一的传递化 L, 并且存在唯一的自然的同质嵌入映射 $i : L \prec L \cong \mathrm{ult}(L, D)$ 以及 $k : L \prec L$ 满足交换图 $j = k \circ i$:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{j} & L \\ \downarrow i & \nearrow_k & \\ L & & \end{array}$$

我们将上述分析的详细内容以及上述引理的证明留给有兴趣的读者作为一份综合性很强的但并非困难的练习.

上面的分解引理 (引理 1.10) 还给我们一种提示. 给定一个非平凡的同质嵌入映射 $j : L \prec L$, 令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$. 设 $\alpha \geqslant |\alpha| > \kappa$ 为一个极限序数. 令 $\beta = j(\alpha)$. 令 $k = j \upharpoonright_{L_\alpha}$. 那么 $k : L_\alpha \prec L_\beta$. 应用 L-超滤子以及超幂, 下面我们来证明这个结论足以给出存在从 L 到 L 的非平凡同质嵌入.

定理 1.12　*设 $k : L_\alpha \prec L_\beta$ 是一个非平凡的同质嵌入映射, $\gamma = \mathrm{Crit}(k)$, 并且 $\gamma < |\alpha|$. 那么存在非平凡的 $j : L \prec L$.*

证明　设 $k : L_\alpha \prec L_\beta$ 是一个非平凡的同质嵌入映射, $\gamma = \mathrm{Crit}(k)$, 并且 $\gamma < |\alpha|$.

由于 $\gamma < |\alpha|$, 如果 $X \subseteq \gamma$, $X \in L$, 那么 $X \in L_\alpha$. 所以, 如下定义的集合就是一个 L-超滤子:

$$D = \{X \subseteq \gamma \mid X \in L_\alpha \wedge \gamma \in k(X)\}.$$

断言　L-超幂 $\mathrm{ult}(L, D)$ 上的关系 $\in^*$ 是一个有秩关系.

假设不然. 设 $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$ 为一个构成反例的序列. 每一个 $f_n \in L$ 都是定义在 γ 上的函数, 并且对于每一个 $n < \omega$ 都有

$$\{\xi < \gamma \mid f_{n+1}(\xi) \in f_n(\xi)\} \in D.$$

令 θ 为一个极限序数以至于所有的 $f_n \in L_\theta$. 令 $X = \gamma \cup \{f_n \mid n < \omega\}$, 以及令 M 满足

$$X \subset M \prec L_\theta \wedge |M| = |\gamma|.$$

令 π 为 M 的传递化映射, 且 $\pi[M] = L_\eta$. 对于 $n < \omega$, 令 $g_n = \pi(f_n)$. 由于 $\gamma \subset M$, 对于 $\xi \in \gamma$ 都有 $\pi(\xi) = \xi$. 于是, 对于 $n < \omega$, 以及 $\xi < \gamma$,

$$g_{n+1}(\xi) \in g_n(\xi) \leftrightarrow f_{n+1}(\xi) \in f_n(\xi).$$

这就表明这一组函数 $g_n \in L_\eta$ 也同样构成反例, 而且每一个 $g_n \in L_\alpha$, 因为 $|\eta| = |\gamma| < |\alpha|$. 由此可见这一组函数在 k 的定义域中. 于是对于每一个 $n < \omega$,

$$\{\xi < \gamma \mid g_{n+1}(\xi) \in g_n(\xi)\} \in D \iff k(g_{n+1})(\gamma) \in k(g_n)(\gamma).$$

这样, 我们得到一组无穷单调序数

$$(k(g_0))(\gamma) \ni (k(g_1))(\gamma) \ni \cdots \ni (k(g_n))(\gamma) \ni (k(g_{n+1}))(\gamma) \ni \cdots.$$

这就是一个矛盾. □

接下来我们的重点是利用由引理 1.10 所给出的分解来详细地探讨有关 L 的结构性逻辑内涵.

我们利用引理 1.10 所给出的同质嵌入映射分解交换图希望完成的第一件事就是要证明同质嵌入映射 $i: L \prec L$ 有很多不动点. 这些不动点会自然地形成可构造集论域的 "无差别元", 即那些我们无法用集合论纯语言的一阶表达式进行彼此区分的序数. 这些无差别元就是经非平凡的同质嵌入映射制造出来的. 然后, 凭借这些无差别元, 我们就有可能将 L 的全部真相收集起来, 应用哥德尔编码, 得到自然数集合的一个非常特殊的子集合, 也就是本小节的标志物: $0^{\#}$.

对同质映射 j 分解出 L-超滤子, 再构造 L-超幂, 进而得到同质映射 i, 经历这样曲折过程的根本目的就是希望对 i 的不动点有比较具体的认识. 这种认识的可能性源于有关 V-超幂构造的命题 1.1：任何一个梯度大于临界点的强极限基数都是不动点. 下面的不动点引理证实了这种想法的可靠性.

引理 1.11 (不动点引理) *在引理 1.10 的环境下, $i: L \prec L$ 为 L-超滤子 D 所诱导出来的以 κ 为临界点的 L-超幂嵌入映射. 如果 λ 是一个梯度 $\mathrm{cf}(\lambda) > \kappa$ 的极限基数, 那么 $i(\lambda) = \lambda$.*

证明 由于 λ 梯度严格大于 κ, 任何一个 L 中的从 κ 到 λ 的映射都在 λ 中有界. 于是, 如果 $f \in \lambda^\kappa \cap L$, 那么一定有 $\alpha < \lambda$ 来保证 $\pi([f]) < i(\alpha)$, 其中 π 是 L-超幂 $\mathrm{ult}(L, D)$ 的传递化映射. 这就表明 $i(\lambda) = \sup\{i(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. 而对于 $\alpha < \lambda$, $|i(\alpha)| \leqslant |(\alpha^\kappa) \cap L|$, 从而 $i(\alpha) < \lambda$, 因为 λ 也是 L 的极限基数, 以及 L 是 GCH 的模型. 由此得到等式 $i(\lambda) = \lambda$. □

不动点引理表明在 L 中所有梯度严格大于 κ 的极限基数都是同质嵌入映射 i 的不动点. 令

$$U_0 = \left\{\lambda \mid \mathrm{cf}(\lambda) > \kappa \wedge \lambda = |\lambda| \wedge \forall \gamma < \lambda \left(|\gamma|^+ < \lambda\right)\right\}.$$

递归地, 给定 U_α, 定义

$$U_{\alpha+1} = \{\lambda \in U_\alpha \mid |\lambda \cap U_\alpha| = \lambda\},$$

以及对于极限序数 γ, 定义

$$U_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} U_\alpha.$$

注意, $U_{\alpha+1}$ 恰好由 U_α 的传递化映射的不动点组成. 另外, 每一个 U_α 都在 Ord 中无界. 这由下述断言保证.

断言一 U_α 在 Ord 中无界, 并且对于每一个 $\delta \in \mathrm{Ord}$, 如果 $\mathrm{cf}(\delta) > \kappa$,

$$\langle \lambda_\xi \mid \xi < \delta\rangle \in U_\alpha^\delta,$$

以及 $\forall \alpha < \beta < \delta\ (\lambda_\alpha < \lambda_\beta)$, 那么

$$U_\alpha \ni \sup\left(\{\lambda_\xi \mid \xi < \delta\}\right).$$

用关于 α 的归纳法来证明这个断言.

当 $\alpha=0$ 时, 设 δ 是一个梯度大于 κ 的序数, 以及

$$\langle\lambda_\xi\mid\xi<\delta\rangle\in U_0^\delta\ \wedge\ \forall\alpha<\beta<\delta\ (\lambda_\alpha<\lambda_\beta)\,,$$

令

$$\gamma=\sup\left(\{\lambda_\xi\mid\xi<\delta\}\right).$$

那么, $\mathrm{cf}(\gamma)>\kappa$ 并且 γ 是一个极限基数. 所以 $\gamma\in U_0$.

设 $\alpha=\beta+1$. 令 $\Gamma:\mathrm{Ord}\to U_\beta$ 为 U_β 的自然列表, 即唯一的单调递增的双射. 那么

$$U_\alpha=\{\eta\in U_\beta\mid\Gamma(\eta)=\eta\}\,.$$

设 δ 是一个梯度大于 κ 的序数, 以及

$$\langle\lambda_\xi\mid\xi<\delta\rangle\in U_\alpha^\delta\ \wedge\ \forall\eta<\xi<\delta\ (\lambda_\eta<\lambda_\xi)\,,$$

令

$$\eta=\sup\left(\{\lambda_\xi\mid\xi<\delta\}\right).$$

那么,

$$\Gamma(\eta)\geqslant\sup\left(\{\Gamma\left(\lambda_\xi\right)\mid\xi<\delta\}\right)=\sup\left(\{\lambda_\xi\mid\xi<\delta\}\right)=\eta.$$

由归纳假设, $\eta\in U_\beta$. 这就意味着 $\eta=\Gamma(\eta)$. 从而, $\eta\in U_\alpha=U_{\beta+1}$.

当 α 是一极限序数时, 结论由归纳假设以及 U_α 的定义直接得到.

这就完成了断言一的证明.

根据上面的断言, 令 $\lambda\in U_{\omega_1}$. 此 λ 具备如下性质:

(i) λ 是一个极限基数, 并且 $\mathrm{cf}(\lambda)>\kappa$;

(ii) $\forall\alpha<\omega_1\ \ (|\lambda\cap U_\alpha|=\lambda)$.

断言二　$\exists I\in[\lambda]^{\omega_1}$ 以至于在模型 $(L_\lambda,\in)$ 中如下命题成立: 如果 $\varphi\left(v_1,\cdots,v_n\right)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $\{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n\}\subset I$ 以及 $\{\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n\}\subset I$, 那么

$$(L_\lambda,\in)\models\left(\varphi\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]\leftrightarrow\varphi\left[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\right]\right).$$

首先, 令 $h=i\restriction_{L_\lambda}$. 因为 $i:L\prec L$, $i(\lambda)=\lambda$, $h:(L_\lambda,\in)\prec(L_\lambda,\in)$.

其次, 对于每一个 $\alpha<\omega_1$, 令 $X_\alpha=\lambda\cap U_\alpha$. 并且令

$$M_\alpha=\mathcal{SH}^{L_\lambda}\left(\kappa\cup X_\alpha\right)$$

为由 $(\kappa \cup X_\alpha)$ 在模型 $(L_\lambda, \in)$ 中依典型斯科伦函数所生成的同质子模型

$$\mathcal{SH}^{L_\lambda}(\kappa \cup X_\alpha).$$

令 π_α 为 M_α 的传递化映射. 由于 $|X_\alpha| = \lambda$, $\pi_\alpha[M_\alpha] = L_\lambda$. 也就是说,

$$h_\alpha = \pi_\alpha^{-1} : L_\lambda \prec L_\lambda.$$

令 $\kappa_\alpha = h_\alpha(\kappa)$.

断言三 令 $I = \{\kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$. 那么 I 具备断言二所要求的性质.

于是, 断言二的证明就归结到断言三的证明. 我们将断言三的论证分成三个引理及其证明.

引理 1.12 (i) $\forall \alpha < \omega_1 \ (\kappa_\alpha = \min\{\xi \in \mathrm{Ord} \cap M_\alpha \mid \xi > \kappa\})$;

(ii) **如果** $\alpha < \beta < \omega_1$, $x \in M_\beta$, **那么** $h_\alpha(x) = x$, **尤其是**, $h_\alpha(\kappa_\beta) = \kappa_\beta$;

(iii) **如果** $\alpha < \beta < \omega_1$, **那么** $\kappa_\alpha < \kappa_\beta$.

首先证 (i). 固定 $\alpha < \omega_1$. 第一, $\kappa \notin M_\alpha$. 如果 $x \in M_\alpha$, 那么 $x = \tau[\eta_1, \cdots, \eta_m]$, 其中, τ 是一个斯科伦项, 每一个 η_ℓ 或者小于 κ, 或者在 X_α 之中. 于是对于这样的序数 η, 必定有 $i(\eta) = \eta$. 从而

$$i(x) = i(\tau[\eta_1, \cdots, \eta_m]) = \tau[i(\eta_1), \cdots, i(\eta_m)] = \tau[\eta_1, \cdots, \eta_m] = x.$$

由于 $i(\kappa) > \kappa$, 所以, $\kappa \notin M_\alpha$. 又由于 $\kappa \subset M_\alpha$, $h_\alpha(\kappa)$ 是 M_α 中的大于等于 κ 的序数, 因此,

$$h_\alpha(\kappa) = \min\{\xi \in \mathrm{Ord} \cap M_\alpha \mid \xi > \kappa\}.$$

其次证 (ii). 设 $\alpha < \beta < \omega_1$. 诚如 (i) 之证明中所述, 如果 $x \in M_\beta$, 那么 $x = \tau[\eta_1, \cdots, \eta_m]$, 其中, τ 是一个斯科伦项, 每一个 η_ℓ 或者小于 κ, 或者在 X_β 之中. 如果 $\eta < \kappa$, 那么 $h_\alpha(\eta) = \eta$; 如果 $\eta \in X_\beta$, 那么 $|X_\alpha \cap \eta| = \eta$, 从而 $\pi_\alpha(\eta) = \eta$, 因此, $h_\alpha(\eta) = \eta$. 由此得知: $h_\alpha(x) = x$ 对于每一个 $x \in M_\beta$ 就都成立.

最后证 (iii). 设 $\alpha < \beta < \omega_1$. 那么 $M_\alpha \supset M_\beta$, 从而 $\kappa_\alpha \leqslant \kappa_\beta$. 由 (i), $\kappa < \kappa_\alpha$, 因此

$$h_\alpha(\kappa_\alpha) > h_\alpha(\kappa) = \kappa_\alpha;$$

根据 (ii), $h_\alpha(\kappa_\beta) = \kappa_\beta$. 所以 $\kappa_\alpha < \kappa_\beta$. □

引理 1.13 **如果** $\alpha < \beta < \omega_1$, **那么存在一个具备下述特性的同质映射** $h_{\alpha,\beta} : L_\lambda \prec L_\lambda$:

(i) $\forall \xi < \omega_1 \ ((\xi < \alpha \vee \beta < \xi) \to (h_{\alpha,\beta}(\kappa_\xi) = \kappa_\xi))$;

(ii) $h_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$.

先定义 $h_{\alpha,\beta}$. 令 $M_{\alpha,\beta}=\mathcal{SH}^{L_\lambda}(\kappa_\alpha\cup X_\beta)$ 为由 $(\kappa_\alpha\cup X_\beta)$ 在模型 $(L_\lambda,\in)$ 中依典型斯科伦函数生成的同质子模型. 令 $\pi_{\alpha,\beta}$ 为 $M_{\alpha,\beta}$ 的传递化映射. 再令 $h_{\alpha,\beta}=\pi_{\alpha,\beta}^{-1}$. 那么

$$h_{\alpha,\beta}:L_\lambda\prec L_\lambda.$$

接下来我们证明这个同质映射具备所要的性质.

如果 $\eta<\kappa_\alpha$, 那么 $h_{\alpha,\beta}(\eta)=\eta$; 尤其是当 $\xi<\alpha$ 时, $h_{\alpha,\beta}(\kappa_\xi)=\kappa_\xi$.

如果 $x\in M_{\beta+1}$, 那么 $x=\tau[\eta_1,\cdots,\eta_m]$, 其中, τ 是一个斯科伦项, 每一个 η_ℓ 或者小于 κ, 或者在 $X_{\beta+1}$ 之中. 如果 $\eta\in X_{\beta+1}$, 那么 $|\eta\cap X_\beta|=\eta$, 于是, $h_{\alpha,\beta}(\eta)=\eta$. 这些就表明对于任意的 $x\in M_{\beta+1}$ 都有 $h_{\alpha,\beta}(x)=x$; 尤其是若 $\omega_1>\xi>\beta$, 则 $h_{\alpha,\beta}(\kappa_\xi)=\kappa_\xi$.

现在我们来证明 $h_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha)=\kappa_\beta$.

因为 $M_\beta\subset M_{\alpha,\beta}$, 所以 $\kappa_\beta\in M_{\alpha,\beta}$; 又因为 $\kappa_\alpha\subset M_{\alpha,\beta}$, $h_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha)$ 是 $M_{\alpha,\beta}$ 中大于或等于 κ_α 的序数; 由此得知 $\kappa_\alpha\leqslant h_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha)\leqslant\kappa_\beta$.

如果可以证明在 $M_{\alpha,\beta}$ 中没有序数 δ 满足不等式 $\kappa_\alpha\leqslant\delta<\kappa_\beta$, 那么我们就得到所要的等式. 假设不然, 在 $M_{\alpha,\beta}$ 中存在一个序数 δ 满足不等式 $\kappa_\alpha\leqslant\delta<\kappa_\beta$. 令 δ 为这样一个序数. 令

$$\delta=\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m],$$

其中 τ 是一个斯科伦项, $\max\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}<\kappa_\alpha$, $\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}\subset X_\beta$. 于是,

$$(L_\lambda,\in)\models\exists\xi_1<\kappa_\alpha\cdots\exists\xi_n<\kappa_\alpha\left(\kappa_\alpha\leqslant\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m]<\kappa_\beta\right).$$

上述右端的表达式表述关于 $\kappa_\alpha,\eta_\ell,\kappa_\beta$ 的一种性质. 因为 $\kappa_\alpha=h_\alpha(\kappa)$, 对于 $1\leqslant\ell\leqslant m$ 都有 $h_\alpha(\eta_\ell)=\eta_\ell$, 以及 $h_\alpha(\kappa_\beta)=\kappa_\beta$, 所以上述表达式就是

$$\begin{aligned}&(L_\lambda,\in)\models\\&\exists(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in(h_\alpha(\kappa))^n\left(h_\alpha(\kappa)\leqslant\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,h_\alpha(\eta_1),\cdots,h_\alpha(\eta_m)]<h_\alpha(\kappa_\beta)\right).\end{aligned}$$

由于 $h_\alpha:L_\lambda\prec L_\lambda$, 根据上述我们得到

$$(L_\lambda,\in)\models\exists\xi_1<\kappa\cdots\exists\xi_n<\kappa\left(\kappa\leqslant\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m]<\kappa_\beta\right).$$

从 κ 中取出满足上述的证据 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 从而实现不等式

$$\left(\kappa\leqslant\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m]<\kappa_\beta\right).$$

因为 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}\subset\kappa$, $\{\eta_1,\cdots,\eta_m\}\subset X_\beta$, 所以

$$\tau[\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots,\eta_m]\in M_\beta.$$

这就表明在 M_β 中存在一个满足不等式 $\kappa \leqslant \delta < \kappa_\beta$ 的序数 δ. 这与引理 1.12 中的第一条结论相矛盾.

于是, 引理 1.13 得证. □

引理 1.14 令 $I = \{\kappa_\xi \mid \xi < \omega_1\}$. 那么如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $\{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n\} \subset \omega_1$ 以及 $\{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n\} \subset \omega_1$, 那么

$$(L_\lambda, \in) \models (\varphi[\kappa_{\alpha_1}, \kappa_{\alpha_2}, \cdots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow \varphi[\kappa_{\beta_1}, \kappa_{\beta_2}, \cdots, \kappa_{\beta_n}]),$$

这个引理就给出断言三, 从而断言二也就得到证明.

证明 设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式,

$$\{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n\} \subset \omega_1,$$

以及 $\{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n\} \subset \omega_1$.

从 ω_1 中取出一组满足要求 $\max\{\alpha_n, \beta_n\} < \delta_1$ 的递增序列 $\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n$.

首先应用同质嵌入映射 $h_{\alpha_n, \delta_n} : L_\lambda \prec L_\lambda$, 我们得到

$$(L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\alpha_1}, \cdots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\alpha_n}\right]\right) \leftrightarrow (L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\alpha_1}, \cdots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\delta_n}\right]\right),$$

因为 $h_{\alpha_n, \delta_n}(\kappa_{\alpha_n}) = \kappa_{\delta_n}$, 而对于 $1 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 都有 $h_{\alpha_n, \delta_n}(\kappa_{\alpha_\ell}) = \kappa_{\alpha_\ell}$.

在此基础上, 接下来应用同质嵌入映射 $h_{\alpha_{n-1}, \delta_{n-1}} : L_\lambda \prec L_\lambda$; 再用

$$h_{\alpha_{n-2}, \delta_{n-2}} : L_\lambda \prec L_\lambda;$$

等等, 直到最后应用 $h_{\alpha_1, \delta_1} : L_\lambda \prec L_\lambda$, 得到

$$(L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\alpha_1}, \cdots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\alpha_n}\right]\right) \leftrightarrow (L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\delta_1}, \cdots, \kappa_{\delta_{n-1}}, \kappa_{\delta_n}\right]\right).$$

然后对 $\beta_1 < \cdots < \beta_{n-1} < \beta_n$ 以及 $\delta_1 < \cdots < \delta_{n-1} < \delta_n$ 实施同样的过程, 就得到

$$(L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\beta_1}, \cdots, \kappa_{\beta_{n-1}}, \kappa_{\beta_n}\right]\right) \leftrightarrow (L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\delta_1}, \cdots, \kappa_{\delta_{n-1}}, \kappa_{\delta_n}\right]\right).$$

综合起来就有

$$\begin{aligned}(L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\alpha_1}, \cdots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \kappa_{\alpha_n}\right]\right) &\leftrightarrow (L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\delta_1}, \cdots, \kappa_{\delta_{n-1}}, \kappa_{\delta_n}\right]\right) \\ &\leftrightarrow (L_\lambda, \in) \models \left(\varphi\left[\kappa_{\beta_1}, \cdots, \kappa_{\beta_{n-1}}, \kappa_{\beta_n}\right]\right).\end{aligned}$$ □

事实上, 上面的整个构造与分析综合起来证明了下面的库能定理:

定理 1.13 (Kunen) 如果存在从 L 到 L 的一个非平凡的同质映射 $j : L \prec L$, 那么一定存在一个具备如下性质的极限序数 λ: $\exists I \in [\lambda]^{\omega_1}$ 以至于在模型 $(L_\lambda, \in)$ 中如下命题成立: 如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $\{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n\} \subset I$ 以及 $\{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n\} \subset I$, 那么

$$(L_\lambda, \in) \models (\varphi[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \leftrightarrow \varphi[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]).$$

为了叙述明确和简便, 我们称定理具备那样性质的序数集合 I 为模型 $(L_\lambda, \in)$ 的 “无差别” 元集合. 应用这个术语, 上面的定理就可以简单明了地叙述如下: 如果存在从 L 到 L 的一个非平凡的同质映射 $j : L \prec L$, 那么一定存在一个具备如下性质的极限序数 λ: 模型 $(L_\lambda, \in)$ 包含着一个不可数的无差别元子集 $I \subset \lambda$.

模型之无差别元序数集

我们将上述无差别元术语演变成如下具有一般性的概念:

定义 1.8 (无差别元) 设 $\mathcal{L}$ 为一个包括谓词符号 $\{P, \cdots\}$、函数符号 $\{F, \cdots,\}$ 和常元符号 $\{c, \cdots\}$ 的一阶语言 (并不要求语言可数). 设

$$\mathfrak{A} = \left(A, P^{\mathfrak{A}}, \cdots, F^{\mathfrak{A}}, \cdots, c^{\mathfrak{A}}, \cdots\right)$$

为一个 $\mathcal{L}$-结构. 设 λ 是一个无穷基数, 并且 $\lambda \subset A$. 称一个集合 $I \subset \lambda$ 是模型 $\mathfrak{A}$ 的**一个无差别元集合**当且仅当对于每一个自然数 $n < \omega$, 对于语言 $\mathcal{L}$ 的任何一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 都有如下结论: 对于任意来自集合 I 中的两组长度为 n 的单调递增序列 $\{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n\} \subset I$ 以及 $\{\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n\} \subset I$, 总有下述对等关系:

$$(\mathfrak{A} \models \varphi[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]) \iff (\mathfrak{A} \models \varphi[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]).$$

等价地,

$$\mathfrak{A} \models (\varphi[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \leftrightarrow \varphi[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]).$$

一旦形成这样一种概念, 我们自然面临一系列新的问题. 比如, 当务之急的问题有两个: 第一个问题自然就是定理 1.13 的逆命题是否成立? 也就是说,

问题 1.2 如果对于某个极限基数 λ 而言, 模型 $(L_\lambda, \in)$ 包含着一个不可数的无差别元序数集合, 那么是否存在从 L 到 L 的非平凡的同质嵌入映射?

第二个问题自然就是

问题 1.3 在什么情形下模型 $(\mathscr{H}_\kappa, \in)$ 也可以包含不可数的无差别元序数集合?

我们先来探讨问题 1.3 的答案: 拉姆齐基数保证很广泛的一类模型都包含不可数的无差别元序数集合.

定理 1.14 设 κ 是一个拉姆齐基数. 设 $\mathcal{L}$ 是一个势严格小于 κ 的一阶语言. 如果 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个其论域包含 κ 的模型, 那么 $\mathfrak{A}$ 一定包含一个势为 κ 的无差别元序数集合.

在证明定理 1.14 之前我们先证明一个引理. 这个引理指出拉姆齐基数事实上具备更强的划分齐一特性.

首先将记号 $\kappa \to (\kappa)_2^{<\omega}$ 推广一下. 设 $\lambda < \kappa$ 为一个基数. 划分关系记号

$$\kappa \to (\kappa)_\lambda^{<\omega}$$

表述如下命题:

对于每一个函数 $f : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$, 都会有一个 $H \in [\kappa]^\kappa$ 来保证对于每一个 $n < \omega$, f 在 $[H]^n$ 上是常值函数.

引理 1.15 设 κ 是一个拉姆齐基数. 那么对于任意一个严格小于 κ 的基数 λ 而言划分关系 $\kappa \to (\kappa)_\lambda^{<\omega}$ 一定成立.

证明 设 κ 是一个拉姆齐基数, $2 \leqslant \lambda < \kappa$ 是一个基数. 设 $f : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$. 定义 $F : [\kappa]^{<\omega} \to \{0, 1\}$ 如下: 如果 $\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2k}\} \in [\kappa]^{2k}(1 \leqslant k < \omega)$, 令

$$F(\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2k}\}) = 1 \leftrightarrow f(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}) = f(\{\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{2k}\}),$$

以及

$$F(\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2k}\}) = 0 \leftrightarrow f(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}) \neq f(\{\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{2k}\});$$

对于每一个 $a \in [\kappa]^{2k+1}(k < \omega)$, 令 $F(a) = 0$.

令 $H \in [\kappa]^\kappa$ 为 F 的一个齐一子集. 我们断言: 对于每一个 $1 \leqslant k < \omega$, F 在 $[H]^{2k}$ 上必取值 1. 这是因为 $\lambda < \kappa = |H|$, 一定存在一组 $\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2k}\} \in [H]^{2k}$ 来实现等式

$$f(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}) = f(\{\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{2k}\}).$$

我们来验证此 H 是 f 的一个齐一子集: 任给

$$\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k\} \in [H]^k \text{ 以及 } \{\beta_1 < \cdots < \beta_k\} \in [H]^k,$$

取一组 $\{\gamma_1 < \cdots < \gamma_k\} \in [H]^k$ 满足要求: $\max\{\alpha_k, \beta_k\} < \gamma_1$. 那么

$$F(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = F(\{\beta_1, \cdots, \beta_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = 1.$$

于是

$$f(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}) = f(\{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}) = f(\{\beta_1, \cdots, \beta_k\}).$$ □

现在我们来证明定理 1.14.

设 κ 是一个拉姆齐基数. 设 $\mathcal{L}$ 是一个势为 $\lambda < \kappa$ 的一阶语言, $\mathfrak{A}$ 为 $\mathcal{L}$ 的一个模型, 并且它的论域 $A \supseteq \kappa$. 我们来为 $\mathfrak{A}$ 寻找一个势为 κ 的无差别元序数集合 I.

令 $\mathbf{\Phi}$ 为语言 $\mathcal{L}$ 的全体表达式的集合. 那么 $|\mathbf{\Phi}| = \lambda < \kappa$, 从而 $|\mathfrak{P}(\mathbf{\Phi})| = 2^\lambda < \kappa$. 考虑如下定义的映射 $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mathfrak{P}(\mathbf{\Phi})$:

对于 $\{\alpha_1 < \cdots < \alpha_n\} \subset \kappa$, 令

$$f(\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}) = \{\varphi(v_1, \cdots, v_n) \mid \mathfrak{A} \models \varphi[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]\}.$$

根据引理 1.15, 我们有 $\kappa \to (\kappa)^{<\omega}_{2^\lambda}$. 令 $H \in [\kappa]^\kappa$ 为 f 的一个齐一子集. 那么 H 就是 $\mathfrak{A}$ 的一个无差别元序数集合. □

由拉姆齐基数得到无差别元的定理 1.14 或者这个定理的证明可以有下述推广. 这个推广对我们后面分析相对于一个正规超滤子 D 的可构造集论域 $L[D]$ 有用 (见 1.1.5 小节中定理 1.23 中的证明).

引理 1.16 设 κ 是一个拉姆齐基数, $\lambda < \kappa$ 是一个无穷基数. 设 $\mathcal{L}$ 是一个势不超过 λ 的语言. 设 $\mathfrak{A} = (A, \cdots)$ 为 $\mathcal{L}$ 的一个结构, 并且它的论域 $A \supset \kappa$. 如果 $P \subset A$ 是一个势严格小于 κ 的子集, 那么 $\mathfrak{A}$ 一定有一个满足下述特别要求的同质子模型 $\mathfrak{B} = (B, \cdots)$:

$$|B| = \kappa \wedge |P \cap B| \leqslant \lambda.$$

进一步地, 如果 $X \subset A$ 的势不超过 λ, 求上述 $\mathfrak{B}$ 时我们还可以要求 $X \subset B$; 如果 κ 是一个可测基数, D 是 κ 上的一个非平凡的正规超滤子, 求上述 $\mathfrak{B}$ 时我们还可以要求 $B \cap \kappa \in D$.

证明 我们对语言 $\mathcal{L}$ 添加一个一元谓词符号, 其解释就是论域中的一个子集; 同时, 对给定的论域的一个子集 X 的每一个元素, 添加一个新常元符号, 其解释自然就是相应的元素; 应用选择公理, 对这个新语言下的每一个表达式 φ, 在添加结构 $(A, \cdots, P, a)_{a \in X}$ 中引进一个斯科伦函数 h_φ, 并为每一个这样的斯科伦函数引进一个新函数符号. 将这样添加符号之后的语言记成 $\mathcal{L}^*$. 这些斯科伦函数符号的自然解释就是那些被引进的斯科伦函数. 由此, 得到 $\mathfrak{A}$ 在新语言 $\mathcal{L}^*$ 下的添加结构 $\mathfrak{A}^*$. 注意, 这个新语言 $\mathcal{L}^*$ 的势依旧不会超过 λ. 应用无差别元定理 (定理 1.14), 我们得到 $\mathfrak{A}^*$ 的一个势为 κ 的无差别元序数集合 $I \subset \kappa$ (如果 κ 是可测基数, D 是 κ 上的非平凡正规超滤子, 那么可从 D 中取出 $I \in D$). 令 B 为 $\mathfrak{A}^*$ 的由 I 所生成的同质子模型的论域. 那么, B 的势为 κ. 由于 $|P| < \kappa = |I|$, $B = \mathcal{SH}^{\mathfrak{A}^*}(I)$, 应用无差别元特性有 $|P \cap B| < \kappa$, 从而进一步地得到 $|P \cap B| \leqslant \lambda$ (我们将详细讨论留给有兴趣的读者). □

EM-蓝图

设 $\{c_k \mid k<\omega\}$ 为一个新常元符号的集合. 令 $\mathcal{L}_\in^*$ 为对集合论纯语言添加这些新常元符号后所得到的语言. 称所有满足下述要求的结构 $(L_\lambda,\in,a_k)_{k<\omega}$ 为语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 的一个**典型结构**:

(1) $\lambda>\omega$ 为一个极限序数;

(2) 对于每一个 $k<\omega$, a_k 是常元符号 c_k 的解释, 并且 $a_k<a_{k+1}$ 都是序数;

(3) 集合 $I=\{a_k \mid k<\omega\}$ 是省略结构 $(L_\lambda,\in)$ 的无差别元集合.

定义 1.9 (EM-蓝图) 语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 中的一个理论 T 被称为**一幅 EM-蓝图**[3] 当且仅当 T 是语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 的某个典型结构的真相的全体之集, 即 T 记录着在某个 $\mathcal{L}_\in^*$ 的典型结构 $(L_\lambda,\in,a_k)_{k<\omega}$ 中为真的语句的全体:

$$T=\left\{\sigma \;\middle|\; \sigma\,\text{是一个语句, 并且}\,(L_\lambda,\in,a_k)_{k<\omega}\models\sigma\right\}.$$

注意, 如果 $\delta>\omega$ 是一个极限序数, $I\subset\delta$ 是模型 $(L_\delta,\in)$ 的无差别元的一个无穷集合, 那么 I 就唯一地确定了一幅 EM-蓝图. 因为可以从 I 中任意地取出一个长度为 ω 的单调递增的序数序列将结构 $(L_\delta,\in)$ 增添成一个语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 的典型结构; 所有这样的增添结构都相同 (见模型论概要 II.1.2.2 小节中的定义). 引理 1.17 则表明任何一幅 EM-蓝图事实上也就是由这样携带着一定序型的无差别元集合的基础模型增添得来的. 于是, 根据定理 1.14, 如果存在一个拉姆齐基数, 那么一定存在 EM-蓝图; 当然, EM-蓝图的存在性本身并不需要特别的高阶无穷公理: 因为在模型论中, Ehrenfeucht 和 Mostowski (应用拉姆齐无限分划定理 (定理 I.2.50) 以及一阶逻辑的紧致性定理) 证明了这样一个定理: 任何一个无穷模型都会与携带任意事先指定序型的无差别元集合的某个模型相同. 只是我们在这里仅仅关注形如 $(L_\delta,\in)$ 的模型. 后面会看到当我们对 EM-蓝图加进一些新的要求时, 高阶无穷公理就成为不可或缺的要素了.

引理 1.17 (可实现引理) 设 T 是一幅 EM-蓝图. 令 $T_\in$ 为 T 中那些不含任何新常元符号的语句之子集.

(1) 如果 $\alpha>\omega$ 为一个极限序数, 那么 $T_\in$ 必然有 (在同构意义下) 唯一的具备下述特性的模型 (称之为 T 的**基本模型**) $\mathcal{M}=\mathcal{M}(T,\alpha)=(M,E)$: $\mathcal{M}$ 携带一个在其 E 关系下的序型为 α 的无差别元 $\mathcal{M}$-序数集合 X, 并且

(a) 对于集合论纯语言中任意的彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1,\cdots,v_n)$, 以及任意的在 E 下单调递增的 n-元组 $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset X$, 总有

$$\mathcal{M}\models\varphi[a_1,\cdots,a_n] \iff \varphi(c_0,\cdots,c_{n-1})\in T.$$

3 EM 为 Ehrenfeucht-Mostowski 的缩写.

(b) $\mathcal{M} = \mathcal{SH}^{\mathcal{M}}(X)$.

(2) 如果 $\omega < \alpha < \beta$ 为极限序数, $(\mathcal{M}(T,\alpha), X)$ 和 $(\mathcal{M}(T,\beta), Y)$ 分别为具备 (1) 所述性质的模型, 并且 $j : \alpha \to \beta$ 为一个单调递增的函数, 那么 j 可以延拓成从 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 到 $\mathcal{M}(T,\beta)$ 的同质嵌入映射.

证明　(1) 根据 EM-蓝图的定义 (定义 1.9), T 肯定有一个无穷模型. 设 $\lambda > \omega$ 为一个极限序数, 并且 T 记录着 $\mathcal{L}_{\in}^{*}$ 的典型结构 $(L_\lambda, \in, a_k)_{k<\omega}$ 的真相, 其中 $I = \{a_k \mid k < \omega\}$ 是模型 $(L_\lambda, \in)$ 的无差别元序数的集合.

我们应用一阶逻辑的紧致性定理来证明存在性.

给定极限序数 $\alpha > \omega$. 首先对语言 $\mathcal{L}_{\in}^{*}$ 进一步添加新常元符号 $c_\xi, \omega \leqslant \xi < \alpha$, 并且将结果记成 $\mathcal{L}_{\in}^{**}$. 令 Δ 为这个语言的下述语句的集合:

(i) c_ξ 是一个序数 (所有的 $\xi < \alpha$);

(ii) $c_\xi < c_\eta$ (所有满足 $\xi < \eta < \alpha$ 的序数 ξ 和 η);

(iii) $\varphi(c_{\xi_1}, \cdots, c_{\xi_n})$ (所有的 $\varphi(c_{k_1}, \cdots, c_{k_n}) \in T$, 以及所有的 $\xi_1 < \cdots < \xi_n < \alpha$).

断言一　Δ 的任何一个有限子集都是可满足的.

设 $D \subset \Delta$ 为一个有限集合. 令 $\xi_1 < \cdots < \xi_m$ 为在 D 中出现的全体常元符号 $c_{\xi_1}, \cdots, c_{\xi_m}$ 的下标. 令 $\sigma(c_{\xi_1}, \cdots, c_{\xi_m}) = \bigwedge D$ 为 D 中全体语句的合取语句. 对于 $1 \leqslant i \leqslant m$, 用 a_i 来解释 c_{ξ_i}. 那么

$$(L_\lambda, \in, a_k)_{1 \leqslant k \leqslant m} \models \sigma(c_{\xi_1}, \cdots, c_{\xi_m}).$$

因为如果 $\varphi(c_{\eta_1}, \cdots, c_{\eta_\ell}) \in D$, 那么必有某一组 $\{c_{k_1}, \cdots, c_{k_\ell}\}$ 满足 $\varphi(c_{k_1}, \cdots, c_{k_\ell}) \in T$, 于是,

$$(L_\lambda, \in, a_k)_{k<\omega} \models \varphi(c_{k_1}, \cdots, c_{k_\ell}).$$

因为 I 是模型 $(L_\lambda, \in)$ 的无差别元序数集合, 所以

$$(L_\lambda, \in, a_k)_{1 \leqslant k \leqslant m} \models \varphi(c_{k_1}, \cdots, c_{k_\ell}).$$

根据断言一, 应用紧致性定理, Δ 就有一个模型 $\mathcal{M} = \left(M, E, c_\xi^{\mathcal{M}}\right)_{\xi<\alpha}$. 令

$$J = \left\{ c_\xi^{\mathcal{M}} \mid \xi < \alpha \right\}.$$

那么 J 是 $\mathcal{M}$ 的序数的一个集合, 并且在 E 之下的序型为 α. 如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $\xi_1 < \cdots < \xi_n < \alpha$, 那么

$$(M, E) \models \varphi\left[c_{\xi_1}^{\mathcal{M}}, \cdots, c_{\xi_n}^{\mathcal{M}}\right] \iff \varphi(c_1, \cdots, c_n) \in T.$$

由此可见, J 是 (M, E) 的一个无差别元序数集合.

令 $\mathcal{A}=\mathcal{SH}^{(M,E)}(J)$. 那么 $\mathcal{SH}^{\mathcal{A}}(J)=\mathcal{SH}^{(M,E)}(J)=\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ 就是所需要的模型.

断言二 在同构意义下, 上面的模型 $\mathcal{A}$ 是唯一的.

假设 $\mathcal{A}_0=(A_0,E_0)$ 和 $\mathcal{A}_1=(A_1,E_1)$ 各自携带着无差别元序数集合 J_0 和 J_1, 且序型都是 α. 令 $\pi: J_0\cong J_1$ 为它们的序同构. 因为对于 $i<2$,

$$\mathcal{A}_i=\mathcal{SH}^{\mathcal{A}_i}\left(J_i\right),$$

A_i 中的每一个元素 a 都由某一个典型斯科伦项 t 在某一组无差别元 $x_1,\cdots,x_n\in J_i$ 下计算出来:

$$a=t^{\mathcal{A}_i}\left(x_1,\cdots,x_n\right).$$

这样就可以将 π 延拓成从 $\mathcal{A}_0$ 到 $\mathcal{A}_1$ 的映射: 对于每一个斯科伦项 t, 对于 $x_1,\cdots,$ $x_n\in J_0$, 令

$$\pi\left(t^{\mathcal{A}_0}\left[x_1,\cdots,x_n\right]\right)=t^{\mathcal{A}_1}\left[\pi\left(x_1\right),\cdots,\pi\left(x_n\right)\right].$$

又因为对于任意的斯科伦项 t_1 和 t_2, 一定有

$$\begin{aligned}&t_1^{\mathcal{A}_0}\left[x_1,\cdots,x_n\right]=t_2^{\mathcal{A}_0}\left[y_1,\cdots,y_n\right]\leftrightarrow\\&t_1^{\mathcal{A}_1}\left[\pi\left(x_1\right),\cdots,\pi\left(x_n\right)\right]=t_2^{\mathcal{A}_1}\left[\pi\left(y_1\right),\cdots,\pi\left(y_n\right)\right],\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&t_1^{\mathcal{A}_0}\left[x_1,\cdots,x_n\right]\ E_0\ t_2^{\mathcal{A}_0}\left[y_1,\cdots,y_n\right]\leftrightarrow\\&t_1^{\mathcal{A}_1}\left[\pi\left(x_1\right),\cdots,\pi\left(x_n\right)\right]\ E_1\ t_2^{\mathcal{A}_1}\left[\pi\left(y_1\right),\cdots,\pi\left(y_n\right)\right],\end{aligned}$$

所以, π 的上述延拓是毫无歧义的同构映射.

(2) 延拓映射的定义如上面断言二的证明中延拓映射的定义. □

这里自然产生了一个问题: 这个实现 EM-蓝图 T 的唯一的模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 上的关系 E 是否为一个有秩关系 (尽管它是自同一的)?

引理 1.18 (有秩条件) *设 T 是一个 EM-蓝图. 那么如下命题等价:*

(1) 对于任意一个极限序数 $\alpha>\omega$ 而言, 基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 上的关系 E 都是有秩关系;

(2) 存在一个极限序数 $\alpha\geqslant\omega_1$ 来见证基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 上的关系 E 都是有秩关系;

(3) 对于任意一个极限序数 $\omega<\alpha<\omega_1$ 而言, 基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 上的关系 E 都是有秩关系.

证明 (2) 是 (1) 的特例.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)=(M,E)$ 上的关系 E 都是有秩关系, $X\subset M$ 是它所携带的序型为 $\alpha\geqslant\omega_1$ 的无差别元序数集合. 设 $\omega<\beta<\omega_1$ 为一个极限序数. 令 Y 为 X 的前 β 个元素. 令 $\mathcal{A}=\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$. 那么 $\mathcal{A}$ 即为所求.

(3) $\Rightarrow$ (1). 假设 (1) 不成立. 令 $\alpha \geqslant \omega_1$ 为一个最小反例. 令 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 为这样的模型. 设 X 是它的序型为 α 的无差别元序数集合. 设

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$$

为 M 中满足 $a_{n+1} \, E \, a_n$ 的一个无穷单调递减序列. 对于每一个 $n < \omega$, 令 t_n 为一个定义 a_n 的斯科伦项, 即

$$a_n = t_n^{(M,E)} [x_1, \cdots, x_{k_n}],$$

其中 $x_1, \cdots, x_{k_n}$ 是 X 中的元素. 将这些无差别元收集起来得到一个可数子集 $Y \subset X$, 并且所有这个单调递减的序列中的元素都在 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 的论域之中. 可是这个模型 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 是一个携带着序型为一个可数极限序数的无差别元序数集合的模型, 并且它上面的关系 E 不是一个秩序关系. 这与 (3) 相矛盾. □

由此, 我们得到下述推论:

推论 1.2 (第一 EM-蓝图存在性)　如果存在一个拉姆齐基数, 那么一定存在一个满足引理 1.18 中条件 (3) 的 EM-蓝图 T.

证明　设 κ 是一个拉姆齐基数. 根据定理 1.14, 模型 $(L_\kappa, \in)$ 携带着一个势为 κ 的无差别元序数子集 $I \subset \kappa$. 于是, 令 X 为 I 的最先 ω 个无差别元之子集合, 且 $X = \{a_k \mid k < \omega\}$. 令 T 为模型 $(L_\kappa, \in, a_k)_{k<\omega}$ 在语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 中的真相. 对此 EM-蓝图 T, 引理 1.18 中条件 (2) 成立. 根据引理 1.18, 它的条件 (3) 也就得到满足. □

我们也因此称引理 1.18 中条件 (3) 为 EM-蓝图 T 的**有秩条件**.

接下来探讨另一个自然的问题: 什么情形下模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的序型为极限序数 $\alpha > \omega$ 的无差别元序数集合 X 在 (M,E) 的序数集合中是无界子集?

引理 1.19　设 T 是一个 EM-蓝图. 那么如下命题等价:

(1) 对于任意一个极限序数 $\alpha > \omega$ 而言, 基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的无差别元序数集合在 (M,E) 的序数中是无界的;

(2) 存在一个极限序数 $\alpha > \omega$ 来见证基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的无差别元序数集合在 (M,E) 的序数中是无界的;

(3) 对于任意一个典型斯科伦项 $t(v_1, \cdots, v_n)$, EM-蓝图 T 中包括了如下语句:

$$\text{如果 } t(c_1, \cdots, c_n) \text{ 是一个序数, 那么 } t(c_1, \cdots, c_n) < c_{n+1}.$$

证明　(2) 是 (1) 的特例.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设极限序数 $\alpha > \omega$ 来见证基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的无差别元序数集合 X 在 (M,E) 的序数中是无界的. 设 $t(v_1, \cdots, v_n)$ 为一个典型斯

科伦项. 假设 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 是一组 E-单增序列, 并且

$$(M,E) \models t^{(M,E)}(x_1, \cdots, x_n) \text{ 是一个序数.}$$

由 X 所持有的无界性, 令 $x_{n+1} \in X$ 来实现

$$(M,E) \models t^{(M,E)}(x_1, \cdots, x_n)\ E\, x_{n+1}.$$

这些就表明在条件 (2) 之下, 条件 (3) 成立.

(3) ⇒ (1). 设 $\alpha > \omega$ 是一个极限序数, X 是基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的无差别元序数集合. 在条件 (3) 成立的条件下, 我们来证明 X 在 (M,E) 的序数中无界. 为此, 任取 $y \in \mathrm{Ord}^{(M,E)}$. 令 t 为一个典型斯科伦项, $x_1, \cdots, x_n \in X$, 来实现等式

$$y = t^{(M,E)}(x_1, \cdots, x_n).$$

令 $x_{n+1} \in X$ 满足 $x_n\, E\, x_{n+1}$. 根据 (3), 我们就有

$$(M,E) \models t^{(M,E)}(x_1, \cdots, x_n)\ E\, x_{n+1}.$$

(1) 因此得证. □

我们从此称引理 1.19 中的条件 (3) 为 EM-蓝图的**无界条件**.

推论 1.3 (第二 EM-蓝图存在性) *如果存在一个拉姆齐基数, 那么一定存在一个满足无界条件的 EM-蓝图 T.*

证明 设 κ 是一个拉姆齐基数. 根据定理 1.14, 模型 $(L_\kappa, \in)$ 携带着一个势为 κ 的无差别元序数子集 $I \subset \kappa$. 令 X 为 I 的最先 ω 个无差别元之子集合, 且 $X = \{a_k \mid k < \omega\}$. 令 T 为模型 $(L_\kappa, \in, a_k)_{k<\omega}$ 在语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 中的真相. 对此 EM-蓝图 T, 引理 1.19 中条件 (2) 成立. 根据引理 1.19, 它的条件 (3) 也就得到满足. □

关于 EM-蓝图 T 的模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$, 我们还有第三个自然的问题：如果 EM-蓝图 T 满足无界条件, 那么它的模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 所携带的序型为 α 的无差别元序数集合 X 的前 ω 个无差别元 $Y = \{a_k \mid k < \omega\}$ 是否可以生成所有在第 ω 个无差别元之前的全部序数? 即, 令 a_ω 为 X 中的第 ω 个无差别元, 是否一定有

$$\{a \in M \mid a\, E\, a_\omega\} \subset \mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)\ ?$$

换句话问：是否同质子模型 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 中的这前 ω 个无差别元集合也在这个同质子模型中依旧满足无界条件?

为了叙述方便, 我们称 EM-蓝图 T 的模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ **具备神奇性**当且仅当它所携带的无差别元序数集合 X 在其序数之中是无界的, 并且如果 $Y \subset X$ 是前 ω 个无差别元的子集合, a_ω 是 X 的第 ω 个元素, $x \in M$ 是一个在 a_ω 之前的序数, 那么 $x \in \mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$.

引理 1.20 (神奇性条件) 设 T 是一个满足无界条件的 EM-蓝图. 那么如下命题等价:

(1) 对于任意一个极限序数 $\alpha > \omega$ 而言, 基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 具备神奇性;

(2) 存在一个极限序数 $\alpha > \omega$ 来见证基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 具备神奇性;

(3) 对于任意一个典型斯科伦项 $t\,(v_1,\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_{m+n})$, EM-蓝图 T 中包括了如下语句:

$$\begin{aligned}&\text{如果 } t\,(c_1,\cdots,c_{m+n}) < c_{m+1} \text{ 是序数, 那么}\\ &t\,(c_1,\cdots,c_{m+n}) = t\,(c_1,\cdots,c_m,c_{m+n+1},\cdots,c_{m+2n})\,.\end{aligned}$$

并且进一步地有, 如果基本模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 具备神奇性, X 是它所携带的序型为 α 的无差别元序数集合, $\omega < \gamma < \alpha$ 是一个极限序数, a_γ 是 X 的第 γ 个元素, $Y \subset X$ 为 X 的前 γ 个元素, 那么每一个 M 中的严格小于 a_γ 的序数 x 都在同质子模型 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 的论域之中.

证明 同样地, (2) 是 (1) 的特例.

(2) ⇒ (3). 设极限序数 $\alpha > \omega$ 见证模型 $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 具备神奇性. 设 X 是模型 (M,E) 中的序型为 α 的无差别元序数集合. 欲证明 (3) 成立, 我们只需证明如下命题：设 t 是一个典型斯科伦项, 设

$$x_1\,E\,\cdots\,E\,x_m\,E\,y_1\,E\,\cdots\,E\,y_n\,E\,z_1\,E\,\cdots\,E\,z_n$$

是 X 中的单增序列, 并且 $x_1,\cdots,x_m$ 是 X 的前 m 个元素, y_1 是 X 的第 ω 个元素, 以及

$$a = t^{(M,E)}\,(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n) \in \mathrm{Ord}^{(M,E)}\ \wedge\ a < y_1.$$

由神奇性, $a \in \mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$, 其中 Y 是 X 中所有在 y_1 之前的元素构成的子集合, 也就是 X 的前 ω 个元素的集合. 于是, 存在一个满足不等式 $m \leqslant k < \omega$ 的自然数 k 以及一个典型斯科伦项 s 来实现等式

$$(M,E) \models t\,[x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n] = s\,[x_1,\cdots,x_k]\,,$$

其中 $x_1,\cdots,x_k$ 是 X 的前 k 个元素, 也因此是 Y 的前 k 个元素. 这个等式是一个关于无差别元

$$x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_n$$

的命题. 因此, 根据无差别元的定义,

$$(M,E) \models t\,[x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n] = s\,[x_1,\cdots,x_k]\,.$$

从而, $t^{(M,E)}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=t^{(M,E)}(x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $\alpha>\omega$ 为一个极限序数. 设 $\mathcal{M}(T,\alpha)=(M,E)$ 为具备无界条件的 EM-蓝图 T 的一个实现模型. 设 X 为 (M,E) 所携带的序型为 α 的无差别元序数集合. 假设 (3) 成立, 我们来证明模型 (M,E) 具备神奇性.

设 $\omega\leqslant\gamma<\alpha$ 为一个极限序数. 令 a_γ 为 X 的第 γ 个元素. 令 $Y\subset$ 为 X 的前 γ 个元素. 设

$$x\in\mathrm{Ord}^{(M,E)}$$

为一个在 (M,E) 中小于 a_γ 的序数. 我们来证明：$x\in\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$.

因为 $(M,E)=\mathcal{SH}^{(M,E)}(X)$, 令 t 为一个典型斯科伦项,

$$x_1\,E\,\cdots\,E\,x_m\,E\,y_1\,E\,\cdots\,E\,y_n$$

为 X 中的元素, 且 $y_1=a_\gamma$, 来实现等式：$x=t^{(M,E)}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$. 在 X 中另取满足下述不等式关系的两组元素：

$$x_m\,E\,w_1\,E\,\cdots\,E\,w_n\,E\,y_1\text{ 以及 }y_n\,E\,z_1\,E\,\cdots\,E\,z_n.$$

由于 $x\,E\,y_1$, 根据条件 (3),

$$(M,E)\models t[x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n]=t[x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n].$$

根据无差别元的定义,

$$(M,E)\models t[x_1,\cdots,x_m,w_1,\cdots,w_n]=t[x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n].$$

由此可见 $x=t^{(M,E)}(x_1,\cdots,x_m,w_1,\cdots,w_n)$. 也就是说, $x\in\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$.

这不仅证明了 (1), 而且还证明了引理最后的结论. □

从现在起, 我们称一幅 EM-蓝图 T 为**一幅神奇 EM-蓝图**当且仅当它满足无界条件以及引理 1.20 中的条件 (3).

引理 1.20 最后的结论表明, 如果 T 是一幅神奇 EM-蓝图, $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 是它的一个具备神奇性的基本模型. 设 X 是它所携带的序型为 α 的无差别元序数集合, $\omega<\gamma<\alpha$ 是一个极限序数, a_γ 是 X 的第 γ 个元素, $Y\subset X$ 为 X 的前 γ 个元素, 那么同质子模型 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 就是 T 的一个基本模型 $\mathcal{M}(T,\gamma)$, 并且此同质子模型的序数形成它的同质扩张模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 的序数的一个前段.

不仅如此, 一幅神奇 EM-蓝图 T 的基础模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 所携带的序型为 α 的无差别元序数集合 X 事实上是 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 的一个无界闭子集. 所说的 “闭” 在这里是什么含义呢? 就是说, 对于任意的极限序数 $\omega\leqslant\gamma<\alpha$ 而言, X 中的第 γ 个元素 a_γ 在线性有序集合 $\left(\mathrm{Ord}^{(M,E)},\,E\right)$ 上是有界集合 $Y=\{a\in X\mid a\,E\,a_\gamma\}$ 的最小上界.

引理 1.21 (闭特性)　设 T 是一幅神奇 EM-蓝图. 设 $\alpha > \omega$ 是一个极限序数, $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 为 T 的一个基本模型, X 是这个基本模型所携带的序型为 α 的无差别元序数集合. 那么 X 在 $\mathrm{Ord}^{(M,E)}$ 中是闭的.

证明　设 $\alpha > \omega$ 是一个极限序数, $\mathcal{M}(T,\alpha) = (M,E)$ 为 T 的一个基本模型, X 是这个基本模型所携带的序型为 α 的无差别元序数集合. 设 $\omega < \gamma < \alpha$ 是一个极限序数, a_γ 是 X 的第 γ 个元素, $Y \subset X$ 为 X 的前 γ 个元素, 那么同质子模型 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 就是 T 的一个基本模型 $\mathcal{M}(T,\gamma)$, 并且此同质子模型的序数形成它的同质扩张模型 $\mathcal{M}(T,\alpha)$ 的序数的一个前段. 关键在于 Y 在 $\mathcal{SH}^{(M,E)}(Y)$ 的序数中也是无界的. 所以 a_γ 就是 Y 在 $\mathrm{Ord}^{(M,E)}$ 中的最小上界. □

自然的问题就是在什么情形下存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图. 我们先来证明一个极小化引理.

引理 1.22　设 κ 是一个不可数基数. 如果存在一个极限序数 λ 以至于模型 $(L_\lambda,\in)$ 携带着一个序型为 κ 的无差别元序数集合, 那么一定存在一个足够大的极限序数 γ 以及它的一个序型为 κ 的子集 $I \subset \gamma$ 来见证 I 就是模型 $(L_\gamma,\in)$ 所携带的在 γ 中无界的一个无差别元序数集合, 从而模型 $(L_\gamma,\in)$ 就具备神奇性.

证明　设 λ 为满足后述要求的最小的极限序数 η : 模型 $(L_\eta,\in)$ 携带着一个序型为 κ 的无差别元序数集合. 令 $J \subset \lambda$ 为模型 $(L_\eta,\in)$ 的序型为 κ 的无差别元序数集合. 令 $\mathcal{A} = \mathcal{SH}^{L_\lambda}(J)$. 那么 $\mathcal{A} \prec (L_\lambda,\in)$. 根据凝聚化引理 (定理 II.2.10), $\mathcal{A}$ 与某个 $(L_\beta,\in)$ 同构 $(\beta \leqslant \lambda)$. 令 π 为 $\mathcal{A}$ 的传递化映射, 并且 $I = \pi[J]$. 此时, I 是模型 $(L_\beta,\in)$ 的序型为 κ 的无差别元序数集合, 并且 $(L_\beta \in) = \mathcal{SH}^{L_\beta}(I)$. 根据 λ 的最小性, $\beta = \lambda$.

现在我们来证明: I 在 λ 中无界.

假设不然. 令 $\alpha < \lambda$ 为 I 的一个极限序数上界. 令 t 为一个典型斯科伦项以及

$$\{\gamma_1 < \cdots < \gamma_n\} \subset I$$

来实现等式

$$\alpha = t^{L_\lambda}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n).$$

令 $J = \{a \in I \mid a > \gamma_n\}$.

断言　J 是模型 $(L_\alpha,\in)$ 的一个序型为 κ 的无差别元序数集合.

设 $\varphi(v_1,\cdots,v_k)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $a_1 < \cdots < a_k$ 为 J 中的元素. 那么

$$\begin{aligned}&L_\alpha \models \varphi[a_1,\cdots,a_k] \leftrightarrow\\&L_\lambda \models (L_\alpha \models \varphi[a_1,\cdots,a_k]).\end{aligned}$$

上述对等式的左端是一个关于 $a_1,\cdots,a_k,\alpha$ 的命题. 又因为 $\alpha=t^{L_\lambda}(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$, 所以, 上述对等式的左端是一个关于 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n,a_1,\cdots,a_k$ 的命题:

$$\psi\left(v_1,\cdots,v_n,v_{n+1},\cdots,v_{n+k}\right).$$

这样

$$L_\lambda\models\psi\left[\gamma_1,\cdots,\gamma_n,a_1,\cdots,a_k\right]\iff L_\lambda\models\left(L_\alpha\models\varphi\left[a_1,\cdots,a_k\right]\right).$$

由于 I 是 L_λ 的无差别元序数集合, 上述对等式表明 J 的确就是 L_α 的无差别元集合. 断言于是得证.

此得证的断言恰恰与 λ 的选择相矛盾. 于是, I 的确在 λ 中无界.

上述 $I\subset\lambda$ 有如下性质：其序型为 κ; 它是 L_λ 的无差别元序数集合; $L_\lambda=\mathcal{SH}^{L_\lambda}(I)$. 现在我们在所有具备这三条性质的 I 中按照 I 的第 ω 个元素的大小来选取：令 I 为同时具备上述三条性质以及 I 的第 ω 个元素尽可能小的集合.

断言 在这样的无差别元序数集合支撑下, 模型 $(L_\lambda,\in)$ 就具备神奇性.

假设不然. 根据神奇性条件引理 (引理 1.20), 令 t 为一个满足下述特性的典型斯科伦项：对于 I 中任意的

$$x_1<\cdots<x_m<y_1<\cdots<y_n<z_1<\cdots<z_n,$$

在 L_λ 中都有

$$t^{L_\lambda}\left(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n\right)<y_1,$$

以及

$$t^{L_\lambda}\left(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n\right)\neq t^{L_\lambda}\left(x_1,\cdots,x_m,z_1,\cdots,z_n\right).$$

令 $x_1<\cdots<x_m$ 为 I 的最先的 m 个元素. 我们将

$$\{a\in I\mid a>x_m\}$$

按照紧邻的 n 个元素为一组的递增顺序划分成 κ 个小组以至于

$$\max\left(u_\alpha\right)<\min\left(u_{\alpha+1}\right).$$

对于每一个 $\alpha<\kappa$, 令

$$\gamma_\alpha=t^{L_\lambda}\left(x_1,\cdots,x_m,u_\alpha\right).$$

根据无差别元定义, 对于 $\alpha<\beta<\kappa$, 必有 $\gamma_\alpha\neq\gamma_\beta$. 从而, 对于 $\alpha<\beta$, 一定有 $\gamma_\alpha<\gamma_\beta$. 令

$$J=\{\gamma_\alpha\mid\alpha<\kappa\}.$$

此 $J \subset \lambda$ 是一个序型为 κ 的子集合.

我们现在来证明：J 是 L_λ 的一个无差别元序数集合. 这是因为任意给定表达式 φ, 命题

$$\varphi\left[\gamma_{\alpha_1}, \cdots, \gamma_{\alpha_k}\right]$$

在 L_λ 中的真假值并不依赖于这些参数 $\gamma_{\alpha_1}, \cdots, \gamma_{\alpha_k}$ 在 J 中的选择. 这是由它们的定义以及 u_{α_ℓ} 所确定的：命题

$$\varphi\left[t^{L_\lambda}\left(x_1, \cdots, x_m, u_{\alpha_1}\right), \cdots, t^{L_\lambda}\left(x_1, \cdots, x_m, u_{\alpha_k}\right)\right]$$

在 L_λ 中的真假值并不依赖于 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$ 的选择. 于是, J 是 L_λ 的一个无差别元序数集合.

令 $\mathcal{A} = \mathcal{SH}^{L_\lambda}(J)$, 以及令 π 为它的传递化映射. 那么 $\pi[\mathcal{A}] = L_\lambda$, 并且 $K = \pi[J]$ 是 L_λ 的序型为 κ 的无差别元序数集合以及 $L_\lambda = \mathcal{SH}^{L_\lambda}(K)$. 可是, a_ω 作为 u_ω 的第一个元素严格大于 γ_ω. 因此

$$\pi\left(\gamma_\omega\right) \leqslant \gamma_\omega < a_\omega.$$

这就与 I 的选择中关于 a_ω 的最小性所起的关键作用相矛盾. 这个矛盾就证明 I 在 λ 中无界. □

现在我们可以来证明所需要的存在性定理：

定理 1.15 (存在性)　*如果存在一个拉姆齐基数, 那么一定存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图 T.*

证明　根据定理 1.14, 模型 $(L_\kappa, \in)$ 携带着一个势为 κ 的无差别元序数子集 $I \subset \kappa$. 基于此模型, 我们得到一幅满足有秩条件的 EM-蓝图 T. 根据上面的引理 1.22, 我们就得到我们所需要的. □

定理 1.16 (Silver)　*如果存在一个拉姆齐基数, 那么下述命题成立:*

(i) *如果 $\kappa < \lambda$ 是两个不可数基数, 那么 $(L_\kappa, \in) \prec (L_\lambda, \in)$.*

(ii) *存在唯一的一个在整个序数轴中无界的闭子类 I 以至于所有的不可数基数都在 I 中, 并且对于每一个不可数基数 κ 都有*

(a) $|I \cap \kappa| = \kappa$;

(b) *$I \cap \kappa$ 是模型 $(L_\kappa, \in)$ 的无差别元序数集合;*

(c) *每一个 $a \in L_\kappa$ 都是在模型 $(L_\kappa, \in)$ 上以 $I \cap \kappa$ 中的元素为参数可定义的.*

从此开始, I 中的元素就被称为银杰 (Silver)**无差别元**.

银杰定理 (定理 1.16) 的证明由前面的定理 1.15 以及下述引理 1.23 给出. 现在我们的任务就是要证明下述引理：

引理 1.23 如果存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图 T, 那么定理 1.16 中的结论 (i) 和 (ii) 成立.

这一引理的证明由回答一系列问题的小引理组成.

现在假设存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图 T. 于是, 对于每一个极限序数 $\alpha > \omega$, 基本模型 $\mathcal{M}(T, \alpha)$ 与某一个模型 $(L_\gamma, \in)$ 一样, 从而 $\mathcal{M}(T, \alpha) = (M, E)$ 的传递化是一个模型 $(L_\beta, \in)$. 因此, 我们就将这一模型作为基本模型 $\mathcal{M}(T, \alpha) = (L_{\beta(\alpha)}, \in)$.

问题一：对于不可数的基数 λ 而言, $\beta(\lambda)$ 会取什么样的值?

引理 1.24 如果 λ 是一个不可数基数, 那么 $\mathcal{M}(T, \lambda) = (L_\lambda, \in)$.

证明 如上面的分析, 存在一个极限序数 $\beta = \beta(\lambda)$ 以至于 $\mathcal{M}(T, \lambda) = (L_\beta, \in)$. 根据引理 1.21, 令它所携带的序型为 λ 的无差别元序数的无界闭子集为 $I = I_\lambda \subset \beta$. 由于 I 的序型是 λ, 自然就有 $\beta \geqslant \lambda$.

假设 $\lambda < \beta$. 因为 I 在 β 中无界, 令 $\gamma < \lambda$ 为一个极限序数来实现 I 的第 γ 个元素 $a_\gamma > \lambda$. 根据 EM-蓝图 T 的神奇性,

$$\{\delta \in \beta \mid \delta < a_\gamma\} \subset \mathcal{SH}^{L_\beta}(Y),$$

其中 $Y = \{\delta \in I \mid \delta < a_\gamma\}$. 此时, 一方面 $\lambda \subset \mathcal{SH}^{L_\beta}(Y)$, λ 是一个基数; 另一方面 $\left|\mathcal{SH}^{L_\beta}(Y)\right| = |\gamma| < \lambda$. 这就是一个矛盾. 因此, $\lambda = \beta$. □

由此引理, 对于每一个不可数基数 λ, $\mathcal{M}(T, \lambda) = (L_\lambda, \in)$, 并且此模型携带序型为 λ 的无差别元序数集合是 λ 的一个无界闭子集 I_λ.

问题二：假如 $\kappa < \lambda$ 为两个不可数基数, I_κ 与 I_λ 之间可存在某种协调性?

引理 1.25 如果 $\kappa < \lambda$ 为两个不可数基数, 那么 $I_\kappa = \kappa \cap I_\lambda$, $\kappa \in I_\lambda$, 并且 $L_\kappa = \mathcal{SH}^{L_\lambda}(I_\kappa) \prec L_\lambda$.

证明 令 $J \subset I_\lambda$ 为 I_λ 的前 κ 个元素构成的子集合. 令 $\mathcal{A} = \mathcal{SH}^{L_\lambda}(J)$. 这是一个携带着一个序型为 κ 的无差别元序数集合的基本模型 $\mathcal{M}(T, \kappa)$, 并且它的序数的全体形成 λ 的一个前段. 令 $\beta = \mathrm{Ord}^{\mathcal{A}}$. 自然 $\mathcal{A}$ 的传递化是 $(L_\kappa, \in)$. 由此得到：$\beta = \kappa$ 以及 $J = I_\kappa$. 从而, $I_\kappa = \kappa \cap I_\lambda$. 因为 $I\lambda$ 是闭子集, $\kappa \cap I_\lambda$ 在 κ 中无界, 所以 $\kappa \in I_\lambda$ 是 I_λ 的第 κ 个元素.

因为 $\mathcal{A} \prec (L_\lambda, \in)$, $\mathcal{A}$ 的论域对于可定义函数

$$\lambda \ni \alpha \mapsto F(\alpha) = \text{ 在秩序 } <_L \text{ 下的第 } \alpha \text{ 个集合 } \in L_\lambda$$

是封闭的; 又因为 $\mathrm{Ord}^{\mathcal{A}} = \kappa$, 所以 $\mathcal{A}$ 的论域就是

$$\{F(\alpha) \mid \alpha < \kappa\} = L_\kappa.$$

□

基于这个引理, 令

$$I = \bigcup \{ I_\kappa \mid \omega < \kappa \wedge \kappa = |\kappa| \}.$$

于是, 对于每一个不可数基数 κ 都有

(i) $\kappa \in I$, 并且 $I_\kappa = I \cap \kappa$ 是 κ 的一个序型为 κ 的无界闭子集, 从而 I 在 Ord 中是无界的也是闭的;

(ii) $I \cap \kappa$ 是 $(L_\kappa, \in)$ 的无差别元序数集合;

(iii) L_κ 中的每一个元素 a 都在 $(L_\kappa, \in)$ 之上依 $I \cap \kappa$ 中的元素可定义, 并且对于任意两个不可数基数 $\kappa < \lambda$, $L_\kappa \prec L_\lambda$.

问题三：满足有秩条件的神奇 EM-蓝图唯一吗?

引理 1.26 *至多存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图.*

证明 假设存在一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图 T. 如上面的分析, 我们得到序数的一个无界闭类 I. 因为 $(L_{\aleph_\omega}, \in)$ 是基本模型 $\mathcal{M}(T, \aleph_\omega)$, 并且每一个不可数的 $\aleph_n \in I$, 所以

$$T = \mathrm{Th}\,(L_{\aleph_\omega}, \in, \aleph_n)_{1 \leqslant n < \omega}. \qquad \square$$

定义 1.10 ($0^\#$) *如果 $0^\#$ 存在, $0^\#$[4] 就是那个唯一的满足有秩条件的神奇 EM-蓝图.*

于是, 从此以后, 讲 “$0^\#$ 存在”, 就是讲 “满足有秩条件的神奇 EM-蓝图存在”.

问题四：上述 I 唯一吗?

引理 1.27 *对于每一个不可数正则基数 κ 来说, 至多存在一个满足下述要求的 κ 的无界闭子集 C:*

(i) C 是模型 $(L_\kappa, \in)$ 的无差别元序数集合;

(ii) $L_\kappa = \mathcal{SH}^{L_\kappa}(C)$.

证明 设 $C \subset \kappa$ 为一个满足要求的 κ 的无界闭子集. 令 $\{a_n \mid n < \omega\}$ 为 C 的前 ω 个元素. 令

$$T = \mathrm{Th}\,(L_\kappa, \in, a_n)_{n<\omega}.$$

那么 T 是一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图. 依此蓝图, 我们按照前面的分析, 得到一个序数的无界闭类 I 以及 κ 的一个无界闭子集 $I_\kappa = \kappa \cap I$. 因此, $C \cap I_\kappa$ 也是 κ 的无界闭子集. 由满足有秩条件的神奇 EM-蓝图的唯一性, 这三个无界闭子集的前 ω 元素就都给出相等的理论. 因此, $C = C \cap I_\kappa = I_\kappa$. $\square$

综合引理 1.22 以及引理 1.23, 我们得到如下推论:

推论 1.4 *$0^\#$ 存在当且仅当存在一个极限序数 λ 来见证模型 $(L_\lambda, \in)$ 携带着一个不可数的无差别元序数集合.*

4 中文可以念着 “零井号”, 英文读作 Zero Sharp.

由此, 我们回忆起库能定理 (定理 1.13). 于是, 有下述定理:

定理 1.17 下述命题等价:

(1) 存在一个非平凡的同质嵌入映射 $j : L \prec L$;

(2) 存在一个极限序数 λ 来见证模型 $(L_\lambda, \in)$ 携带着一个不可数的无差别元序数集合;

(3) $0^\#$ 存在;

(4) 存在两个极限序数 $\alpha < \beta$ 以及一个非平凡的同质嵌入映射 $k : L_\alpha \prec L_\beta$ 来见证 $\mathrm{Crit}(k) < |\alpha|$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由库能定理 (定理 1.13) 给出; (2) $\Rightarrow$ (3) 由上面的推论 1.4 给出. (1) 与 (4) 的等价性由定理 1.12 以及它前面的解释给出. 剩下的我们只需证明 (3)$\Rightarrow$(1).

由于 $0^\#$ 存在, 令 I 为银杰无差别元序数无界闭类. 令 $j_0 : I \to I$ 为一个非平凡的保序映射 (单调递增映射). 对于任意一个典型斯科伦项 t, 对于任意一组 I 中的元素 $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n$, 下面的等式确定了将 j_0 延拓成从 L 到 L 的映射 j:

$$j\left(t^L\left(\gamma_1, \cdots, \gamma_n\right)\right) = t^L\left(j_0\left(\gamma_1\right), \cdots, j_0\left(\gamma_n\right)\right).$$

应用无差别元的定义, 可以验证 j 的定义毫无歧义, 并且 $j : L \prec L$. $\square$

推论 1.5 如果 $0^\#$ 存在, 那么

(1) $0^\# = \left\{\sigma \in \mathcal{L}_\in^* \;\middle|\; \sigma \text{ 是语句, 且 } \left(L_{\aleph_\omega^{\mathrm{V}}}, \in, \aleph_n^{\mathrm{V}}\right)_{1 \leqslant n < \omega} \models \sigma\right\}$;

(2) $|\mathfrak{P}(\omega) \cap L| = \aleph_0$;

(3) 在 L 中可定义的每一个可构造集合都是彻底可数集合, 比如, $\aleph_\omega^L \in \mathscr{H}_{\aleph_1}$;

(4) 每一个不可数基数都是 L 中的不可达基数.

证明 (1) 这是因为对于 $1 \leqslant n \leqslant \omega$, $\aleph_n^{\mathrm{V}}$ 都是一个银杰无差别元, 而 $I_{\aleph_\omega^{\mathrm{V}}}$ 是模型 $\left(L_{\aleph_\omega^{\mathrm{V}}}, \in,\right)$ 的无差别元序数无界闭子集; 模型 $\left(L_{\aleph_\omega^{\mathrm{V}}}, \in, \aleph_n^{\mathrm{V}}\right)_{1 \leqslant n < \omega}$ 是语言 $\mathcal{L}_\in^*$ 的一个典型结构; 它的真相就是一幅满足有秩条件的神奇 EM-蓝图. 根据唯一性, 它的真相就是 $0^\#$.

(2) 令 γ 为最小的银杰无差别元序数. 那么 $\omega_1^L < \gamma$.

(3) 设 $x \in L$ 是一个由表达式 φ 可定义的集合. 那么 φ 也就在 $(L_{\aleph_1}, \in)$ 上定义 x, 所以

$$x \in L_{\aleph_1} \subset \mathscr{H}_{\aleph_1}.$$

(4) 因为每一个不可数的基数都是一个银杰无差别元, 所以它们在 L 中都具备同样的一阶性质. 令 $\kappa = \aleph_1$, 那么 $L \models \kappa$ 是一个正则基数; 令 $\eta = \aleph_\omega$, 那么 $L \models \eta$ 是一个极限基数. 于是, 对于任意的 $\alpha \geqslant 1$, 令 $\lambda = \aleph_\alpha$, 则 $L \models \lambda$ 是一个正则极限基数. 由于 $L \models \mathrm{GCH}$, 所以每一个 V 中的不可数基数都在 L 中是不可达基数. 事实上, 每一个银杰无差别元都在 L 中是不可达基数. $\square$

注意, 当 $0^{\#}$ 存在时, 它也可以以如下形式来定义：

$$0^{\#} = \bigcup_{n<\omega} \left\{ \varphi(v_1, \cdots, v_n) \in \mathcal{L}_{\in} \mid \left(L_{\aleph_\omega^{\mathrm{V}}}, \in \right) \models \varphi\left[\aleph_1^{\mathrm{V}}, \cdots, \aleph_n^{\mathrm{V}} \right] \right\}.$$

在这种形式定义下, $0^{\#}$ 便是集合论纯语言的表达式的一个极大可满足集合. 自然, 这样定义的前提是在定义 EM-蓝图时, 我们称集合论纯语言的一个极大可满足的表达式集合 T 为一个 EM-蓝图当且仅当有一个典型结构 $(L_\lambda, \in)$ 在下述变元赋值映射之下满足 T ：对于每一个 $k < \omega$, a_k 是变元符号 v_k 的赋值, 其中

(1) $\lambda > \omega$ 为一个极限序数;

(2) 对于每一个 $k < \omega$, $a_k < a_{k+1}$ 都是序数;

(3) 集合 $I = \{a_k \mid k < \omega\}$ 是模型 $(L_\lambda, \in)$ 的无差别元集合.

$a^{\#}$

现在我们来讨论如何对任意一个集合 a 定义 $a^{\#}$ 的问题. 也就是怎样将 $0^{\#}$ 的定义推广的问题.

最简单的情形是当 $a \subset \omega$ 时, 所有前面有关 $0^{\#}$ 和银杰无差别元的结论都可以直接相对化成关于全体实数 $x \subset \omega$ 的结果.

回顾一下在 II.2.2.1 小节中我们定义的相对可构造集层次 (定义 II.2.23). 具体的作法是对集合论纯语言添加一个一元谓词符号 U, 在这个扩展语言中我们延拓了传递集合上的可定义子集的概念, 然后定义了相对可构造集层次 $\langle L_\alpha[U] \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\rangle$. 当我们用自然数的一个子集合 $x \subset \omega$ 来解释一元谓词 U 时, 我们就得到了在实数 x 基础上的可构造集论域 $L[x]$：$\langle L_\alpha[x] \mid \alpha \in \mathrm{Ord}\rangle$.

在这种情形下, 根据定理 1.14, 如果 κ 是一个拉姆齐基数, 那么模型 $(L_\kappa[x], \in, x)$ 就携带一个在 κ 中无界的无差别元序数集合. 在此基础上, 对于任何一个极限序数 $\lambda > \omega$, 以携带无穷多个无差别元序数集合 I 的模型 $(L_\lambda[x], \in, x)$ 为典型模型, 将 EM-蓝图的概念延拓到对语言 $\mathcal{L}_{\in}^{*}$ 添加一个一元谓词符号 P 的语言 $\mathcal{L}_{\in}^{*} \cup \{P\}$ 之上, 考虑在扩张模型

$$(L_\lambda[x], \in, x,\, a_k)_{k<\omega}$$

的真相, 其中 $I = \{a_k \mid k < \omega\}$ 为减缩模型 $(L_\lambda[x], \in, x)$ 的无差别元序数集合. 然后, 用几乎一样的证明就得到：如果 κ 是一个拉姆齐基数, 那么对于每一个 $x \subset \omega$, 都存在唯一的一幅满足有秩条件的神奇蓝图; 都有唯一的可定义的序数的无界闭子类 I_x 以至于每一个不可数基数都在 I_x 之中, 并且对于每一个不可数基数 λ, $\lambda \cap I_x$ 都是模型 $(L_\lambda[x], \in, x)$ 在 λ 中无界的无差别元序数集合, 以及 $L_\lambda[x]$ 中的元素都在模型 $(L_\lambda[x], \in, x)$ 之上用 $\lambda \cap I_x$ 中的元素可定义.

于是, 既可以用语言 $\mathcal{L}_{\in}^{*}\cup\{P\}$ 的典型模型

$$(L_{\aleph_\omega}[x],\in,x,\aleph_n)_{1\leqslant n<\omega}$$

的真相来定义 $x^{\#}$, 也可以用集合论纯语言的极大可满足表达式集合

$$\bigcup_{n<\omega}\{\varphi(v_1,\cdots,v_n)\mid(L_{\aleph_\omega}[x],\in,x)\models\varphi[\aleph_1,\cdots,\aleph_n]\}$$

来定义 $x^{\#}$.

同样地, 可以证明: $x^{\#}$ 存在当且仅当存在非平凡的 $j:L[x]\prec L[x]$.

因而上面的 $0^{\#}$ 也就是这种更一般情形下的一种简单而特殊的情形罢了: 令 $x=\varnothing\subset\omega$, $0^{\#}=\varnothing^{\#}$. 自然, $0^{\#}$ 也等于 $\omega^{\#}$.

在从 $0^{\#}$ 到 $x^{\#}$ 的推广 $(x\subset\omega)$ 过程中, 我们默认两个基本事实: 第一, $x\in L[x]$, 因为 $x\subset\omega$, 所以 $x=x\cap L[x]\in L[x]$; 第二, 当将一元谓词符号解释为 ω 的子集时, 所有的典型模型都不会受到任何影响, 因为在所涉及的嵌入映射之中, x 都是不动点. 注意到这两点之后, 将这种推广进一步推进就完全成为可能.

比如, 我们对于拉姆齐基数 κ 以下的任何一个极限序数 $\alpha<\kappa$, 对每一个 $\beta<\alpha$, 对语言 $\mathcal{L}_{\in}^{*}\cup\{P\}$ 再添加新常元符号 d_β, 对于 $A\subset\alpha$, 如果 $A\in L[A]$, 对于极限序数 $\gamma>\alpha^{+}$, 考虑模型

$$(L_\gamma[A],\in,A,d_\beta)_{\beta<\alpha}.$$

根据定理 1.14, 模型

$$(L_\kappa[A],\in,A,d_\beta)_{\beta<\alpha}$$

携带在 κ 中无界的无差别元序数集合. 在此基础上, 就可以定义相对于序数集合 A 的满足有秩条件的神奇蓝图的概念, 以及相对于 A 的可构造集论域 $L[A]$ 上的银杰无差别元序数无界闭类 I_A. 自然, 我们只能指望所有严格大于 α 的基数会是银杰无差别元. $A^{\#}$ 也就自然有定义. 在这种情形下, 我们会要求非平凡嵌入映射 $j:L[A]\prec L[A]$ 的临界点严格大于 $\sup(A)$ 以至于 $A=j(A)$. 于是, 当我们假设论域中有任意大的拉姆齐基数时, 任何一个序数的集合 A 都有一幅相对于它的唯一的满足有秩条件的神奇蓝图 $A^{\#}$.

和实数 $a\subset\omega$ 情形最接近的是当一个集合 a 满足条件 $a\in L[a]$ 时的情形. 对于这样的集合, 我们可以直接定义相对于参数的无差别元类.

回顾一下, 给定一个集合 a, $\mathcal{TC}(\{a\})$ 是包括集合 a 在其内的最小的传递集合:

$$\mathcal{TC}(\{a\})=\bigcap\left\{y\subset\mathrm{V}_\gamma\mid\gamma=\mathrm{RK}(a)+1\wedge a\in y\wedge y\text{是传递的}\right\}.$$

定义 1.11　设 a 是一个集合并且 $a \in L[a]$.

(1) 称一个类 $C \subset L[a] \cap \mathrm{Ord}$ 是 $L[a]$ 的 a **之上的无差别元类**当且仅当对于

$$\langle b_1, \cdots, b_m \rangle \in (\mathcal{TC}(\{a\}))^{<\omega},$$

对于 C 中的任意两组 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ 和 $\beta_1 < \cdots < \beta_n$, 以及对于集合论纯语言的任意彰显自由变元的表达式

$$\varphi\left(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_{m+n}\right),$$

都有

$$L[a] \models \varphi\left[b_1, \cdots, b_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\right] \leftrightarrow L[a] \models \varphi\left[b_1, \cdots, b_m, \beta_1, \cdots, \beta_n\right].$$

(2) 固定一个从集合论纯语言的表达式集合到自然数集合的递归映射 $\varphi \mapsto n_\varphi$. 设 $a \in L[a]$. 令 ν 为满足关系式 $a \in L_{\nu^+}[a]$ 的最小序数. 设 ν^+ 的一个无界闭子集 C 是 $L_{\nu^+}[a]$ 的 a 之上的无差别元集合, 那么对于 $(n, t) \in \omega \times (\mathcal{TC}(\{a\}))^{<\omega}$, 令 $(n, t) \in a^{\#}$ 当且仅当存在一个 $\varphi\left(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_{m+k}\right)$ 以及存在一组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_< \in [C]^{<\omega}$ 以至于

(a) $\mathrm{dom}(t) = m$;

(b) $n = n_{\varphi(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_{m+k})}$;

(c) $(L_{\nu^+}[a], \in, a) \models \varphi\left[t(0), \cdots, t(m-1), \alpha_1, \cdots, \alpha_k\right]$.

如果存在 ν^+ 的一个无界闭子集 C 以至于 C 是 $L_{\nu^+}[a]$ 的 a 之上的无差别元集合, 就称 $a^{\#}$ 存在; 否则, 就称 $a^{\#}$ 不存在.

(3) 如果 $a \subseteq \mathrm{V}_\omega$, 并且 $a^{\#}$ 存在, 那么 $a^{\#}$ 就和下述自然数子集合等同起来:

$$\left\{n \in \omega \;\middle|\; (n, \langle a \rangle) \in a^{\#}\right\}.$$

(这是因为 $\mathcal{TC}(a) \subseteq \mathrm{V}_\omega$, 从而其中的每一个元素在 $L_{\omega_1}[a]$ 中都是可定义的.)

引理 1.28　设 κ 是一个可测基数. 令 U 为 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 设 $a \in \mathrm{V}_\kappa$ 并且 $a \in L[a]$. 那么 $a \in L_\kappa[a]$, 并且 U 中有一个集合 $X \subset \kappa$ 以至于 X 是 $L_\kappa[a]$ 的 a 之上的无差别元集合.

定理 1.18　设 η 是一个无穷基数. 设 $a \in \mathrm{V}_{\eta^+}$ 并且 $a \in L[a]$. 那么如下命题对等:

(1) $a^{\#}$ 存在.

(2) 存在一个正则基数 $\gamma > \eta$ 来实现下述目标:

(a) $a \in L_\gamma[a]$;

(b) 存在 γ 的一个无界闭子集 C 以至于 C 是 $L_\gamma[a]$ 的 a 之上的无差别元集合.

(3) $a \in L_{\eta^+}[a]$, 并且存在一个在 Ord 中无界的闭类 C^a 以至于 C^a 是 $L[a]$ 的 a 之上的无差别元类, 并且

$$L[a] = \mathcal{SH}\left(C^a \cup \mathcal{TC}(\{a\})\right),$$

以及对于每一个基数 $\gamma \geqslant \eta^+$, 都有

$$L_\gamma[a] = \mathcal{SH}\left((C^a \cap \gamma) \cup \mathcal{TC}(\{a\})\right),$$

其中生成斯科伦闭包的函数半群是 $L[a]$ 中依据其典型秩序所定义出来的斯科伦函数的复合半群. 此种情形下, 称 C^a 中的元素为 $L[a]$ 的 a 之上的银杰无差别元.

推论 1.6 (1) 如果 κ 是一个可测基数, $a \in \mathrm{V}_\kappa$, 并且 $a \in L[a]$, 那么 $a^\#$ 存在.

(2) 设 γ 是一个无穷基数, $a \in \mathrm{V}_{\gamma^+}$, $a \in L[a]$, 并且 $a^\#$ 存在. 如果 $\gamma^+ \leqslant \kappa < \lambda$ 是两个基数, 那么

$$L_\kappa[a] \prec L_\lambda[a] \prec L[a].$$

现在我们来讨论对于那些不满足 $a \in L[a]$ 的集合定义 $a^\#$ 的问题. 此时应用模型 $L(a)$ (参见定义 II.2.33).

依旧固定一个从集合论纯语言的表达式集合到自然数集合的递归映射 $\varphi \mapsto n_\varphi$. 对于集合 a, 当 $a \notin L[a]$ 时, 令 $\nu = \nu(a)$ 为满足下述要求的最小基数 γ: $a \in \mathrm{V}_{\gamma^+}$ 以及 $|\mathcal{TC}(\{a\})| \leqslant \gamma$.

定义 1.12 设 a 为一个集合, $a \notin L[a]$, $\nu = \nu(a)$.

(1) 称一个类 $C \subset L(a) \cap \mathrm{Ord}$ 是 $L(a)$ 的 a 之上的无差别元类当且仅当对于

$$\langle b_1, \cdots, b_m \rangle \in (\mathcal{TC}(\{a\}))^{<\omega},$$

对于 C 中的任意两组 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ 和 $\beta_1 < \cdots < \beta_n$, 以及对于集合论纯语言的任意彰显自由变元的表达式

$$\varphi\left(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_{m+n}\right),$$

都有

$$L(a) \models \varphi\left[b_1, \cdots, b_m, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\right] \leftrightarrow L(a) \models \varphi\left[b_1, \cdots, b_m, \beta_1, \cdots, \beta_n\right].$$

(2) 设 ν^+ 的一个无界闭子集 C 是 $L_{\nu^+}(a)$ 的 a 之上的无差别元集合, 那么对于 $(n,t) \in \omega \times (\mathcal{TC}(\{a\}))^{<\omega}$, 令 $(n,t) \in a^\#$ 当且仅当存在一个

$$\varphi\left(v_1, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_{m+k}\right)$$

以及存在一组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_< \in [C]^{<\omega}$ 以至于

(a) $\mathrm{dom}(t) = m$;

(b) $n = n_{\varphi(v_1,\cdots,v_m,v_{m+1},\cdots,v_{m+k})}$;

(c) $(L_{\nu^+}(a), \in, a) \models \varphi[t(0), \cdots, t(m-1), \alpha_1, \cdots, \alpha_k]$.

如果存在 ν^+ 的一个无界闭子集 C 以至于 C 是 $L_{\nu^+}(a)$ 的 a 之上的无差别元集合, 就称 $a^\#$ 存在; 否则, 就称 $a^\#$ 不存在.

引理 1.29 设 κ 是一个可测基数. 令 U 为 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 设 $a \in \mathrm{V}_\kappa$, 并且 $a \notin L[a]$. 那么 $a \in L_\kappa(a)$, 并且 U 中有一个集合 $X \subset \kappa$ 以至于 X 是 $L_\kappa(a)$ 的 a 之上的无差别元集合.

由于对于任意的序数 γ, $L_\gamma(a)$ 中的元素都是在 $L(a)$ 中应用 $\mathcal{TC}(\{a\}) \cup \gamma$ 中的元素以相对于 $L_\gamma(a)$ 内外一致的方式可定义的, 尽管没有在 $L(a)$ 之内可定义的秩序, 但是我们仍然可以对 $X \supset \mathcal{TC}(\{a\})$ 定义可定义闭包 $\mathscr{D}^{L_\gamma(a)}(X)$ 以及 $\mathscr{D}^{L(a)}(X)$.

定理 1.19 设 η 是一个无穷基数, 并且 $a \in \mathrm{V}_{\eta^+}$, $|\mathcal{TC}(\{a\})| \leqslant \eta$, $a \notin L[a]$. 那么如下命题对等:

(1) $a^\#$ 存在.

(2) 存在一个正则基数 $\gamma > \eta$ 来实现下述目标:

(a) $a \in L_\gamma(a)$;

(b) 存在 γ 的一个无界闭子集 C 以至于 C 是 $L_\gamma(a)$ 的 a 之上的无差别元集合.

(3) 存在一个在 Ord 中无界的闭类 C^a 以至于 C^a 是 $L(a)$ 的 a 之上的无差别元类, 并且对于每一个基数 $\gamma \geqslant \eta^+$, 都有

$$L_\gamma(a) = \mathscr{D}^{L_\gamma(a)}\left((C^a \cap \gamma) \cup \mathcal{TC}(\{a\})\right),$$

从而 $L(a) = \mathscr{D}^{L(a)}\left(C^a \cup \mathcal{TC}(\{a\})\right)$. 此种情形下, 称 C^a 中的元素为 $L(a)$ 的 a 之上的银杰无差别元.

推论 1.7 (1) 如果 κ 是一个可测基数, $a \in \mathrm{V}_\kappa$, 那么 $a^\#$ 存在.

(2) 设 γ 是一个无穷基数, $a \in \mathrm{V}_{\gamma^+}$, 并且 $a^\#$ 存在. 如果 $\gamma^+ \leqslant \kappa < \lambda$ 是两个基数, 那么

$$L_\kappa(a) \prec L_\lambda(a) \prec L(a).$$

这样一来, 我们有下述定理:

定理 1.20 如果 κ 是一个可测基数, $a \in \mathrm{V}_\kappa$, 那么 $\exists x\ \left(x = a^\#\right)$.

后面我们将需要对实数子集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 的内模型 $L(A)$ 以及 $A^\#$ 给予特别关注. 由于 $\mathbb{R} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 对于满足 $A = \mathbb{R} \cap L(A)$ 的集合 A, 我们可以对等地考虑对集合论的纯语言添加常元符号的方式来扩充语言, 从而定义 $L(\mathbb{R})$ 以及 $L(A)$. 类似于 $0^\#$ 的情形, 我们对于满足 $A = \mathbb{R} \cap L(A)$ 的实数子集合, 也可以引进 EM-蓝图来定义

$A^{\#}$. 唯一的区别是要添加一个证据条件. 这是由 $L(A)$ 并不具备可定义的秩序所引起的. 这个证据条件就基于 $L(A)$ 中的元素都是由 A 中的某个元素以及一些序数在 $L(A)$ 中可定义这样一个事实来确定. 有关实数子集 $A \subset \mathbb{R}$ 的神奇蓝图的定义以及分析的详情见文献5, 具体定义如下：

定义 1.13 设 $A = \mathbb{R} \cap L(A)$. 令 $\mathcal{L}_A = \{\in, c_r \mid r \in A\}$. 称语言 $\mathcal{L}_A$ 中的一个语句集合 Σ 是一个**关于 A 的神奇蓝图**当且仅当

(1) Σ 是一致且完全的语句集合;

(2) Σ 满足神奇条件;

(3) Σ 满足证据条件, 即如果 $(\exists x\, \varphi(x))$ 是 Σ 中的一个语句, 那么 A 中必有一个实数 $r \in A$ 来见证语句 $(\exists x \in \mathrm{OD}(t)\, \varphi(x))$ 也在 Σ 之中;

(4) 存在一个不可数的序数 ξ 以至于 $\mathcal{M}(\Sigma, \xi)$ 是有秩的.

对于满足 $A = \mathbb{R} \cap L(A)$ 的实数集合 A, 至多有一个关于 A 的神奇蓝图; 而这样的神奇蓝图存在的充分必要条件就是 $A^{\#}$ 存在; $A^{\#}$ 存在当且仅当存在非平凡的同质嵌入映射 $j : L(A) \prec L(A)$; 如果 $A^{\#}$ 存在, 那么每一个大于 $|A|$ 的基数都是 $L(A)$ 的一个无差别元; 对于满足 $A = \mathbb{R} \cap L(A)$ 和 $B = \mathbb{R} \cap L(B)$ 的两个实数子集合, 如果 $A^{\#} \subset B^{\#}$, 那么存在非平凡的同质嵌入映射 $j : L(A) \to L(B)$.

1.1.3 覆盖引理

前面我们讨论了从 L 到 L 的非平凡同质嵌入映射存在性的内涵, 并且将其用一个可定义的自然数子集合 $0^{\#}$ 的存在性表示出来. 最后我们还看到一旦这样的现象发生, 那么 L 与 V 就有着天壤之别. 比如, V 中的第一个不可数基数在 L 中是一个不可达基数; V 中的奇异基数, 比如, 第 ω 个无穷基数, 在 L 中也都是不可达基数. 那么, 自然的问题就产生了：

问题 1.4 如果 $0^{\#}$ 不存在, 仅仅只有 $\mathrm{V} \neq L$, L 与 V 也会有如此大的差别吗?

鄢森 (Ronald Jensen)[6] 对这个问题给出了完全否定的回答. 这就是对集合论发展有着深远影响的十分深刻的鄢森**覆盖引理**.

定理 1.21 (覆盖引理) 如果 $0^{\#}$ 不存在, 那么任何一个不可数的序数之集 X 都一定被一个在 L 中的与 X 等势的 Y 所覆盖: $X \subset Y \in L$ 且 $|X| = |Y|$.

注意, 引理中的条件不可数是一个不能被省略的条件, 因为在讨论布尔代数分配律的时候, 我们曾经见到过一个例子 (例 II.3.36)：在 L 中, 令 $\mathbb{P}$ 为難波偏序集.

5 R. Solovay, The independence of DC from AD, Cabal Seminar 76-77, Proceedings of the Caltech-UCLA Logic Seminar 1976-77, (Kechris and Moschovakis, eds.), Lecture Notes in Math. Vol 689, Berlin: Springer, 1978: 171-183.

6 K J. Devlin and Ronald Jensen, Marginalia to a theorem of Silver. Lecture Notes in Mathematics 499, Berlin: Springer, 1975: 115-142.

令 G 为 L 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 那么在 $\mathrm{V}=L[G]$ 中, ω_2^L 的梯度为 ω, 它的任何可数无界子集就不能被任何可数的在 L 中的序数之集所覆盖.

覆盖引理表明在没有 $0^\#$ 的集合宇宙之中, 就算 $\mathrm{V}\neq L$, 两者之间并无天壤之别, 事实上, 它们很 "接近", 因为 V 中序数任意集合 X 都被一个在 L 中的与 X 的势差别不大的序数之集 Y 所覆盖：$|Y|\leqslant|X|+\aleph_1$ (这里的 $\aleph_1$ 是一个不可能得到任何改进的上界).

覆盖引理的逆命题也成立：如果 $0^\#$ 存在, 那么一定存在一个不可以被任何 L 中的与之等势的集合所覆盖的不可数的序数之集.

事实上, 假设 $0^\#$ 存在, 那么 $\aleph_\omega$ 在 L 中是一个正则基数, 因为它是一个银杰无差别元, 而每一个银杰无差别元都是 L 的一个正则基数. 不可数集合 $X=\omega_1\cup\{\aleph_n\mid n<\omega\}$ 就不可以被一个势为 $\aleph_1$ 的在 L 中的集合 $Y\in L$ 所覆盖. 假设不然, 令 $Y\in L$ 覆盖 X 且 $|Y|=|X|=\aleph_1$. 因为 $\aleph_\omega$ 在 L 中是一个正则基数, $Y\cap\aleph_\omega$ 在 $\aleph_\omega$ 中无界, 所以 $Y\cap\aleph_\omega$ 在 L 中的势一定是 $\aleph_\omega$. 令 $f\in L$ 为从 $\aleph_\omega$ 到 $Y\cap\aleph_\omega$ 的一个双射. 令 g 为从 $\aleph_1$ 到 $Y\cap\aleph_\omega$ 的双射, 那么 $g\circ f^{-1}:\omega_1\to\aleph_\omega$ 就是一个双射. 这就是一个矛盾.

这并不是 $\aleph_\omega$ 的专美. 设 λ 为一个奇异基数, $\kappa=\mathrm{cf}(\lambda)$. 令 $X\subset\lambda$ 为在 λ 中无界的势为 κ 的集合. 同样的证明表明：如果 λ 在 L 中是一个正则基数, 那么就不会有 $Y\in L$ 来满足下述要求：

$$\omega_1\cup X\subset Y\ \wedge\ |Y|=|\omega_1\cup X|\,.$$

这样, 我们实际上得到了一个有趣的事实："$\aleph_\omega^{\mathrm{V}}$ 在 L 中是一个正则基数" 当且仅当 "$0^\#$ 存在"; "$0^\#$ 存在" 当且仅当 "每一个奇异基数都是 L 中的一个正则基数". 换句话说, 奇异基数 $\aleph_\omega^{\mathrm{V}}$ 在 L 中也是一个奇异基数当且仅当 $0^\#$ 不存在; $0^\#$ 不存在当且仅当每一个奇异基数都是 L 中的一个奇异基数.

更一般地, 我们有下述覆盖引理的简单推论：

推论 1.8　*假设 $0^\#$ 不存在. 那么*

(1) 对于每一个 $\lambda\geqslant\omega_2$, 若 λ 在 L 中是一个正则基数, 则 $\mathrm{cf}(\lambda)=|\lambda|$;

(2) 对于每一个奇异基数 κ 而言, $(\kappa^+)^L=\kappa^+$;

(3) 奇异基数假设成立, 即若 κ 是一个奇异基数, 且 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)}<\kappa$, 则 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^+$;

(4) 如果 κ 是一个奇异基数, 而且 κ 有一个子集合不在 L 之中, 那么 κ 一定有一个有界子集合不在 L 之中.

证明　(1) 设极限序数 $\lambda\geqslant\omega_2$ 为 L 中的一个正则基数. 令 $A\subset\lambda$ 为在 λ 中无界的序型为 $\mathrm{cf}(\lambda)$ 的集合. 令 $X=\omega_1\cup A$. 根据覆盖引理 (定理 1.21), 令 $Y\in L$ 满足要求：$X\subset Y\subset\lambda$ 以及 $|Y|=|X|$. 由于 Y 在 λ 中无界, λ 在 L 中是一个

正则基数, 所以在 L 中存在一个从 λ 到 Y 的双射, 因此, $|Y| = |\lambda|$. 这就意味着 $|\lambda| = \mathrm{cf}(\lambda) + \aleph_1$. 因为 $\lambda \geqslant \omega_2$, 前面的等式就蕴涵了等式 $|\lambda| = \mathrm{cf}(\lambda)$.

(2) 设 κ 是一个奇异基数. 令 $\lambda = (\kappa^+)^L$. 欲证 $\lambda = \kappa^+$. 假设不然. 那么 $\lambda < \kappa^+$. 于是, $|\lambda| = \kappa$. 由于 κ 是一个奇异基数, $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$, 从而 $\mathrm{cf}(\lambda) < |\lambda|$. 可是, $\omega_2 < \kappa < \lambda$, λ 在 L 中是一个正则基数, 根据 (1), 我们必定有 $\mathrm{cf}(\lambda) = |\lambda|$. 这就得到矛盾.

(3) 设 κ 是一个奇异基数, 且 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. 欲证 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$. 为此, 令 $A = [\kappa]^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. 我们来验证不等式 $|A| \leqslant \kappa^+$. 令

$$C = \{Y \subset \kappa \mid |Y| = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \aleph_1 \wedge Y \in L\}.$$

根据覆盖引理 (引理 1.21), $\forall X \in A\, \exists Y \in C\, (X \subseteq Y)$. 从而

$$A \subseteq \bigcup \left\{ [Y]^{\mathrm{cf}(\kappa)} \;\middle|\; Y \in C \right\}.$$

一方面, 对于 $Y \in C$,

$$\left|[Y]^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right| = \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (\aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\kappa))^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa.$$

另一方面, $|C| \leqslant \left|(\mathfrak{P}(\kappa))^L\right| = \left|(\kappa^+)^L\right| \leqslant \kappa^+$. 综合上述, 我们就有 $|A| \leqslant \kappa^+$.

(4) 设 κ 是一个奇异基数. 假设 κ 的每一个有界子集都在 L 之中. 我们来证明 $\mathfrak{P}(\kappa) \subset L$.

断言 $[\kappa]^{\leqslant \mathrm{cf}(\kappa)} \subset L$.

设 $X \subset \kappa$, 并且 $|X| \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$. 根据覆盖引理 (定理 1.21), 令 $Y \in L$ 满足 $|X| + \aleph_1 = |Y| < \kappa$ 以及 $X \subset Y \subseteq \kappa$. 令 $\pi : Y \to \mathrm{ot}(Y) = \alpha$ 为 Y 的传递化映射. 此同构映射 $\pi \in L$. 因为 $|\alpha| = |Y| < \kappa$, 所以 $\alpha < \kappa$. 令 $Z = \pi[X]$. 那么 $Z \subset \alpha$, 所以 Z 是 κ 的一个有界子集. 根据假设, $Z \in L$. 于是, $X = \pi^{-1}[Z] \in L$. 断言因此得证.

依据上述断言, 我们来证 $\mathfrak{P}(\kappa) \subset L$. 为此, 令 $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ 为一个长度为 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的单调递增收敛于 κ 的序数序列.

设 $A \subset \kappa$. 令 $D = \{ A \cap \alpha_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$. 那么 $D \in [L_\kappa]^{\leqslant \mathrm{cf}(\kappa)}$. 因为在 L 中, 等式 $\kappa = |L_\kappa|$ 成立, 所以上述断言就保证了 $D \in L$. 于是, 由等式

$$A = \bigcup D = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} (A \cap \alpha_\xi)$$

得知 $A \in L$. □

为了证明定理 1.21(覆盖引理), 我们需要适当的准备. 我们需要对可构造性做更为细致的分析.

首先, 我们需要细化哥德尔的凝聚化引理 (定理 II.2.10):

引理 1.30　对于每一个序数 $\rho \geqslant \omega$ 而言, 如果 $N \prec_{\Sigma_1} (L_\rho, \in)$, 那么 N 的传递化必是某个 L_γ; 不仅如此, 事实上有集合论纯语言的具备下述功能的一个 Π_2 语句 σ: 对于任意的传递集合 M 来说, $(M, \in) \models \sigma$ 当且仅当 $\exists \gamma \in \mathrm{Ord}\ (\gamma \geqslant \omega \wedge M = L_\gamma)$.

受篇幅所限, 我们决定省略这个强凝聚化引理的证明.

此强凝聚化引理的一个有用的推论是下述引理:

引理 1.31　如果定向系统 $\{L_{\eta_i}, e_{i,k} \mid i \leqslant k \wedge i \in D \wedge k \in D\}$ 中的每一个 $e_{i,k}$ 都是 Σ_0-同质映射, 并且它的定向极限是有秩的, 那么它的定向极限一定就是某个 L_γ.

其次, 我们需要应用 Σ_n **斯科伦项**以及 Σ_n **斯科伦闭包**的概念.

定义 1.14　设 n 为一个正整数.

(1) 设 $\varphi(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1})$ 为一个集合论纯语言的彰显自由变元的 Σ_n 表达式. 称如下定义的 h_φ 为 φ 的典型斯科伦函数: 对于 $x_1, \cdots, x_k \in L$, 令

$$
\begin{aligned}
& h_\varphi(x_1, \cdots, x_k) \\
= & \begin{cases} \min_{<_L} \{y \mid L \models \varphi(y, x_1, \cdots, x_k)\}, & \text{如果 } L \models \exists x\, \varphi(x, x_1, \cdots, x_k), \\ 0, & \text{如果 } L \not\models \exists x\, \varphi(x, x_1, \cdots, x_k). \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2) 一个 Σ_n 斯科伦项就是某些 Σ_n 表达式的典型斯科伦函数复合的结果.

(3) 设 $\rho \geqslant \omega$ 为一个序数. 设 $Z \subset L_\rho$. Z 的 Σ_n **斯科伦闭包**是下述集合:

$$
\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(Z) = \left\{ t^{L_\rho}[z_1, \cdots, z_k] \,\middle|\, t \text{ 是一个} \Sigma_n \text{ 斯科伦项 } \wedge z_1, \cdots, z_k \in Z \right\}.
$$

(4) 设 τ 是一个斯科伦项. 对于一个序数 $\alpha \geqslant \omega$, τ 在结构 $(L_\alpha, \in)$ 上的解释记成 τ^{L_α}.

一般来说, Σ_n 斯科伦函数未必是 Σ_n 函数. 但是, 我们有下述引理:

引理 1.32　(1) 如果 $j: L_\alpha \to L_\beta$ 是一个 Σ_n 同质嵌入映射, 即对于任意一个 Σ_n 表达式

$$
\varphi(x_1, \cdots, x_k),
$$

对于任意的 $a_1, \cdots, a_k \in L_\alpha$, 总有

$$
L_\alpha \models \varphi[a_1, \cdots, a_k] \iff L_\beta \models \varphi[j(a_1), \cdots, j(a_k)],
$$

那么对于任意的 k-元 Σ_n 斯科伦项 t 而言, 下述交换律成立:

$$
\forall x_1, \cdots, x_k \in L_\alpha \ \left(j\left(t^{L_\alpha}[x_1, \cdots, x_k]\right) = t^{L_\beta}[j(x_1), \cdots, j(x_k)]\right).
$$

就是说, Σ_n 斯科伦函数与 Σ_n 同质嵌入映射可交换.

(2) 设 $\rho \geqslant \omega$ 为一个序数. 设 $Z \subset L_\rho$. Z 的 Σ_n 斯科伦闭包 $\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(Z)$ 是 $(L_\rho, \in)$ 的一个 Σ_n 同质子模型.

证明 我们先来证明 (1). 只需对典型 Σ_n 斯科伦函数证明交换律, 因为一般情形应用函数复合的长度的归纳法就可以得到.

设 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_k)$ 为 Σ_n. $h_\varphi^{L_\alpha}$ 可以在 $(L_\alpha, \in)$ 上经下述系列 Σ_n 表达式的布尔组合式所定义:

$$h_\varphi^{L_\alpha}(x_1, \cdots, x_k) = y \leftrightarrow L_\alpha \models \text{下述命题:}$$
$$\left(\begin{array}{l} \left((\exists x\, \varphi(x, x_1, \cdots, x_k)) \to \left(\begin{array}{l} \varphi(y, x_1, \cdots, x_k) \wedge \\ \forall z\ (z <_L y \to (\neg\varphi(z, x_1, \cdots, x_k))) \end{array} \right) \right) \wedge \\ ((\forall x\ (\neg\varphi(x, x_1, \cdots, x_k))) \to y = 0) \end{array} \right).$$

$h_\varphi^{L_\beta}$ 在 $(L_\beta, \in)$ 上是以同样的方式定义的. j 保持 Σ_n 性质, 自然也就保持 Σ_n 性质的布尔组合. 所以

$$\forall x_1, \cdots, x_k \in L_\alpha \left(j\left(h_\varphi^{L_\alpha}[x_1, \cdots, x_k]\right) = h_\varphi^{L_\beta}\left[j(x_1), \cdots, j(x_k)\right] \right).$$

(2) 如果 $Z \subseteq A \prec_{\Sigma_n} (L_\rho, \in)$, 那么 A 上的恒等映射是 Σ_n 同质嵌入映射, 从而 A 就会对 $(L_\rho, \in)$ 上的所有 Σ_n 斯科伦函数封闭. 因此, Z 的 Σ_n 斯科伦闭包就是 $(L_\rho, \in)$ 的 Σ_n 同质子模型, 而且是包含 Z 的最小的 Σ_n 同质子模型. □

证明 概要 (定理 1.21(覆盖引理)): 假设覆盖引理的结论并不成立, 即假设存在一个不可数的序数的集合 X 以至于没有与它等势的在 L 中的序数的集合 Y 来覆盖它. 我们来证明 $0^\#$ 存在. 根据定理 1.17, 我们只需证明下述命题:

存在两个极限序数 $\alpha < \beta$ 以及一个非平凡的同质嵌入映射 $k : L_\alpha \prec L_\beta$ 来见证 $\mathrm{Crit}(k) < |\alpha|$.

为此, 令 τ 为满足下述要求的最小序数: 存在一个不可数的子集合 $X \subset \tau$ 以至于没有与它等势的在 L 中的序数的集合 Y 来覆盖它. 又令

$$\nu = \min\{X \subset \tau \mid |X| > \omega \wedge \text{没有与 } X \text{ 等势的在 } L \text{ 中的序数的集合} Y \supseteq X\}$$

以及令 X 满足 $|X| = \nu$ 并且没有与 X 等势的在 L 中的序数的集合 $Y \supseteq X$.

从现在开始, 直到覆盖引理证明的结束, τ 和 X 是上述确定下来的集合.

事实 1.1.1 (i) τ *在* L *中是一个基数*;

(ii) *如果* $Y \in L$ *满足* $Y \supset X$, *那么* $L \models |Y| \geqslant \tau$;

(iii) ν *是一个正则基数*, $\nu < \tau$, *并且* $\nu = \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\tau)$.

证明 (i) 和 (ii) 是 τ 的极小性的推论.

(iii) 如果 $|X| = \tau$, 那么 $Y = \tau \supset X$ 与 X 等势, 且在 L 中. 因此, $|X| < \tau$. 如果 $|X| < \mathrm{cf}(\tau)$, 那么 $\sup(X) < \tau$. 于是 $|X| \geqslant \mathrm{cf}(\tau)$. 因为 X 不可数, 所以 $\nu = |X| \geqslant \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\tau)$.

假设 $\nu > \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\tau)$. 令 $\langle \tau_\xi \mid \xi < cf(\tau) \rangle$ 为一个收敛于 τ 的单调递增序数序列. 对于每一个 $\xi < \mathrm{cf}(\tau)$, $X \cap \tau_\xi$ 是一个可以被 L 中的一个势不超过 $|X \cap \tau_\xi| \cdot \aleph_1$ 的集合 Y_ξ 所覆盖. 令 $\{E_\alpha \mid \alpha < \tau\} \in L$ 为 τ 的所有的可构造的有界子集的一个单一列表. 令

$$Z = \{\alpha < \tau \mid \exists \xi < \mathrm{cf}(\tau)\ (E_\alpha = Y_\xi)\}.$$

根据 ν 的定义以及 $\nu > \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\tau)$ 的假设, Z 可以被 τ 的在 L 中的势不超过 $\mathrm{cf}(\tau) \cdot \aleph_1$ 的某个子集 W 所覆盖. 令

$$Y = \bigcup_{\alpha \in W} E_\alpha.$$

那么 $Y \in L$, $|Y| \leqslant |X| \cdot \aleph_1$, 并且 $X \subset Y$. 这是一个矛盾. □

现在令 $M \prec (L_\tau, \in)$ 满足 $X \subset M$ 以及 $|M| = \nu$. 令 L_η 为 M 的传递化, $\pi : M \to L_\eta$ 为传递化映射. 令 $j = \pi^{-1}$. 那么 $j : L_\eta \prec L_\tau$. 由于 X 在 τ 中无界, $|\eta| = \nu < \tau$, j 并非恒等嵌入映射.

令 $\kappa = \mathrm{Crit}(j) < \eta$.

我们的目标是要将 j 扩展成一个 $J : L_\delta \prec L_\theta$ 以至于 $|\delta| > \kappa = \mathrm{Crit}(J) = \mathrm{Crit}(j)$.

并非任意的 $M \prec L_\tau$ 所给出的嵌入映射 j 都具备所期望的性质. 我们需要适当的可以实现的选择, 从而可以实现所要的扩展目标. 大致的思路如下：寻找满足某些闭合条件的 L_τ 的同质子模型 M; 这些封闭条件要足以保证 M 的传递化 L_γ 的序数之集 γ 一定是 L 的一个基数, 并且对于足够大的 $\delta > \tau$, j 都可以扩展成一个以 L_δ 为定义域的同质嵌入映射. 我们面临的主要任务就是搞清楚那些可以实现的基本的封闭条件到底是什么. 在具体找到那些条件之前, 暂且用一个有待确定含义的短语 “M 足够闭合” 来表述. 我们寻找这些条件的过程将分为两个阶段：第一阶段分析合乎期望的扩展所需要的条件是什么; 第二阶段分析确保传递化的序数之集为 L 中的基数所需要的条件又是什么.

引理 1.33　设 $X \subset M \prec L_\tau$ 满足等式 $|X| = \nu = |M|$. 假设 M 足够闭合. 令 $\pi : M \cong L_\eta$ 为 M 的传递化映射, $j = \pi^{-1}$. 假设 η 是 L 中的一个基数. 那么对于任意的极限序数 $\delta > \eta$, j 都可以扩展成一个同质嵌入映射 $J : L_\delta \prec L_\epsilon$.

证明　设 $\delta > \eta$ 为一个极限序数. 考虑下述模型的定向系统：令

$$D_1 = \left\{(\alpha, p) \;\middle|\; \alpha < \eta \wedge p \in [L_\delta]^{<\omega}\right\},$$

以及对于 $(\alpha, p), (\beta, q) \in D_1$, 令 $(\alpha, p) \leqslant (\beta, q) \leftrightarrow \alpha \leqslant \beta \wedge p \subset q$. 如此定义的 $(D_1, \leqslant)$ 是一个定向集合：

$$\forall (\alpha, p), (\beta, q) \in D_1\, \exists (\gamma, r) \in D_1\, ((\alpha, p) \leqslant (\gamma, r)\ \wedge\ (\beta, q) \leqslant (\gamma, r)).$$

对于 $i=(\alpha,p)\in D_1$, 令 $M_i=\mathcal{SH}^{L_\delta}(\alpha\cup p)$ 为在模型 $(L_\delta,\in)$ 中由 $\alpha\cup p$ 所生成的斯科伦闭包; 令

$$\pi_i:M_i\cong L_{\eta_i}$$

为 M_i 的传递化映射; 令 $e_i=\pi_i^{-1}:L_{\eta_i}\prec L_\delta$. 对于 $D_1\ni i\leqslant k\in D_1$, 令 $e_{i,k}=\pi_k\circ e_i$. 这样, 我们得到一个定向系统

$$\{L_{\eta_i},e_{i,k}\mid i\leqslant k\wedge i\in D_1\wedge k\in D_1\}.$$

由于每一个 $x\in L_\delta$ 都在某个 M_i 中, L_δ 事实上是这个定向系统的定向极限.

这个定向系统具备下述性质：首先, 对于每一个 $i\in D_1$ 都有

$$L\models|M_i|<\eta,$$

以及 $L\models\eta=|\eta|$. 因此, $\forall i\in D_1\ (\eta_i<\eta)$. 其次,

$$\forall i\in D_1\,\forall k\in D_1\ (i\leqslant k\to e_{i,k}\in L_\eta).$$

这是因为对于 $i=(\alpha,p)\leqslant k=(\beta,q)$,

$$L_{\eta_i}=\mathcal{SH}^{L_{\eta_i}}(\alpha\cup\pi_i(p))\ \wedge\ L_{\eta_k}=\mathcal{SH}^{L_{\eta_k}}(\beta\cup\pi_k(q)),$$

以及对于任意的斯科伦项 t,

$$e_{i,k}\left(t^{L_{\eta_i}}(\xi,x)\right)=t^{L_{\eta_k}}(\xi,e_{i,k}(x)).$$

于是, $e_{i,k}$ 在 L_η 中是应用参数 $\eta_i,\eta_k,\pi_i(p),\pi_k(q)$ 可定义的. 所以, $e_{i,k}\in L_\eta$.

现在考虑这个定向系统中的模型以及映射在同质映射 j 下的像集：

$$\{j(L_{\eta_i}),j(e_{i,k})\mid i\leqslant k\wedge i\in D_1\wedge k\in D_1\}.$$

这也是一个定向系统. 让我们称这个定向系统为定向系统 (A). 我们所需要的 M 足够闭合条件就是要保证定向系统 (A) 的定向极限是一个有秩结构. 现在假设 M 已经足够闭合. 这个新的定向系统的定向极限是有秩的. 令 N 为这个新定向系统的定向极限的传递化. 那么, 根据引理 1.31, 有唯一的极限序数 ϵ 来实现等式 $N=L_\epsilon$. 对于每一个 $i\in D_1$, 令 $\tilde{e}_i:L_{j(\eta_i)}\to N$ 为典型定向嵌入映射; 这些典型定向极限映射满足交换图 $\tilde{e}_i=\tilde{e}_k\circ j(e_{i,k})$. 利用这些映射, 我们可以如下扩展 $j:L_\eta\prec L_\tau$ 到 $J:L_\delta\prec L_\epsilon$: 对于 $x\in L_\delta$, 令 $i\in D_1$ 满足要求 $x\in M_i$, 令

$$J(x)=\tilde{e}_i\left(j\left(e_i^{-1}(x)\right)\right).$$

这样定义的 J 是毫无歧义的, 的确是从 L_δ 到 L_ϵ 的同质嵌入映射.

我们还需要验证 $J\restriction_{L_\eta}=j$. 设 $x\in L_\eta$. 令 $\alpha<\eta$ 满足 $x\in L_\alpha$. 令 $i=(\alpha,\{x\})\in D_1$. 因为

$$L_\alpha\subset\mathcal{SH}^{L_\delta}(\alpha\cup\{x\}),$$

$e_i\restriction_{L_\alpha}$ 是 L_α 上的恒等函数; 并且对于 D 中的满足 $i\leqslant k\leqslant\ell$ 的那些 k 和 ℓ 也都有 $e_{k,\ell}\restriction_{L_\alpha}=\mathrm{Id}_{L_\alpha}$; 从而 $j\left(e_{k,l}\right)\restriction_{j(L_\alpha)}=\mathrm{Id}_{j(L_\alpha)}$ 以及 $\tilde{e}_i\restriction_{j(L_\alpha)}=\mathrm{Id}_{j(L_\alpha)}$. 于是, $e_i(x)=x$ 以及 $J(x)=\tilde{e}_i(j(x))=j(x)$. □

引理 1.33 的证明表明我们希望从 L_τ 的包含 X 的与 X 等势的同质子模型中选择一个足够闭合的同质子模型 M 以保证所设计的定向系统 (A) 的定向极限可以传递化. 那么如何才能保证 M 的传递化的序数之集是 L 中的一个基数呢? 从引理 1.33 的证明看, 这自然是很关键的一步. 让我们来进一步分析. 下面的引理将表明 M 还需要什么样的闭合条件才足以保证这一点. 它的证明将帮助我们进一步明确我们所需要的闭合条件到底是什么.

引理 1.34　*设 $X\subset M\prec L_\tau$ 满足等式 $|X|=\nu=|M|$. 假设 M 足够闭合. 令 L_η 为 M 的传递化. 那么 η 是 L 中的一个基数.*

证明　设 $X\subset M\prec L_\tau$ 满足等式 $|X|=\nu=|M|$, $\pi:M\cong L_\eta$, $j=\pi^{-1}:L_\eta\prec L_\tau$.

我们用反证法来证明这个引理. 假设不然：η 并不是 L 中的一个基数. 我们将依此构造出 L 中的一个势为 ν 的集合来覆盖 X. 这便是一个矛盾.

由于 η 不是 L 中的一个基数, 令 $f\in L$ 满足 $\mathrm{dom}(f)=\alpha<\eta$ 以及 $\mathrm{rng}(f)=\eta$. 令 f 为 $<_L$ 下的最小的这样的函数. 令 $\rho>\eta$ 为最小的满足 $f\in L_\rho$ 的序数. 因此, $L_\rho\models|\eta|=\alpha$, 并且 ρ 是见证这一事实的最小序数, 并且存在一个

$$\exists\alpha<\eta\,\exists p\in[L_\rho]^{<\omega}\ \left(\eta\subset\mathcal{SH}^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right).$$

下面分三种情形来讨论.

情形一　$\exists 1\leqslant n<\omega\,\exists\alpha<\eta\,\exists p\in[L_\rho]^{<\omega}\ \left(\eta\subset\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right)$ 并且满足条件

$$\exists\alpha<\eta\,\exists p\in[L_\rho]^{<\omega}\ \left(\eta\subset\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right)$$

的最小的 $n>1$.

此种情形下, 考虑下述定向系统：令

$$D_2=\left\{(\alpha,p)\ \middle|\ \alpha<\eta\wedge p\in[L_\rho]^{<\omega}\right\},$$

以及对于 $(\alpha,p),(\beta,q)\in D_2$, 令 $(\alpha,p)\leqslant(\beta,q)\leftrightarrow\alpha\leqslant\beta\wedge p\subset q$. 如此定义的 $(D_2,\leqslant)$ 是一个定向集合. 对于 $i=(\alpha,p)\in D_2$, 令 $M_i=\mathcal{SH}_{n-1}^{L_\rho}(\alpha\cup p)$ 为 $\alpha\cup p$ 的 Σ_{n-1} 斯科伦闭包; 令 $\pi_i:M_i\cong L_{\eta_i}$ 为 M_i 的传递化映射; 令 $e_i=\pi_i^{-1}:L_{\eta_i}\prec L_\rho$. 对于

$D_2 \ni i \leqslant k \in D_2$, 令 $e_{i,k} = \pi_k \circ e_i$, 此 $e_{i,k}$ 是 Σ_{n-1} 同质映射 $(n > 1)$. 这样, 我们得到一个定向系统

$$\{ L_{\eta_i}, e_{i,k} \mid i \leqslant k \wedge i \in D_2 \wedge k \in D_2 \}.$$

由于每一个 $x \in L_\rho$ 都在某个 M_i 中, L_ρ 事实上是这个定向系统的定向极限.

对于 $i = (\alpha, p) \in D_2$, 我们有 $\eta_i < \eta$, 如若不然, $\eta \subset \mathcal{SH}_{n-1}^{L_\rho}\left(\alpha \cup e_i^{-1}(p)\right)$, 这与 n 的最小性不符. 对于 D_2 中满足不等式 $i \leqslant k$ 的 i, k, 因为 $e_{i,k}$ 是在 L_η 中依据它在 Σ_{n-1} 斯科伦项上的作用来定义的:

$$e_{i,k}\left(t^{L_{\eta_i}}(\xi, x)\right) = t^{L_{\eta_k}}\left(\xi, e_k^{-1}\left(e_i(x)\right)\right),$$

所以, $e_{i,k} \in L_\eta$.

我们由此得到一个新的定向系统:

$$\{ j\left(L_{\eta_i}\right), j\left(e_{i,k}\right) \mid i \leqslant k \wedge i \in D_2 \wedge k \in D_2 \}.$$

我们称这个定向系统为定向系统 (B). 我们所需要的 M 足够闭合条件就是要保证定向系统 (B) 的定向极限是一个有秩结构. 现在假设 M 已经足够闭合. 这个新的定向系统 (B) 的定向极限是有秩的. 根据引理 1.31, 定向系统 (B) 的定向极限就是某个 L_γ. 对于每一个 $i \in D_2$, 令 $\tilde{e}_i : L_{j(\eta_i)} \to L_\gamma$ 为典型定向嵌入映射; $\tilde{e}_i$ 是 Σ_{n-1} 同质映射; 这些典型定向极限映射满足交换图 $\tilde{e}_i = \tilde{e}_k \circ j\left(e_{i,k}\right)$. 利用这些映射, 我们可以如下扩展 $j : L_\eta \prec L_\tau$ 到 $J : L_\rho \prec L_\gamma$: 对于 $x \in L_\rho$, 令 $i \in D_2$ 满足要求 $x \in M_i$, 令

$$J(x) = \tilde{e}_i\left(j\left(e_i^{-1}(x)\right)\right).$$

这样定义的 J 是毫无歧义的, 的确是从 L_ρ 到 L_γ 的 Σ_{n-1} 同质嵌入映射; 并且 $J \upharpoonright_{L_\eta} = j$.

重要的事实是: J 是 Σ_n 同质映射. 为此, 我们来证明: 如果 φ 是一个 Σ_{n-1} 表达式, 并且

$$\forall y \in L_\rho\ \left(\left(L_\gamma \models \exists x\, \varphi(x, J(y))\right) \to \left(L_\rho \models \exists x\, \varphi(x, y)\right)\right).$$

给定 φ, $y \in L_\rho$, 以及 $x \in L_\gamma$. 假设 $L_\gamma \models \varphi[x, J(y)]$. 令 $i = (\alpha, p) \in D_2$ 满足

$$x \in \operatorname{rng}\left(\tilde{e}_i\right) \text{ 以及 } y \in \operatorname{rng}\left(e_i\right).$$

令 $u \in L_{j(\eta_i)}$ 以及 $v \in L_{\eta_i}$ 满足下述要求:

$$x = \tilde{e}_i(u) \wedge y = e_i(v),$$

那么 $J(y)=\tilde{e}_i(j(v))$ 以及 $L_\gamma \models \varphi[\tilde{e}_i(u),\tilde{e}_i(j(v))]$. 因为 $\tilde{e}_i$ 是一个 Σ_{n-1} 同质映射, 便有

$$L_{j(\eta_i)} \models \varphi[u, j(v)].$$

语句

$$L_{j(\eta_i)} \models \exists z\, \varphi(z, j(v))$$

是一个内含 $L_{j(\eta_i)}$ 中的一组参数与 $j(v)$ 的 Σ_0 语句, 并且在 L_γ 中为真. 因此, 在 L_η 中,

$$L_{\eta_i} \models \exists z\, \varphi(z, v).$$

令 $z\in L_{\eta_i}$ 来见证 $L_{\eta_i}\models\varphi[z,v]$. 由于 φ 是 Σ_{n-1}, e_i 是 Σ_{n-1} 同质映射, 我们就得到

$$L_\rho \models \varphi\left[e_i(z), e_i(v)\right].$$

因此, $L_\rho \models \exists x\, \varphi(x,y)$.

现在我们来寻求 L 中的一个势不超过 ν 的集合来覆盖 X. 令 $\alpha<\eta$ 和 $p\in[L_\rho]^{<\omega}$ 满足

$$\eta \subset \mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p).$$

首先我们有 $X\subset M\cap\tau=j[\eta]=J[\eta]$; 因为 J 是 Σ_n 同质映射, 引理 1.32 表明：

$$J[\eta]\subset J\left[\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right]=\mathcal{SH}_n^{L_\gamma}\left(J[\alpha]\cup J[p]\right).$$

根据 τ 的最小性, 集合 $J[\alpha]\subset j(\alpha)<\tau$ 一定可以被 L 中的某个满足不等式 $|Y|\leqslant\nu$ 的集合 Y 所覆盖, 从而 X 便可以被 L 中的势不超过 ν 的集合 $\mathcal{SH}_n^{L_\gamma}(Y\cup J[p])$ 所覆盖. 这便与事实 1.1.1 相矛盾.

这就完成了情形一的证明. 注意, 在这里, 我们需要 M 足够闭合以至于定向系统 (B) 的定向极限是有秩的.

情形二　$\exists\alpha<\eta\,\exists p\in[L_\rho]^{<\omega}\left(\eta\subset\mathcal{SH}_1^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right)$.

在这种情形下, ρ 必须是一个极限序数. 这一点由下述参数变换引理 (其证明留给读者) 给出：

引理 1.35 (参数变换引理)　*如果 $\gamma\geqslant\omega$ 是一个序数, $\alpha<\gamma$, $p\in[L_{\gamma+1}]^{<\omega}$, 那么*

$$\exists q\in[L_\gamma]^{<\omega}\ \left(\mathcal{SH}_1^{L_{\gamma+1}}(\alpha\cup q)\cap L_\gamma\subset\mathcal{SH}_1^{L_\gamma}(\alpha\cup p)\right).$$

应用 ρ 是一个极限序数这一事实, 我们引入一个定向系统：令

$$D_3=\left\{(\alpha,p,\xi)\ \middle|\ \alpha<\eta\wedge p\in[L_\rho]^{<\omega}\wedge,\xi<\rho\wedge p\in L_\xi\right\},$$

以及对于 $(\alpha,p,\xi),(\beta,q,\zeta)\in D_3$, 令

$$(\alpha,p,\xi)\leqslant(\beta,q,\zeta)\leftrightarrow\alpha\leqslant\beta\wedge p\subset q\wedge\xi\leqslant\zeta.$$

如此定义的 $(D_3,\leqslant)$ 是一个定向集合. 对于 $i=(\alpha,p,\xi)\in D_3$, 令 $M_i=\mathcal{SH}^{L_\xi}(\alpha\cup p)$ 为 $\alpha\cup p$ 的在 $(L_\xi,\in)$ 上的斯科伦闭包; 令 $\pi_i: M_i\cong L_{\eta_i}$ 为 M_i 的传递化映射; 令 $e_i=\pi_i^{-1}: L_{\eta_i}\prec L_\rho$. 对于 $D\ni i\leqslant k\in D$, 令 $e_{i,k}=\pi_k\circ e_i$, 此 $e_{i,k}$ 是 Σ_0 同质映射. 这样, 我们得到一个定向系统

$$\{L_{\eta_i},e_{i,k}\mid i\leqslant k\wedge i\in D_3\wedge k\in D_3\}.$$

由于每一个 $x\in L_\rho$ 都在某个 M_i 中, L_ρ 事实上是这个定向系统的定向极限.

同样, 对于 $i=(\alpha,p,\xi)\in D_3$, 我们有 $\eta_i<\eta$, 以及每一个 $e_{i,k}\in L_\eta$.

和上面情形一类似, 我们由此得到一个新的定向系统:

$$\{j(L_{\eta_i}),j(e_{i,k})\mid i\leqslant k\wedge i\in D_3\wedge k\in D_3\}.$$

我们称这个定向系统为定向系统 (C). 我们所需要的 M 足够闭合条件就是要保证定向系统 (C) 的定向极限是一个有秩结构. 现在假设, M 已经足够闭合. 这个新的定向系统 (C) 的定向极限是有秩的. 根据引理 1.31, 定向系统 (C) 的定向极限就是某个 L_γ. 对于每一个 $i\in D_3$, 令 $\tilde{e}_i: L_{j(\eta_i)}\to L_\gamma$ 为典型定向嵌入映射; $\tilde{e}_i$ 是 Σ_0 同质映射; 这些典型定向极限映射满足交换图 $\tilde{e}_i=\tilde{e}_k\circ j(e_{i,k})$. 利用这些映射, 我们可以如下扩展 $j: L_\eta\prec L_\tau$ 到 $J: L_\rho\prec L_\gamma$: 对于 $x\in L_\rho$, 令 $i\in D_3$ 满足要求 $x\in M_i$, 令

$$J(x)=\tilde{e}_i\left(j\left(e_i^{-1}(x)\right)\right).$$

这样定义的 J 是毫无歧义的, 的确是从 L_ρ 到 L_γ 的 Σ_0 同质嵌入映射; 并且 $J\restriction_{L_\eta}=j$.

用类似于情形一的证明可知这样得到的 J 事实上是一个 Σ_1 同质映射. 和情形一一样, 据此就可以得到 L 中的一个势不超过 ν 的集合来覆盖 X. 从而得到矛盾.

情形三 $\forall 1\leqslant n<\omega\,\forall\alpha<\eta\,\forall p\in[L_\rho]^{<\omega}\ \left(\eta\not\subset\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p)\right)$.

此种情形下, 考虑下述定向系统: 令

$$D_4=\left\{(\alpha,p,n)\;\middle|\;1\leqslant n<\omega\wedge\alpha<\eta\wedge p\in[L_\rho]^{<\omega}\right\},$$

以及对于 $(\alpha,p,n),(\beta,q,m)\in D_4$, 令

$$(\alpha,p,n)\leqslant(\beta,q,m)\leftrightarrow\alpha\leqslant\beta\wedge p\subset q\wedge n\leqslant m.$$

如此定义的 $(D_4, \leqslant)$ 是一个定向集合. 对于 $i=(\alpha,p,n)\in D_4$, 令 $M_i=\mathcal{SH}_n^{L_\rho}(\alpha\cup p)$ 为 $\alpha\cup p$ 的 Σ_n 斯科伦闭包; 令 $\pi_i : M_i \cong L_{\eta_i}$ 为 M_i 的传递化映射; 令 $e_i=\pi_i^{-1} : L_{\eta_i} \prec L_\rho$. 对于 $D_4 \ni i \leqslant k \in D_4$, 令 $e_{i,k}=\pi_k\circ e_i$, 此 $e_{i,k}$ 是 Σ_n 同质映射. 这样, 我们得到一个定向系统

$$\{L_{\eta_i}, e_{i,k} \mid i\leqslant k \wedge i\in D_4 \wedge k\in D_4\}.$$

由于每一个 $x\in L_\rho$ 都在某个 M_i 中, L_ρ 事实上是这个定向系统的定向极限.

对于 $i=(\alpha,p,n)\in D_4$, 我们有 $\eta_i<\eta$; 对于 D_4 中满足不等式 $i\leqslant k$ 的 i,k, $e_{i,k}\in L_\eta$.

于是, 我们由此得到一个新的定向系统:

$$\{j\left(L_{\eta_i}\right), j\left(e_{i,k}\right) \mid i\leqslant k \wedge i\in D_4 \wedge k\in D_4\}.$$

这也是一个定向系统. 我们称这个定向系统为定向系统 (D). 我们所需要的 M 足够闭合条件就是要保证定向系统 (D) 的定向极限是一个有秩结构. 现在假设 M 已经足够闭合. 这个新的定向系统 (D) 的定向极限是有秩的. 根据引理 1.31, 定向系统 (D) 的定向极限就是某个 L_γ. 对于每一个 $i=(\alpha,p,n)\in D_4$, 令 $\tilde{e}_i : L_{j(\eta_i)}\to L_\gamma$ 为典型定向嵌入映射; $\tilde{e}_i$ 是 Σ_n 同质映射; 这些典型定向极限映射满足交换图 $\tilde{e}_i=\tilde{e}_k\circ j\left(e_{i,k}\right)$. 利用这些映射, 我们可以如下扩展 $j : L_\eta\prec L_\tau$ 到 $J : L_\rho \prec L_\gamma$: 对于 $x\in L_\rho$, 令 $i\in D_4$ 满足要求 $x\in M_i$, 令

$$J(x)=\tilde{e}_i\left(j\left(e_i^{-1}(x)\right)\right).$$

这样定义的 J 是毫无歧义的, 的确是从 L_ρ 到 L_γ 的同质嵌入映射; 并且 $J\restriction_{L_\eta}=j$.

和前面的情形一样, 据此就可以得到 L 中的一个势不超过 ν 的集合来覆盖 X. 从而得到矛盾. □

综合上面的分析, 我们期望 $X\subset M\prec L_\tau$ 所具备的闭合条件就是要保证上述分析中的四类定向系统的定向极限是有秩的. 这些也就归结到下述技术性引理:

引理 1.36　*存在 L_τ 的一个满足下述要求的同质子模型 M:*

(1) $X\subset M\prec L_\tau$;

(2) $|M|=\nu=|X|$;

(3) *如果 $\pi : M\cong L_\eta$, $j=\pi^{-1} : L_\eta\prec L_\tau$, 那么, 对于任意的以某个 $L_\rho\,(\rho>\eta)$ 为定向极限的定向系统*

$$\{L_{\eta_i}\in L_\eta, e_{i,k}\in L_\eta \mid i\leqslant k \wedge i\in D \wedge k\in D\},$$

其中 D 类似于前述证明中出现的 D_1, D_2, D_3, D_4, 在映射 j 下导出的定向系统

$$\{j\left(L_{\eta_i}\right), j\left(e_{i,k}\right) \mid i\leqslant k \wedge i\in D \wedge k\in D\}$$

的定向极限是有秩的.

证明 概略的证明思路如下: 应用 ν 是一个不可数的正则基数这一基本事实, 用 ν 步构造 M. 构造一个长度为 ν 的 $\subset$ 单调递增连续的同质子模型序列

$$\langle M_\xi \mid \xi < \nu\rangle,$$

并且 $X \subset M_0$, $|M_\xi| = \nu$. 在每一步 $\xi < \nu$, 令

$(\eta(\xi), \rho(\xi)) =$ 满足下述要求的最小序对 (η, ρ) :
$\exists\{i_n \mid n < \omega\} \subset D\, \exists\left\{\beta_n \in L_{\eta_{i_n}} \;\middle|\; n < \omega\right\} \forall n < \omega\left(\beta_{n+1} < e_{i_n, i_{n+1}}(\beta_n)\right),$

然后将于此序对相对应的 $\{\beta_n \mid n < \omega\}$ 添加到 M_ξ 之上得到 $M_{\xi+1}$.

□

1.1.4 迭代超幂

假设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 之上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 在超幂小节 (1.1.1 小节) 中, 我们引进了论域 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$ 以及由它的传递化映射所确定的以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \to M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{U})$. 我们知道在 M 中, κ 有可能不是可测基数, 但是 $j(\kappa)$ 在 M 中是可测基数, 并且 $\mathscr{V} = j(\mathscr{U})$ 就是 M 中的在 $j(\kappa)$ 上的非平凡的 $j(\kappa)$-完全的正规超滤子. 于是, 自然可以在论域 $M_1 = M$ 中定义 M_1 的经超滤子 $\mathscr{V}$ 所确定的超幂 $\mathrm{ult}(M_1, \mathscr{V})$, 从而得到从 M_1 到 $\mathrm{ult}(M_1, \mathscr{V})$ 的传递化 M_2 上的非平凡的同质嵌入映射. 这一过程可以继续下去, 得到 M_3, M_4, 等等.

现在的问题是: 这一过程可以沿着整个序数轴一直继续下去吗? 如果可以, 应当怎样实施这样一个过程? 比如说, 在第 ω 步时, 我们该怎样做?

在这一节里, 我们来探讨**线性迭代超幂**构造. 迭代超幂构造在探讨集合论内模型的学问中是一种基本方法. 后面我们会应用这种构造来分析可测基数的内模型.

为了记号的规范起见, 重新规定我们的超滤子以及超幂表示方式.

令 $M_0 \subseteq \mathrm{V}$ 为 ZFC 的一个内模型; $\kappa_0 \in M_0$ 为 M_0 中的一个可测基数; $U_0 \in M_0$ 为 κ_0 之上的在 M_0 中的 κ_0-完全的非平凡的超滤子. 在 M_0 中定义它的经 U_0 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(M_0, U_0)$; 令 M_1 为 $\mathrm{ult}\,(M_0, U_0)$ 的传递化; 令 $j_{0,1} = j_{U_0} : M_0 \prec M_1$ 为从 M_0 到 M_1 的典型同质嵌入映射. 令 $\kappa_1 = j_{0,1}(\kappa_0)$, $U_1 = j_{0,1}(U_0)$.

递归地, 给定传递模型 M_n, M_n 中的可测基数 κ_n, 以及 M_n 中的在 κ_n 上的非平凡的 κ_n-完全的超滤子. 在 M_n 中定义它经 U_n 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(M_n, U_n)$. 这是 ZFC 的一个自同一的有秩模型. 令 M_{n+1} 为这个超幂的传递化, 以及 $j_{n,n+1} : M_n \prec$

M_{n+1} 为从 M_n 到它的超幂的传递化的典型同质嵌入映射. 令 $\kappa_{n+1} = j_{n,n+1}(\kappa_n)$, 以及 $U_{n+1} = j_{n,n+1}(U_n)$.

这样, 我们得到一个序列 $\langle ((M_n, \kappa_n, U_n), j_{n,n+1}) \mid n < \omega \rangle$. 这个序列具有如下特点：

(1) M_n 是 ZFC 的一个传递内模型;

(2) $M_n \models \kappa_n$ 是一个可测基数, U_n 是 κ_n 上的非平凡的 κ_n-完全的超滤子;

(3) M_{n+1} 是超幂 $\mathrm{ult}(M_n, U_n)$ 的传递化, $j_{n,n+1} : M_n \prec M_{n+1}$ 是典型超幂嵌入映射.

对于这样一个序列, $m < n < \omega$, 以及 $x \in M_m$, 令

$$j_{m,n}(x) = \big(j_{n-1,n} \circ j_{(n-2),(n-1)} \circ \cdots \circ j_{m,m+1}\big)(x).$$

这样, 对于 $m < n < k < \omega$, 我们就有交换图：$j_{m,k} = j_{n,k} \circ j_{m,n}$. 不仅如此, 我们还有下述等式

$$U_n = j_{0,n}(U_0)\,;\ \wedge\ \kappa_n = j_{0,n}(\kappa_0)$$

对于所有的 $n < \omega$ 都成立, 其中 $j_{0,0}$ 为 M_0 上的恒等映射, 并且

$$\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_n < \kappa_{n+1} < \cdots,$$

以及

$$M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \cdots.$$

考虑由这样的模型与同质嵌入映射所组成的一个**定向系统**

$$\langle M_n, j_{n,k} \mid n < k < \omega \rangle :$$

(1) $\forall n < k < \omega\ (j_{n,k} : M_n \prec M_k)$;

(2) $\forall n < k < \ell < \omega\ (j_{n,\ell} = j_{k,\ell} \circ j_{n,k})$.

我们来定义它的**定向极限**：令

$$A = \{(k, x) \mid k < \omega \wedge x \in M_i\}.$$

对于 $(k, x) \in A$ 以及 $(n, y) \in A$, 定义

$$(k, x) \equiv (n, y) \leftrightarrow \exists \ell < \omega\ (k < \ell \wedge n < \ell \wedge j_{k,\ell}(x) = j_{n,\ell}(y)).$$

这是 A 上的一个等价关系 (练习：验证这个事实). 令 $N_\infty = A/\equiv$. 对于 $[(n, x)] \in N_\infty$ 和 $[(k, y)] \in N_\infty$, 令

$$[(n, x)] \in^* [(k, y)] \leftrightarrow \exists \ell < \omega\ (k < \ell \wedge n < \ell \wedge j_{k,\ell}(x) \in j_{n,\ell}(y)).$$

这是一个毫无歧义的定义, 也就是说, 与代表元的选取无关 (练习：验证这个事实). 然后对于 $n<\omega$, 以及 $x\in M_n$, 用下述等式

$$J_n(x)=[(n,x)]$$

来定义

$$J_n:M_n\to N_\infty.$$

那么, 对于每一个 $n<\omega$, 我们就有 $J_n:M_n\prec N_\infty$, 并且对于 $n<k<\omega$, 一定有交换图：

$$J_n=J_k\circ j_{n,k}.$$

如果 $\in^*$ 在 N_∞ 上是有秩的, 那么就令 M_ω 为 N_∞ 的传递化, 令 π_ω 为传递化映射, 以及令

$$j_{n,\omega}=\pi_\omega\circ J_n.$$

此时, 我们就称 $\langle M_\omega\, j_{n,\omega}\mid n<\omega\rangle$ 为定向系统 $\langle M_n,j_{n,k}\mid n<k<\omega\rangle$ 的**定向极限**. 注意, 在同构意义上, 这个定向极限, 只要存在, 就是唯一的 (练习：验证这个事实).

假如说 M_ω 有定义, 那么映射 $j_{n,\omega}:M_n\prec M_\omega$ 也就都有定义, 并且对于 $n<k<\omega$, 一定有交换图：$j_{n,\omega}=j_{k,\omega}\circ j_{n,k}$. 从而, 我们就有 $\kappa_\omega=j_{0,\omega}(\kappa_0)$ 以及 $U_\omega=j_{0,\omega}(U_0)$; 然后再在 M_ω 中定义 $\mathrm{ult}\,(M_\omega,U_\omega)$, 并由此得到 $M_{\omega+1}$, $\kappa_{\omega+1}$ 和 $U_{\omega+1}$; $j_{\omega,\omega+1}:M_\omega\prec M_{\omega+1}$ 以及 $j_{n,\omega+1}=j_{\omega,\omega+1}\circ j_{n,\omega}$.

因此, 只要我们能够保证在极限步所得到的模型与同质嵌入映射的定向系统的定向极限是有秩的, 那么它的定向极限就存在, 并且在同构意义上是唯一的.

现在我们将上述具体讨论推向一般的**迭代超幂递归定义**：

起始步 $M_0\subseteq \mathrm{V}$ 为 ZFC 的传递模型; $\kappa_0\in M_0$ 是 M_0 的可测基数; $U_0\in M_0$ 是 M_0 中的在 κ_0 上的 κ_0-完全的非平凡的超滤子.

后继步 给定 M_α 为 ZFC 的传递模型; $\kappa_\alpha\in M_\alpha$ 是 M_α 的可测基数; $U_\alpha\in M_\alpha$ 是 M_α 中的在 κ_α 上的 κ_α-完全的非平凡的超滤子. 在 M_α 中定义它的经 U_α 确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(M_\alpha,U_\alpha)$, 并且令 $M_{\alpha+1}$ 为这个超幂的传递化, 以及令 $j_{\alpha,\alpha+1}:M_\alpha\prec M_{\alpha+1}$ 为从 M_α 到 $M_{\alpha+1}$ 的典型嵌入映射; 并且对于每一个 $\beta<\alpha$, 令 $j_{\beta,\alpha+1}=j_{\alpha,\alpha+1}\circ j_{\beta,\alpha}$. 再令 $\kappa_{\alpha+1}=j_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha)$, 以及 $U_{\alpha+1}=j_{\alpha,\alpha+1}(U_\alpha)$. 此时对于 $\beta\leqslant\alpha$ 都有 $\kappa_\beta<\kappa_{\alpha+1}=j_{\beta,\alpha+1}(\kappa_\beta)$, 并且 κ_β 是映射 $j_{\beta,\alpha+1}$ 的临界点.

极限步 假设 α 是一个极限序数, 并且已经得到一个定向系统

$$\langle M_\beta,j_{\beta,\gamma}\mid \beta<\gamma<\alpha\rangle,$$

即

(1) $\forall \beta < \gamma < \alpha\ (j_{\beta,\gamma} : M_\beta \prec M_\gamma)$;

(2) $\forall \beta < \gamma < \eta < \alpha\ (j_{\beta,\eta} = j_{\gamma,\eta} \circ j_{\beta,\gamma})$.

那么, 令

$$A = \{(\beta, x) \mid \beta < \alpha \wedge x \in M_\beta\}.$$

对于 $(\beta, x) \in A$ 以及 $(\gamma, y) \in A$, 定义

$$(\beta, x) \equiv (\gamma, y) \leftrightarrow \exists \eta < \alpha\ (\beta < \eta \wedge \gamma < \eta \wedge j_{\beta,\eta}(x) = j_{\gamma,\eta}(y)).$$

这是 A 上的一个等价关系. 令 $N_\alpha = A/\equiv$. 对于 $[(\beta, x)] \in N_\alpha$ 和 $[(\gamma, y)] \in N_\alpha$, 令

$$[(\beta, x)] \in^* [(\gamma, y)] \leftrightarrow \exists \eta < \alpha\ (\beta < \eta \wedge \gamma < \eta \wedge j_{\beta,\eta}(x) \in j_{\gamma,\eta}(y)).$$

这是一个毫无歧义的定义, 也就是说, 与代表元的选取无关. 然后对于 $\beta < \alpha$, 对于 $x \in M_\beta$, 用下述等式

$$J_\beta(x) = [(\beta, x)]$$

来定义

$$J_\beta : M_\beta \to N_\alpha.$$

那么, 对于每一个 $\beta < \alpha$, 我们就有 $J_\beta : M_\beta \prec N_\alpha$, 并且对于 $\beta < \gamma < \alpha$, 一定有交换图:

$$J_\beta = J_\gamma \circ j_{\beta,\gamma}.$$

如果 $\in^*$ 在 N_α 上是有秩的, 那么就令 M_α 为 N_α 的传递化, 令 π_α 为传递化映射, 以及令

$$j_{\beta,\alpha} = \pi_\alpha \circ J_\beta.$$

此时, 我们就得到定向系统 $\langle M_\beta, j_{\beta,\gamma} \mid \beta < \gamma < \alpha\rangle$ 的定向极限 $\langle M_\alpha\, j_{\beta,\alpha} \mid \beta < \alpha\rangle$. 然后再令

$$\kappa_\alpha = j_{0,\alpha}(\kappa_0) \text{ 以及 } U_\alpha = j_{0,\alpha}(U_0).$$

这就完成了极限步 α 处的迭代超幂极限 $\langle M_\alpha, \kappa_\alpha, U_\alpha, j_{\beta,\alpha} \mid \beta < \alpha\rangle$ 的定义. 此时我们有:

(i) $\forall \beta < \alpha\ (\kappa_\alpha = j_{\beta,\alpha}(\kappa_\beta) > \kappa_\beta)$;

(ii) $\forall \beta < \alpha\ (\kappa_\beta = \mathrm{Crit}(j_{\beta,\alpha}))$;

(iii) $\kappa_\alpha = \sup(\{\kappa_\beta \mid \beta < \alpha\})$.

当然, 如果 N_α 上的 $\in^*$ 不是有秩的, 定义就终止.

现在我们面临极限步的两个技术问题: 第一, $(N_\alpha, \in^*)$ 是否有秩? 第二, 如果它有秩, 那么它的传递化模型是否依旧是一个内模型, 即是否对于所有的 $\beta < \alpha$ 都有 $M_\alpha \subset M_\beta$?

为了解决这两个问题, 我们需要一个技术性引理: 分解引理.

引理 1.37 (分解引理) 假设 α 是一个极限序数, 并且迭代超幂的定向系统

$$\langle M_\beta, j_{\beta,\xi} \mid \beta < \xi < \alpha \rangle$$

的定向极限模型

$$\langle M_\alpha, \kappa_\alpha, U_\alpha, j_{\beta,\alpha} \mid \beta < \alpha \rangle$$

有定义, 记成 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0)$. 那么对于任意的序数 ξ, 在 ZFC 的传递模型 M_α 内以 $M_\alpha, \kappa_\alpha, U_\alpha$ 为基础的长度为 ξ 的迭代超幂, 记成 $\mathrm{ult}^{(\xi)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right)$, 与在 M_0 内以 M_0, κ_0, U_0 为基础的长度为 $(\alpha+\xi)$ 的迭代超幂, 记成 $\mathrm{ult}^{(\alpha+\xi)}(M_0, U_0)$, 同构, 即对于任意的序数 ξ 都有同构映射

$$e_\xi^{(\alpha)} : \mathrm{ult}^{(\xi)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha+\xi)}(M_0, U_0).$$

不仅如此, 如果对于 $\xi < \eta$, 令

$$i_{\xi,\eta}^{(\alpha)} : \mathrm{ult}^{(\xi)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) \prec \mathrm{ult}^{(\eta)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right)$$

为迭代超幂的典型同质嵌入映射, 那么我们有下述交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{ult}^{(\xi)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) & \xrightarrow{i_{\xi,\eta}^{(\alpha)}} & \mathrm{ult}^{(\eta)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) \\
e_\xi^{(\alpha)} \downarrow & & \downarrow e_\eta^{(\alpha)} \\
\mathrm{ult}^{(\alpha+\xi)}(M_0, U_0) & \xrightarrow[j_{\alpha+\xi,\alpha+\eta}]{} & \mathrm{ult}^{(\alpha+\eta)}(M_0, U_0).
\end{array}$$

证明 对序数 ξ 施归纳.

当 $\xi = 0$ 时, 长度为 0 的迭代超幂就是恒等作用, 此时的同构映射为恒等映射 $e_0^{(\alpha)} = \mathrm{Id}$.

当 $\xi = \beta + 1$ 时, 设 $e_\beta^{(\alpha)} : \mathrm{ult}^{(\beta)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha+\beta)}(M_0, U_0)$. 那么,

$$\mathrm{ult}^{(\beta+1)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) = \mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(\beta)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right), i_{0,\beta}^{(\alpha)}(U_\alpha)\right),$$

以及

$$\mathrm{ult}^{(\alpha+\beta+1)}(M_0, U_0) = \mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha+\beta)}(M_0, U_0), j_{0,\alpha+\beta}(U_0)\right).$$

因为 $j_{0,\alpha+\beta}(U_0) = e_\beta^{(\alpha)}\left(i_{0,\beta}^{(\alpha)}(U_\alpha)\right)$, 同构映射 $e_\beta^{(\alpha)}$ 以及超幂构造就自然地诱导出同构映射

$$e_{\beta+1}^{(\alpha)} : \mathrm{ult}^{(\beta+1)}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(M_0, U_0), U_\alpha\right) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha+\beta+1)}(M_0, U_0).$$

当 ξ 是极限序数时, $\text{ult}^{(\xi)}\left(\text{ult}^{(\alpha)}(M_0,U_0),U_\alpha\right)$ 是超幂迭代序列

$$\left\langle \text{ult}^{(\beta)}\left(\text{ult}^{(\alpha)}(M_0,U_0),U_\alpha\right), i^{(\alpha)}_{\beta,\gamma}\ \middle|\ \beta<\gamma<\xi\right\rangle$$

的定向极限, 以及 $\text{ult}^{(\alpha+\xi)}(M_0,U_0)$ 是超幂迭代序列

$$\left\langle \text{ult}^{(\beta)}(M_0,U_0), j_{\beta,\gamma}\ \middle|\ \beta<\gamma<\alpha+\xi\right\rangle$$

的定向极限. 后者也就是超幂迭代序列

$$\left\langle \text{ult}^{(\alpha+\beta)}(M_0,U_0), j_{\alpha+\beta,\alpha+\gamma}\ \middle|\ \beta<\gamma<\xi\right\rangle$$

的定向极限. 由同构映射序列 $\left\langle e^{(\alpha)}_\beta\ \middle|\ \beta<\xi\right\rangle$ 以及定向极限构造得到同构映射

$$e^{(\alpha)}_\xi:\text{ult}^{(\xi)}\left(\text{ult}^{(\alpha)}(M_0,U_0),U_\alpha\right)\cong \text{ult}^{(\alpha+\xi)}(M_0,U_0). \qquad \square$$

由这个分解引理, 我们就得到下述结论:

推论 1.9　对于任意的极限序数 λ, 如果 $\text{ult}^{(\lambda)}(M_0,U_0)$ 是有秩的, 那么对于所有的 $\alpha<\lambda$, 就都有 $M_\lambda\subset M_\alpha$.

证明　给定任意的 $\alpha<\lambda$, 令 $\lambda=\alpha+\beta$, 那么

$$\text{ult}^{(\lambda)}(M_0,U_0)\cong \text{ult}^{(\beta)}\left(\text{ult}^{(\alpha)}(M_0,U_0),U_\alpha\right). \qquad \square$$

这样, 我们就解决了前述第二个问题. 现在我们来解决前述第一个问题: 证明所有的迭代超幂 $\text{ult}^{(\lambda)}(M_0,U_0)$ 都是有秩的, 从而 M_λ 都有定义.

定理 1.22 (Gaifman)　设 U 是可测基数 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 那么对于任意序数 α, 第 α 次超幂 $\text{ult}^{(\alpha)}(\text{V},U)$ 是有秩的.

证明　对 α 施归纳.

当 $\alpha=0$ 时, 没有什么需要证明的.

当 $\alpha=\beta+1$ 时, 归纳假设表明第 β 次超幂 $\text{ult}^{(\beta)}(\text{V},U)$ 是有秩的. 令 M_β 为它的传递化, $j_{0,\beta}:\text{V}\prec M_\beta$ 为典型同质嵌入映射, $\kappa_\beta=j_{0,\beta}(\kappa)$, $U_\beta=j_{0,\beta}(U)$. 那么 U_β 是 M_β 中的在 κ_β 上的非平凡的 κ_β-完全的超滤子. 所以, 在 M_β 中经 U_β 确定的超幂 $\text{ult}(M_\beta,U_\beta)$ 自然是有秩的. 也就是说, 第 $\alpha=\beta+1$ 次超幂 $\text{ult}^{(\alpha)}(\text{V},U)$ 是有秩的.

设 α 为一个极限序数, 并且对于所有的 $\beta<\alpha$, 第 β 次超幂 $\text{ult}^{(\beta)}(\text{V},U)$ 都是有秩的. 假设 $\text{ult}^{(\alpha)}(\text{V},U)$ 不是有秩的. 这是一个定向极限. 它的序数不是有秩的. 令 ξ 为最小的满足下述要求的序数: 在超幂 $\text{ult}^{(\alpha)}(\text{V},U)$ 中, 所有比 $j_{0,\alpha}(\xi)$ 小的序数不是一个秩序集.

设 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 为超幂

$$\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$$

中序数的一个单调递减序列, 且 $x_0 E_\alpha j_{0,\alpha}(\xi)$.

令 $\gamma < \alpha$ 以及序数 $\nu < j_{0,\gamma}(\xi)$ 满足 $x_0 = j_{\gamma,\alpha}(\nu)$. 设 β 满足 $\gamma + \beta = \alpha$.

根据我们的假设, 如下命题在 V 中成立:

$$\forall \delta \leqslant \alpha \, \forall \eta < \xi \, (\text{超幂}\, \mathrm{ult}^{(\delta)}(\mathrm{V}, U) \text{ 中所有比}\, j_{0,\delta}(\eta) \text{ 小的序数是一个秩序集}).$$

对上述命题应用同质嵌入映射 $j_{0,\gamma}$, 我们得到

$$M_\gamma \models \forall \delta \leqslant j_{0,\gamma}(\alpha) \, \forall \eta < j_{0,\gamma}(\xi) \, \text{下述命题成立:}$$

$$\left(\text{超幂}\, \mathrm{ult}^{(\delta)}(M_\gamma, U_\gamma) \text{ 中所有比}\, i_{0,\delta}^{(\gamma)}(\eta) \text{ 小的序数是一个秩序集}\right).$$

现在我们有 $\beta \leqslant \alpha \leqslant j_{0,\gamma}(\alpha)$ 以及 $\nu < j_{0,\gamma}(\xi)$. 根据上述命题,

$$M_\gamma \models \left(\text{超幂}\, \mathrm{ult}^{(\beta)}(M_\gamma, U_\gamma) \text{ 中所有比}\, i_{0,\beta}^{(\gamma)}(\nu) \text{ 小的序数是一个秩序集}\right).$$

应用上面的分解引理 (引理 1.37),

$$\mathrm{ult}^{(\beta)}(M_\gamma, U_\gamma) \cong \mathrm{ult}^{(\gamma+\beta)}(\mathrm{V}, U),$$

以及 $i_{0,\beta}^{(\gamma)}(\nu) = j_{\gamma,\gamma+\beta}(\nu)$. 由于 $\gamma + \beta = \alpha$, $j_{\gamma,\alpha}(\nu) = x_0$, 以及相对于传递模型 M_γ 而言, 性质 "一个序数的集合是一个秩序集" 是绝对不变、内外一致的, 我们就有

$$\text{超幂}\, \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U) \,\text{中比}\, x_0 \,\text{小的序数是一个秩序集}.$$

这就是一个矛盾, 因为序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n \cdots$ 在超幂 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$ 中就是一个反例. □

推论 1.10 设 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 那么沿着整个序数轴 Ord 迭代超幂序列

$$\langle M_\alpha, j_{\alpha,\beta} \mid \alpha < \beta \in \mathrm{Ord} \rangle$$

是一个有着完整定义的序列, 其中, 每一个 $M_{\alpha+1} \cong \mathrm{ult}(M_\alpha, j_{0,\alpha}(U))$, $j_{\alpha,\beta} : M_\alpha \prec M_\beta \subset M_\alpha$, $\kappa_\alpha = j_{0,\alpha}(\kappa)$ 是 $j_{\alpha,\beta}$ 的临界点; 对于 $\eta < \alpha < \beta \in \mathrm{Ord}$, 总有

$$\kappa_\eta < \kappa_\alpha = j_{\eta,\alpha}(\kappa_\eta) \text{ 以及 } j_{\eta,\beta} = j_{\alpha,\beta} \circ j_{\eta,\alpha};$$

临界点序列 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \rangle$ 是一个严格单调递增的连续序列; 并且对于任意的序数 α, 如果 $X \subseteq \kappa_\alpha$, $X \in M_{\alpha+1}$, 那么对于任意的 $\beta > \alpha$ 都有 $X \subset j_{\alpha,\beta}(X)$, 并且事实上 $X = \kappa_\alpha \cap j_{\alpha,\beta}(X)$.

前面我们关于迭代超幂的定义所用到的只是非平凡的 κ-完全的超滤子. 如果所用的超滤子还是正规的, 迭代超幂中的各个超滤子 U_α 又会有什么特殊的性质呢？尤其是在极限序数处, 情形该怎样？结论是：它们会由到此为止的临界点序列完全确定.

引理 1.38 如果在迭代超幂序列的定义中所使用的非平凡的 κ-完全的超滤子还是正规的, 那么对于每一个极限序数 $\alpha > 0$, 以及每一个 $X \in M_\alpha \cap \mathfrak{P}(\kappa_\alpha)$, 一定有

$$X \in U_\alpha \iff \exists \beta < \alpha \, (X \supset \{\kappa_\gamma \mid \beta \leqslant \gamma < \alpha\}).$$

证明 设 α 为一个极限序数. 只需证明如果 $X \in U_\alpha$, 那么 $\exists \beta < \alpha \forall \gamma \, (\beta \leqslant \gamma < \alpha \to \kappa_\gamma \in X)$.

设 $X \in U_\alpha$. 令 $\beta < \alpha$ 以及 $Y \in U_\beta$ 来见证 $X = j_{\beta,\alpha}(Y)$. 我们来验证：

$$\forall \gamma \, (\beta \leqslant \gamma < \alpha \to \kappa_\gamma \in X).$$

设 $\beta \leqslant \gamma < \alpha$. 令 $Z = j_{\beta,\gamma}(Y)$. 于是, $Z \in U_\gamma$. 在 M_γ 中, U_γ 是 κ_γ 上的一个正规超滤子. 因此, $\kappa_\gamma \in j_{\gamma,\gamma+1}(Z)$. 由于 $\kappa_\gamma < \kappa_{\gamma+1} = \mathrm{Crit}\,(j_{\gamma+1,\alpha})$, 我们有

$$\kappa_\gamma \in j_{\gamma+1,\alpha}\,(j_{\gamma,\gamma+1}(Z)) = j_{\gamma,\alpha}(Z) = j_{\beta,\alpha}(Y) = X. \qquad \square$$

乘积超滤子

我们在这里来寻求有关迭代超幂 $M_\alpha \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$ 的单一超幂表示, 即寻求 κ_α 的幂集的一个布尔子代数上的超滤子 $\mathscr{V}_\alpha$ 来实现 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$.

先从有限步迭代超幂的分析开始. 我们希望做的事情是寻求一种超滤子的乘积运算从而得到一个新的超滤子以实现所需要的表示.

设 U 是可测基数上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 为了简化书写, 我们引进一个量词：$\forall^* \alpha$, 读作 "对于几乎所有的 α"：

$$\forall^* \alpha \, \varphi(\alpha) \iff \{\alpha < \kappa \mid \varphi(\alpha)\} \in U.$$

设 $1 < n < \omega$. 对于 $X \subseteq \kappa^n$ 以及 $\alpha < \kappa$, 令

$$X_{(\alpha)} = \{\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \mid \langle \alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \in X\}.$$

对于 $1 \leqslant n < \omega$, 递归地定义 κ^n 上的超滤子 $\mathscr{V}_n$ 如下：

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_1 &= U, \\ \mathscr{V}_{n+1} &= \left\{X \subseteq \kappa^{n+1} \;\middle|\; \forall^* \alpha \, \left(X_{(\alpha)} \in \mathscr{V}_n\right)\right\}. \end{aligned}$$

断言一 对于 $1 \leqslant n < \omega$, $\mathscr{V}_n$ 是 κ^n 上的一个 κ-完全的非平凡的超滤子, 并且

$$\forall X \in U \ (X^n \in \mathscr{V}_n).$$

让我们来验证 $n = 2$ 的情形. 一般情形由归纳法和归纳假设得到.

设 $X \subseteq Y \subseteq \kappa^2$ 以及 $X \in \mathscr{V}_2$. 根据定义,

$$A(X) = \{\alpha < \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in X\} \in U\} \in U.$$

设 $\alpha \in A(X)$, $X_{(\alpha)} \subseteq Y_{(\alpha)}$, 从而 $Y_{(\alpha)} \in U$. 于是, $Y \in \mathscr{V}_2$.

设 $2 \leqslant \alpha < \kappa$. 对 $\gamma < \alpha$, 设 $X_\gamma \in \mathscr{V}_2$. 那么对于 $\gamma < \alpha$, $A(X_\gamma) \in U$; 从而, $\left(\bigcap_{\gamma<\alpha} A(X_\gamma)\right) \in U$. 对于 $\xi \in \bigcap_{\gamma<\alpha} A(X_\gamma)$, 以及 $\gamma < \alpha$, $(X_\gamma)_{(\xi)} \in U$. 因此, $\left(\bigcap_{\gamma<\alpha} (X_\gamma)_{(\xi)}\right) \in U$. 由于

$$\left(\bigcap_{\gamma<\alpha} (X_\gamma)_{(\xi)}\right) \subseteq \left(\bigcap_{\gamma<\alpha} X_\gamma\right)_{(\xi)},$$

我们就有 $\left(\bigcap_{\gamma<\alpha} X_\gamma\right) \in \mathscr{V}_2$.

设 $X \subseteq \kappa^2$ 以及 $X \notin \mathscr{V}_2$. 于是,

$$A(X) = \{\alpha < \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in X\} \in U\} \notin U.$$

因此, $(\kappa - A(X)) \in U$. 对于 $\alpha \in (\kappa - A(X))$, 我们有

$$\{\beta < \kappa \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in X\} \notin U.$$

于是,

$$\{\beta < \kappa \mid \langle\alpha, \beta\rangle \notin X\} \in U.$$

这表明 $\alpha \in A\left(\kappa^2 - X\right)$. 由此, $A\left(\kappa^2 - X\right) \in U$. 故 $\left(\kappa^2 - X\right) \in \mathscr{V}_2$.

由于 U 非平凡, 对于 $\alpha < \kappa$, $\{\beta < \kappa \mid \alpha < \beta\} \in U$, 令

$$Y_\alpha = \{(\eta, \xi) \in \kappa^2 \mid \alpha < \eta < \xi\},$$

那么 $\forall \eta\, (\alpha < \eta < \kappa \to \{\xi < \kappa \mid \eta < \xi\} \in U)$, 从而 $Y_\alpha \in \mathscr{V}_2$.

上述的分析表明 $\mathscr{V}_2$ 是 κ^2 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子.

设 $X \in U$. 对于每一个 $\alpha \in X$, $\{\beta \in X \mid \alpha < \beta\} \in U$, 所以 $\left(X^2\right)_{(\alpha)} \in U$. 由此得知 $X^2 \in \mathscr{V}_2$.

断言二　对于 $2 \leqslant n < \omega$, 以及 $X \subseteq \kappa^n$,

$$X \in \mathscr{V}_n \iff \forall^* \alpha_0 \, \forall^* \alpha_1 \cdots \forall^* \alpha_{n-1} \, (\langle \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \in X),$$

于是,

$$\{\langle \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \in \kappa^n \mid \alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-1}\} \in \mathscr{V}_n.$$

断言二第一部分直接由定义以及归纳法得到; 第二部分由第一部分以及

$$\forall \alpha_0 \, \forall \alpha_1 > \alpha_0 \cdots \forall \alpha_{n-1} > \alpha_{n-2} \, (\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1})$$

得到.

对于 $1 \leqslant n < \omega$, 我们应用 $\mathscr{V}_n$ 定义 V 的超幂: 对于 $f, g : \kappa^n \to \mathrm{V}$, 令

$$f =_n g \leftrightarrow \{a \in \kappa^n \mid f(a) = g(a)\} \in \mathscr{V}_n$$

以及用与定义 $[h] \in \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 同样的方式定义 $[f]$; 然后再定义

$$[f] \epsilon_n [g] \leftrightarrow \{a \in \kappa^n \mid f(a) \in g(a)\} \in \mathscr{V}_n.$$

这样, 我们就定义了经 $\mathscr{V}_n$ 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)$.

设 $1 \leqslant n < m < \omega$.

(1) 对于 $X \subseteq \kappa^n$, 定义

$$\mathrm{Bh}_{n,m}(X) = \{t \in \kappa^m \mid t \restriction_n \in X\};$$

(2) 对于定义在 κ^n 上的函数 f, 令 $f \uparrow_n^m$ 为 f 到 κ^m 的自然提升:

$$\forall t \in \kappa^m \, (f \uparrow_n^m (t) = f(t \restriction_n)),$$

并且令 $i_{n,m} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \to \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_m)$ 为依据下述等式所确定的映射:

$$i_{n,m}([f]_{\mathscr{V}_n}) = [f \uparrow_n^m]_{\mathscr{V}_m}.$$

引理 1.39　设 $1 \leqslant n < m < \omega$.

(1) 对于 $X \subseteq \kappa^n$, $X \in \mathscr{V}_n \iff \mathrm{Bh}_{n,m}(X) \in \mathscr{V}_m$.

(2) $i_{n,m} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \prec \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_m)$; 并且有交换图: $i_{\mathscr{V}_m} = i_{n,m} \circ i_{\mathscr{V}_n}$, 其中, $i_{\mathscr{V}_k} : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_k)$ 是自然嵌入映射: 对于 $x \in \mathrm{V}$, c_x 是定义在 κ^k 的取常值 x 的函数,

$$i_{\mathscr{V}_k}(x) = [c_x]_{\mathscr{V}_k}.$$

证明 (1) 由包含映射 Bh 的定义以及乘积超滤子的基本特征直接给出：对于 $X \subseteq \kappa^n$,

$$X \in \mathscr{V}_n \iff \forall^* \alpha_0 \, \forall^* \alpha_1 \, \cdots \, \forall^* \alpha_{n-1} \, (\langle \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \in X) \, .$$

比如, 我们先证明：对于 $X \subseteq \kappa^n$, $X \in \mathscr{V}_n \iff \mathrm{Bh}_{n,n+1}(X) \in \mathscr{V}_{n+1}$.

给定 $X \subseteq \kappa^n$, 我们有

$$\forall t \in \kappa^n \ \ (t \in X \leftrightarrow \forall \alpha < \kappa \ \ ((t \cup \{(n, \alpha)\}) \in \mathrm{Bh}_{n,n+1}(X))) \, .$$

因此,

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{V}_n &\leftrightarrow \forall^* \alpha_0 \, \forall^* \alpha_1 \, \cdots \, \forall^* \alpha_{n-1} \, (\langle \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \rangle \in X) \\ &\leftrightarrow \forall^* \alpha_0 \, \forall^* \alpha_1 \, \cdots \, \forall^* \alpha_{n-1} \, \forall \alpha \, (\langle \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha \rangle \in \mathrm{Bh}_{n,n+1}(X)) \\ &\leftrightarrow \mathrm{Bh}_{n,n+1}(X) \in \mathscr{V}_{n+1}. \end{aligned}$$

在此基础上, 对 $m \geqslant 1$ 施归纳, 我们证明：对于 $X \subseteq \kappa^n$,

$$X \in \mathscr{V}_n \iff \mathrm{Bh}_{n,n+m}(X) \in \mathscr{V}_{n+m}.$$

因为 $\mathrm{Bh}_{n,n+m}(X) \in \mathscr{V}_{n+m} \iff \mathrm{Bh}_{n+m,n+m+1}\left(\mathrm{Bh}_{n,n+m}(X)\right) \in \mathscr{V}_{n+m+1}$, 以及

$$\mathrm{Bh}_{n+m,n+m+1}\left(\mathrm{Bh}_{n,n+m}(X)\right) = \mathrm{Bh}_{n,n+m+1}(X),$$

所以, 由归纳假设, 有

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{V}_n &\iff \mathrm{Bh}_{n,n+m}(X) \in \mathscr{V}_{n+m} \\ &\iff \mathrm{Bh}_{n+m,n+m+1}\left(\mathrm{Bh}_{n,n+m}(X)\right) \in \mathscr{V}_{n+m+1} \\ &\iff \mathrm{Bh}_{n,n+m+1}(X) \in \mathscr{V}_{n+m+1}. \end{aligned}$$

(2) 设 $1 \leqslant n < \omega$. 对于定义在 κ^n 上的函数 f 和 g, 应用 (1) 以及定义有

$$\begin{aligned} [f] =_n [g] &\leftrightarrow \{t \in \kappa^n \mid f(t) = g(t)\} \in \mathscr{V}_n \\ &\leftrightarrow \left\{t \in \kappa^{n+1} \mid \left(f \uparrow_n^{n+1}\right)(t) = \left(g \uparrow_n^{n+1}\right)(t)\right\} \in \mathscr{V}_{n+1} \\ &\leftrightarrow \left[f \uparrow_n^{n+1}\right] =_{n+1} \left[g \uparrow_n^{n+1}\right], \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} [f] \epsilon_n [g] &\leftrightarrow \{t \in \kappa^n \mid f(t) \in g(t)\} \in \mathscr{V}_n \\ &\leftrightarrow \left\{t \in \kappa^{n+1} \mid \left(f \uparrow_n^{n+1}\right)(t) \in \left(g \uparrow_n^{n+1}\right)(t)\right\} \in \mathscr{V}_{n+1} \\ &\leftrightarrow \left[f \uparrow_n^{n+1}\right] \epsilon_{n+1} \left[g \uparrow_n^{n+1}\right]. \end{aligned}$$

接下来根据超滤子的定义、上述结论以及归纳假设, 对于表达式的布尔组合式结论成立.

现在设表达式为 $\exists x\,\varphi\,[[f_1]\,,\cdots,[f_k]]$, 其中 $f_i = g_i\uparrow_n^{n+1}$, g_i 是定义在 κ^n 上的函数. 假设

$$\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_{n+1})\models(\exists x\,\varphi\,[[f_1]\,,\cdots,[f_k]])\,.$$

令 f 为定义在 κ^{n+1} 上的函数, 并且

$$\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_{n+1})\models(\varphi\,[[f_1]\,,\cdots,[f_k]\,,[f]])\,.$$

于是,

$$\left\{t\in\kappa^{n+1}\;\middle|\;\varphi\,[f_1(t),\cdots,f_k(t),f(t)]\right\}\in\mathscr{V}_{n+1}.$$

这样,

$$\forall^*\alpha_0\,\forall^*\alpha_1\,\cdots\,\forall^*\alpha_{n-1}\,\forall^*\alpha_n\ \left(\exists x\,\varphi\,[f_1\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_n)\,,\cdots,f_k\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_n)]\right).$$

因为 $f_i = g_i\uparrow_n^{n+1}$, 所以

$$\forall^*\alpha_0\,\forall^*\alpha_1\,\cdots\,\forall^*\alpha_{n-1}\,\left(\exists x\,\varphi\,[g_1\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\,,\cdots,g_k\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})]\right).$$

对于 $t\in\kappa^n$, 令

$$g(t)=\begin{cases} a & \text{如果 } \varphi[g_1(t),\cdots,g_k(t),a] \text{ 成立},\\ \varnothing & \text{如果 } \forall x\,\neg\,(\varphi[g_1(t),\cdots,g_k(t)]) \text{ 成立}.\end{cases}$$

那么 $\forall^*\alpha_0\,\forall^*\alpha_1\,\cdots\,\forall^*\alpha_{n-1}$, 下述命题成立：

$$\left(\exists x\,\varphi\,[g_1\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\,,\cdots,g_k\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\,,g\,(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})]\right).$$

从而

$$\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_n)\models\varphi\,[[g_1]\,,\cdots,[g_k]\,,[g]]\,.$$

于是,

$$\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_n)\models(\exists x\,\varphi\,[[g_1]\,,\cdots,[g_k]])\,.$$

这就证明了 $\forall 1\leqslant n<\omega\ [i_{n,n+1}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_n)\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_{n+1})]$.

依据定义, 我们有：对于 $1\leqslant n<m<\omega$,

$$i_{n,m}=i_{m-1,m}\circ\cdots\circ i_{n+1,n+2}\circ i_{n,n+1}.$$

由此得到：对于 $1\leqslant n<m<\omega$, $i_{n,m}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_n)\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathscr{V}_m)$.

因为对于 $x\in\mathrm{V}$, c_x 在所有的 κ^n 上的定义是一样的, 所以下述等式总成立：

$$i_{\mathscr{V}_m}(x)=i_{n,m}\,(i_{\mathscr{V}_n}(x))\,,$$

也就是 $i_{\mathscr{V}_m}=i_{n,m}\circ i_{\mathscr{V}_n}$. □

有限迭代超幂表示

引理 1.40 对于 $1 \leqslant n < \omega$, $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \cong \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$, 并且从 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)$ 到 $\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$ 的自然同构映射 e_n 适合交换图:

$$j_{0,n} = \pi_n \circ e_n \circ \eta_n^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_n},$$

其中, $j_{\mathscr{V}_n} : \mathrm{V} \prec N_n$, $\eta_n^{-1} : N_n \cong \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)$, $j_{0,n} : \mathrm{V} \to M_n$, $\pi_n^{-1} : M_n \cong \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$. 即

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{j_{0,n}} & M_n & \xleftarrow{\pi_n} & \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U) \\ & \searrow j_{\mathscr{V}_n} & & & \uparrow e_n \\ & & N_n & \xrightarrow{\eta_n^{-1}} & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)\,. \end{array}$$

证明 对 $1 \leqslant n < \omega$ 施归纳. 当 $n = 1$ 时, 引理自然成立.

假设引理对 $n \geqslant 1$ 成立. 令 $e_n : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \cong \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$.

考虑 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{n+1})$.

设 f 是一个定义在 κ^{n+1} 上的函数. 对于 $t \in \kappa^n$, 定义

$$\forall \xi \in \kappa \left(f_{(t)}(\xi) = f(t, \xi) \right);$$

然后令 $F(t) = f_{(t)}$. 于是 $\mathrm{dom}(F) = \kappa^n$, 并且对于每一个 $t \in \kappa^n$, $F(t)$ 是一个定义在 κ 上的函数. 因此, 在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)$ 中, $[F]$ 是一个定义在 $[c_\kappa]$ 上的函数, 其中 c_κ 是定义在 κ^n 上取常值 κ 的函数. 根据归纳假设所给出的等式

$$\pi_n \left(e_n \left([c_\kappa] \right) \right) = \kappa_n = j_{0,n}(\kappa) = j_{\mathscr{V}_n}(\kappa) = \eta_n \left([c_\kappa] \right),$$

在迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$ 中, $e_n([F])$ 是定义在 $e_n\left([c_\kappa]\right)$ 上的一个函数. 这样, 我们建立了一个映射：$\delta : f \mapsto F \mapsto [F] \mapsto e_n([F])$, 将 V 中的定义在 κ^{n+1} 上的函数 f 映射到迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$ 中的定义在 $\pi_n^{-1}\left(\kappa_n\right)$ 上的函数 $e_n([F])$.

反过来, 设 h 是迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U)$ 中定义在 $\pi_n^{-1}\left(\kappa_n\right)$ 上的一个函数, 那么 $e_n^{-1}(h) \in \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n)$ 是定义在 $[c_\kappa]$ 上的一个函数. 令 H 为定义在 κ^n 上的一个满足下述等式的函数：

$$[H] = e_n^{-1}(h).$$

由于 e_n 是一个同构映射, 对于每一个 $t \in \kappa^n$, $H(t)$ 是一个定义在 κ 上的函数. 由此, 对于

$$(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in \kappa^{n+1},$$

定义

$$g\left(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\right) = H\left(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}\right)\left(\alpha_n\right).$$

这样, g 是 V 中定义在 κ^{n+1} 上的一个函数, 并且依据上面定义的映射 δ, 我们有

$$\delta : g \mapsto H \mapsto [H] \mapsto e_n([H]) = h.$$

因此, 上面建立的映射 δ 是一个满射.

现在对于每一个定义在 κ^{n+1} 上的函数 f, 定义

$$e_{n+1} : [f]_{\mathscr{V}_{n+1}} \mapsto [\delta(f)]_{U_n}.$$

我们来验证

$$e_{n+1} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{n+1}) \cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U), U_n\right) = \mathrm{ult}^{(n+1)}(\mathrm{V}, U)$$

是一个同构映射. 根据定义和归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned}
& [f]_{\mathscr{V}_{n+1}} = [g]_{\mathscr{V}_{n+1}} \\
\leftrightarrow & \forall^* \alpha_0 \cdots \forall^* \alpha_{n-1} \forall^* \xi \ (f(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \xi) = g(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \xi)) \\
\leftrightarrow & \forall^* t \ \left(\left\{\xi < \kappa \mid f_{(t)}(\xi) = g_{(t)}(\xi)\right\} \in U\right) \\
\leftrightarrow & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \models \text{下述命题：} \\
& \left\{\xi < \left(\eta_n^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_n}\right)(\kappa) \mid e_n^{-1}(\delta(f))(\xi) = e_n^{-1}(\delta(g))(\xi)\right\} \in \left(\eta_n^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_n}\right)(U) \\
\leftrightarrow & \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U) \models \left\{\xi < \pi_n^{-1}(\kappa_n) \mid \delta(f)(\xi) = \delta(g)(\xi)\right\} \in U_n \\
\leftrightarrow & [\delta(f)]_{U_n} = [\delta(g)]_{U_n},
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& [f]_{\mathscr{V}_{n+1}} \in^* [g]_{\mathscr{V}_{n+1}} \\
\leftrightarrow & \forall^* \alpha_0 \cdots \forall^* \alpha_{n-1} \forall^* \xi \ (f(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \xi) \in g(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}, \xi)) \\
\leftrightarrow & \forall^* t \ \left(\left\{\xi < \kappa \mid f_{(t)}(\xi) \in g_{(t)}(\xi)\right\} \in U\right) \\
\leftrightarrow & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_n) \models \text{下述命题：} \\
& \left\{\xi < \left(\eta_n^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_n}\right)(\kappa) \mid e_n^{-1}(\delta(f))(\xi) \in e_n^{-1}(\delta(g))(\xi)\right\} \in \left(\eta_n^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_n}\right)(U) \\
\leftrightarrow & \mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U) \models \left\{\xi < \pi_n^{-1}(\kappa_n) \mid \delta(f)(\xi) \in \delta(g)(\xi)\right\} \in U_n \\
\leftrightarrow & [\delta(f)]_{U_n} \in^* [\delta(g)]_{U_n}.
\end{aligned}$$

这就验证了

$$e_{n+1} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{n+1}) \cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(n)}(\mathrm{V}, U), U_n\right) = \mathrm{ult}^{(n+1)}(\mathrm{V}, U).$$

我们还需要验证交换图：

$$j_{0,n+1} = \pi_{n+1} \circ e_{n+1} \circ \eta_{n+1}^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_{n+1}},$$

其中,

$$j_{\mathscr{V}_{n+1}}:\mathrm{V}\prec N_{n+1},\ \eta_{n+1}^{-1}:N_{n+1}\cong\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathscr{V}_{n+1}\right),$$

$$j_{0,n+1}:\mathrm{V}\to M_{n+1},\ \pi_{n+1}^{-1}:M_{n+1}\cong\mathrm{ult}^{(n+1)}(\mathrm{V},U).$$

为此, 令 $f=c_x$ 为定义在 κ^{n+1} 上的取常值 x 的函数. 根据定义, $\delta(f)$ 是定义在 κ_n 上的取常值 $j_{0,n}(x)$ 的函数. 因此,

$$j_{\mathscr{V}_{n+1}}(x)=\eta_{n+1}\left([c_x]_{\mathscr{V}_{n+1}}\right)=\pi_{n+1}\left(e_{n+1}\left([c_x]_{\mathscr{V}_{n+1}}\right)\right)=j_{n,n+1}(j_{0,n}(x))=j_{0,n+1}(x).$$

□

一般迭代超幂表示

现在我们来讨论一般情形的迭代超幂的表示问题. 这时我们将考虑定义在 κ^E 上的函数以及 κ^E 上的超滤子, 其中 E 是序数的一个非空有限集合. 这是前面所考虑的 κ^n 的自然推广, 因为任何大于 0 的自然数 n 也都是一个序数的有限集合.

设 E 是一个非空的序数的有限集合. 将 E 看成一个递增排列的序列. 令 $\pi_E: E\cong|E|$ 为 E 的传递化映射.

利用映射 π_E, 我们很自然地将 $\kappa^{|E|}$ 上的超滤子 $\mathscr{V}_{|E|}$ 复制到 κ^E 上来, 其中 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子, $\mathscr{V}_{|E|}$ 是 U 的乘积超滤子. 这是 $\kappa^{|E|}$ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子.

对于 $\sigma\in\kappa^{|E|}$, 令 $\jmath_E(\sigma)=\sigma\circ\pi_E\in\kappa^E$. 那么

$$\jmath_E:\kappa^{|E|}\cong\kappa^E.$$

定义

$$\mathscr{V}_E=\left\{X\subseteq\kappa^E\ \middle|\ \jmath_E^{-1}[X]\in\mathscr{V}_{|E|}\right\}.$$

根据定理 1.2 证明中的分析我们知道 $\mathscr{V}_E$ 是 κ^E 上的非平凡的 κ-完全的超滤子.

对于定义在 κ^E 上的函数 f, 令 $\jmath_E[f]$ 为 f 经映射 $\jmath$ 到 $\kappa^{|E|}$ 上的复制:

$$\forall t\in\kappa^{|E|}\ \left(\left(\jmath_E[f]\right)(t)=f\left(\jmath_E^{-1}(t)\right)\right).$$

对于定义在 κ^E 上的函数 f 和 g, 定义

$$f=_E g\leftrightarrow\left\{t\in\kappa^E\ \middle|\ f(t)=g(t)\right\}\in\mathscr{V}_E,$$

以及 $[f]_{\mathscr{V}_E}$ 为所有与 f 满足 $=_E$ 关系的定义在 κ^E 上的函数中秩最小的函数的集合; 令

$$\mathrm{V}/\mathscr{V}_E=\left\{[f]_{\mathscr{V}_E}\ \middle|\ f\text{ 是定义在 }\kappa^E\text{ 上的函数}\right\}.$$

然后定义

$$[f]\epsilon_E[g] \leftrightarrow \left\{t \in \kappa^E \;\middle|\; f(t) \in g(t)\right\} \in \mathscr{V}_E.$$

称 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E) = (\mathrm{V}/\mathscr{V}_E, \epsilon_E)$ 为 V 的经 $\mathscr{V}_E$ 确定的超幂.

引理 1.41　固定可测基数 κ, 它上面的非平凡的 κ-完全的超滤子 U, 以及 U 的乘积超滤子 $\mathscr{V}_n(1 \leqslant n < \omega)$. 设 E 是序数的一个非空有限集合. 那么由下述等式所确定的映射

$$\imath_E\left([f]_{\mathscr{V}_E}\right) = [\jmath_E[f]]_{\mathscr{V}_{|E|}}$$

是从 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E)$ 到 $\mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{|E|}\right)$ 的同构映射:

$$\imath_E : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E) \cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{|E|}\right).$$

设 S 是序数的一个非空集合, $E \subset S$ 是一个非空有限子集. 以下面的等式引进一个从 $\mathfrak{P}\left(\kappa^E\right)$ 到 $\mathfrak{P}\left(\kappa^S\right)$ 的自然映射

$$\mathrm{Bh}_{E,S} : \mathfrak{P}\left(\kappa^E\right) \to \mathfrak{P}\left(\kappa^S\right),$$

对于 $X \in \mathfrak{P}\left(\kappa^E\right)$, 令

$$\mathrm{Bh}_{E,S}(X) = \left\{t \in \kappa^S \;\middle|\; t\restriction_E \in X\right\}.$$

在两个满足包含关系的序数的有限子集 $E \subset F$ 之间, 这一包含映射事实上是一种超滤子 $\mathscr{V}_E$ 与 $\mathscr{V}_F$ 的归结函数:

引理 1.42　依旧固定可测基数 κ, 它上面的非平凡的 κ-完全的超滤子 U, 以及 U 的乘积超滤子 $\mathscr{V}_n(1 \leqslant n < \omega)$. 设 $E \subset F$ 是序数的两个非空集合. 那么对于 $X \subseteq \kappa^E$, 总有

$$X \in \mathscr{V}_E \iff \mathrm{Bh}_{E,F}(X) \in \mathscr{V}_F.$$

证明　对于有序对 $(|E|, |F|)$ 施归纳. 设 $\varnothing \neq E \subseteq F$ 为序数的有限集合. 假设 $(|E|, |F|)$ 是目前我们需要证明的最小序对.

令 $a = \min(F)$. 不妨假设 $a \in E$ 并且 $|E| > 1$ (将其他情形留作练习).

令 $E_1 = E - \{a\}$ 以及 $F_1 = F - \{a\}$. 对于 $X \subseteq \kappa^E$, $\alpha < \kappa$, 令

$$X_{(\alpha)} = \{t\restriction_{E_1} \mid t \in X \wedge t(a) = \alpha\} \subseteq \kappa^{E_1},$$

以及对于 $Z \subseteq \kappa^F$, $\alpha < \kappa$, 令

$$Z_{(\alpha)} = \{t\restriction_{F_1} \mid t \in Z \wedge t(a) = \alpha\} \subseteq \kappa^{F_1}.$$

于是, 如果 $Z = \mathrm{Bh}_{E,F}(X)$, 那么 $Z_{(\alpha)} = \mathrm{Bh}_{E_1,F_1}\left(X_{(\alpha)}\right)$. 根据乘积超滤子的定义, 我们有

$$X \in \mathscr{V}_E \leftrightarrow \forall^*\alpha\ \left(X_{(\alpha)} \in \mathscr{V}_{E_1}\right) \text{ 以及 } Z \in \mathscr{V}_F \leftrightarrow \forall^*\alpha\ \left(Z_{(\alpha)} \in \mathscr{V}_{F_1}\right).$$

由此以及归纳假设, 我们就得到

$$X \in \mathscr{V}_E \iff \mathrm{Bh}_{E,F}(X) \in \mathscr{V}_F. \qquad \square$$

设 $E \subset F$ 是两个序数的非空有限集合. 对于定义在 κ^E 上的函数 f, 令 $f\uparrow^F$ 为 f 到 κ^F 的自然提升：

$$\forall t \in \kappa^F\ \ \left(f\uparrow^F(t) = f\left(t\restriction_E\right)\right).$$

现在来考虑 κ 的任意的序数乘积空间：κ^α. 我们的目标是在 κ^α 上引进 U 的乘积超滤子 $\mathscr{V}_\alpha$ 以及由它所确定的超幂.

设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个序数. 设 $E \subset \alpha$ 是一个非空有限子集. 称 E 是集合 $Z \subseteq \kappa^\alpha$ 的**支撑**当且仅当

$$\exists X \subseteq \kappa^E\ (Z = \mathrm{Bh}_{E,\alpha}(X)).$$

此时称 $Z \subseteq \kappa^\alpha$ 有一个**有限支撑**. 注意, 如果 $E \subset F$ 是 α 的两个非空有限子集, 并且 E 是 $Z \subseteq \kappa^\alpha$ 的一个支撑, 那么 F 也是 Z 的一个支撑. 现在定义

$$B_\alpha = \left\{Z \subseteq \kappa^\alpha \mid Z\text{有一个有限支撑}\right\}.$$

我们将下面断言的验证留作练习.

断言一 $\mathbb{B}_\alpha = (B_\alpha, \subseteq)$ 是一个布尔代数.

在布尔代数 $\mathbb{B}_\alpha$ 上, 我们定义：对于 $Z \in B_\alpha$, 如果 E 是 Z 的一个有限支撑, $X \subseteq \kappa^E$, $Z = \mathrm{Bh}_{E,\alpha}(X)$, 那么令

$$Z \in \mathscr{V}_\alpha \iff X \in \mathscr{V}_E.$$

根据上面的归结引理 (引理 1.42), 我们有如下断言：

断言二 $\mathscr{V}_\alpha$ 的定义与 Z 的有限支撑 E 和集合 X 的选择无关; 并且 $\mathscr{V}_\alpha$ 是布尔代数 $\mathbb{B}_\alpha$ 上第一个超滤子.

有了这个超滤子 $\mathscr{V}_\alpha$ 之后, 我们来定义由它所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$.

首先, 需要确定定义在 κ^α 上的哪些函数是我们定义超幂时应当关注的：称一个以 κ^α 为定义域的函数 f 具有一个**有限支撑** $E \subset \alpha$ 当且仅当 E 是非空有限的,

并且对于任意的 $t, s \in \kappa^\alpha$, 若 $s\restriction_E = t\restriction_E$, 则 $f(s) = f(t)$. 换句话说, 当且仅当 E 是非空有限的, 并且存在一个以 κ^E 为定义域的函数 g 来计算 f：

$$\forall t \in \kappa^\alpha \ \ (f(t) = g\left(t\restriction_E\right)).$$

断言三 如果 f 和 g 是定义在 κ^α 上的具有有限支撑的函数, E 是 f 的一个有限支撑, F 是 g 的一个有限支撑, 那么 $E \cup F$ 是如下两个集合的有限支撑：

$$\{t \in \kappa^\alpha \mid f(t) = g(t)\} \text{ 以及 } \{t \in \kappa^\alpha \mid f(t) \in g(t)\}.$$

令 $\mathrm{V}_{\mathrm{fsp}}^\alpha = \left\{f \ \middle|\ \mathrm{dom}(f) = \kappa^\alpha \wedge f \text{ 是一个具有有限支撑的函数}\right\}$.

对于 $f, g \in \mathrm{V}_{\mathrm{fsp}}^\alpha$, 定义

$$f =_\alpha g \iff \{t \in \kappa^\alpha \mid f(t) = g(t)\} \in \mathscr{V}_\alpha,$$

以及 $[f]$ 为所有那些与 f 满足 $=_\alpha$ 等价关系的具有极小秩的函数的集合; 然后再定义

$$[f]\epsilon_\alpha[g] \iff \{t \in \kappa^\alpha \mid f(t) \in g(t)\} \in \mathscr{V}_\alpha.$$

称 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) = \left(\mathrm{V}_{\mathrm{fsp}}^\alpha / =_\alpha, \epsilon_\alpha\right)$ 为 V 经 $\mathscr{V}_\alpha$ 所确定的超幂.

对于 $\alpha < \beta$, 对于定义在 κ^α 的函数 f, 令 $f\uparrow^\beta$ 为 f 到 κ^β 的提升：

$$\forall t \in \kappa^\beta \ \ \left(\left(f\uparrow^\beta\right)(t) = f\left(t\restriction_\alpha\right)\right);$$

然后令 $i_{\alpha,\beta}\left([f]_{\mathscr{V}_\alpha}\right) = \left[f\uparrow^\beta\right]_{\mathscr{V}_\beta}$.

引理 1.43 设 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子.

(1) 对于每一个序数 $\alpha \geqslant 1$, $\mathscr{V}_\alpha$ 是布尔代数 $\mathbb{B}_\alpha$ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子;

(2) 对于每一个序数 $\alpha \geqslant 1$, 经 $\mathscr{V}_\alpha$ 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) = \left(\mathrm{V}_{\mathrm{fsp}}^\alpha / =_\alpha, \epsilon_\alpha\right)$ 是一个自同一的有秩结构, 因而它与一个传递类同构:

$$\eta_\alpha : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \cong N_\alpha;$$

(3) 对于每一个序数 $\alpha \geqslant 1$, 对 $x \in \mathrm{V}$, 令 $i_\alpha(x) = [c_x]_{\mathscr{V}_\alpha} \in \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$, 以及令

$$j_{\mathscr{V}_\alpha}(x) = \eta_\alpha\left(i_\alpha(x)\right),$$

那么 $j_{\mathscr{V}_\alpha} : \mathrm{V} \prec N_\alpha$;

(4) 对于任意序数 $\alpha < \beta$,

$$i_{\alpha,\beta} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \prec \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\beta),$$

并且有如下交换图:

$$i_{\alpha,\beta} \circ \eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha} = \eta_\beta^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\beta}.$$

证明 (练习.) □

现在我们终于可以完成寻找表示引理的任务了:

引理 1.44 (迭代超幂表示引理) 设 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 对于任意无穷序数 α, 经 $\mathscr{V}_\alpha$ 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$ 与第 α 次迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$ 同构, 并且, 典型嵌入映射

$$j_{\mathscr{V}_\alpha} : \mathrm{V} \to N_\alpha \cong \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$$

与迭代嵌入映射

$$j_{0,\alpha} : \mathrm{V} \to M_\alpha \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$$

满足自然交换图: 令

$$\pi_\alpha : \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U) \cong M_\alpha \text{ 以及 } \eta_\alpha : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \cong N_\alpha$$

为各自的传递化映射; 令

$$e_\alpha : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$$

为同构映射, 那么

$$j_{0,\alpha} = \pi_\alpha \circ e_\alpha \circ \eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha},$$

并且对于 $\alpha < \beta$,

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{j_{\alpha,\beta}} & M_\beta \\ \uparrow \pi_\alpha & & \uparrow \pi_\beta \\ \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U) & & \mathrm{ult}^{(\beta)}(\mathrm{V}, U) \\ \uparrow e_\alpha & & \uparrow e_\beta \\ \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) & \xrightarrow{i_{\alpha,\beta}} & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\beta)\,. \end{array}$$

证明 用关于 α 的归纳法.

假设引理对 $\alpha \geqslant 1$ 成立. 令 $e_\alpha : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U)$.

考虑 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{\alpha+1})$.

设 f 是一个定义在 $\kappa^{\alpha+1}$ 上的函数, 并且 f 的有限支撑为 $E \cup \{\alpha\}$ 且 $E \subset \alpha$. 对于 $t \in \kappa^\alpha$, 定义

$$\forall \xi \in \kappa \left(f_{(t)}(\xi) = f(t, \xi) \right);$$

然后令 $F(t) = f_{(t)}$. 于是 $\mathrm{dom}(F) = \kappa^\alpha$, F 具有有限支撑 E, 并且对于每一个 $t \in \kappa^\alpha$, $F(t)$ 是一个定义在 κ 上的函数. 因此, 在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$ 中, $[F]_{\mathscr{V}_\alpha}$ 是一个定义在

$[c_\kappa]_{\mathscr{V}_\alpha}$ 上的函数, 其中 c_κ 是定义在 κ^α 上取常值 κ 的具有有限支撑的函数. 根据归纳假设所给出的等式

$$\pi_\alpha\left(e_\alpha\left([c_\kappa]\right)\right)=\kappa_\alpha=j_{0,\alpha}(\kappa)=j_{\mathscr{V}_\alpha}(\kappa)=\eta_\alpha\left([c_\kappa]\right),$$

在迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U)$ 中, $e_\alpha([F])$ 是定义在 $e_\alpha\left([c_\kappa]\right)$ 上的一个函数. 这样, 我们建立了一个映射：$\delta: f\mapsto F\mapsto [F]\mapsto e_\alpha([F])$, 将 V 中的定义在 $\kappa^{\alpha+1}$ 上的函数 f 映射到迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U)$ 中的定义在 $\pi_\alpha^{-1}\left(\kappa_\alpha\right)$ 上的函数 $e_\alpha([F])$.

反过来, 设 h 是迭代超幂 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U)$ 中定义在 $\pi_\alpha^{-1}\left(\kappa_\alpha\right)$ 上的一个函数, 那么 $e_\alpha^{-1}(h)\in\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathscr{V}_\alpha\right)$ 是定义在 $[c_\kappa]$ 上的一个函数. 令 H 为定义在 κ^α 上的一个满足下述等式的具有有限支撑的函数：

$$[H]=e_\alpha^{-1}(h).$$

设 $E\subset\alpha$ 为 H 的一个具有 n 个元素的有限支撑. 由于 e_α 是一个同构映射, 对于每一个 $t\in\kappa^\alpha$, $H(t)$ 是一个定义在 κ 上的函数. 对于 $\sigma\in\kappa^E$, 如果 $t\in\kappa^\alpha$ 满足 $t\restriction_E=\sigma$, 那么就令 $k(\sigma)=H(t)$. 因为 E 是 H 的一个有限支撑, k 是一个在 κ^E 上无歧义定义的函数, 所以, 对于

$$(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)\in\kappa^{E\cup\{\alpha\}},$$

定义

$$g\left(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)=k\left(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\right)\left(\alpha_n\right).$$

这样, g 是 V 中定义在 $\kappa^{E\cup\{\alpha\}}$ 上的一个函数; 对于 $s\in\kappa^{\alpha+1}$, 令

$$G(s)=g\left(s\restriction_{E\cup\{\alpha\}}\right),$$

那么 G 以 $E\cup\{\alpha\}$ 为有限支撑; 并且依据上面定义的映射 δ, 我们有

$$\delta: G\mapsto H\mapsto [H]\mapsto e_\alpha([H])=h.$$

因此, 上面建立的映射 δ 是一个满射.

现在对于每一个定义在 $\kappa^{\alpha+1}$ 上的具有有限支撑的函数 f, 定义

$$e_{\alpha+1}:[f]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}}\mapsto[\delta(f)]_{U_\alpha}.$$

我们来验证

$$e_{\alpha+1}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathscr{V}_{\alpha+1}\right)\cong\mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U),U_\alpha\right)=\mathrm{ult}^{(\alpha+1)}(\mathrm{V},U)$$

是一个同构映射. 根据定义和归纳假设, 我们有

$$
\begin{aligned}
& [f]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}} = [g]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}} \\
\leftrightarrow & \left\{ t \in \kappa^{\alpha+1} \;\middle|\; f(t) = g(t) \right\} \in \mathscr{V}_{\alpha+1} \\
\leftrightarrow & \left\{ t \in \kappa^{\alpha} \mid \left\{ \xi < \kappa \;\middle|\; f_{(t)}(\xi) = g_{(t)}(\xi) \right\} \in U \right\} \in \mathscr{V}_{\alpha} \\
\leftrightarrow & \,\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \models \text{下述命题:} \\
& \left\{ \xi < \left(\eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha}\right)(\kappa) \;\middle|\; e_\alpha^{-1}(\delta(f))(\xi) = e_\alpha^{-1}(\delta(g))(\xi) \right\} \in \left(\eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha}\right)(U) \\
\leftrightarrow & \,\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U) \models \left\{ \xi < \pi_\alpha^{-1}(\kappa_\alpha) \;\middle|\; \delta(f)(\xi) = \delta(g)(\xi) \right\} \in U_\alpha \\
\leftrightarrow & [\delta(f)]_{U_\alpha} = [\delta(g)]_{U_\alpha},
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
& [f]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}} \epsilon_{\alpha+1} [g]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}} \\
\leftrightarrow & \left\{ t \in \kappa^{\alpha+1} \;\middle|\; f(t) \in g(t) \right\} \in \mathscr{V}_{\alpha+1} \\
\leftrightarrow & \left\{ t \in \kappa^{\alpha} \mid \left\{ \xi < \kappa \;\middle|\; f_{(t)}(\xi) \in g_{(t)}(\xi) \right\} \in U \right\} \in \mathscr{V}_{\alpha} \\
\leftrightarrow & \,\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha) \models \text{下述命题:} \\
& \left\{ \xi < \left(\eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha}\right)(\kappa) \;\middle|\; e_\alpha^{-1}(\delta(f))(\xi) \in e_\alpha^{-1}(\delta(g))(\xi) \right\} \in \left(\eta_\alpha^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_\alpha}\right)(U) \\
\leftrightarrow & \,\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U) \models \left\{ \xi < \pi_\alpha^{-1}(\kappa_\alpha) \;\middle|\; \delta(f)(\xi) \in \delta(g)(\xi) \right\} \in U_\alpha \\
\leftrightarrow & [\delta(f)]_{U_\alpha} \in^* [\delta(g)]_{U_\alpha},
\end{aligned}
$$

这就验证了

$$
e_{\alpha+1} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{\alpha+1}) \cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, U), U_\alpha\right) = \mathrm{ult}^{(\alpha+1)}(\mathrm{V}, U).
$$

我们还需要验证交换图:

$$
j_{0,\alpha+1} = \pi_{\alpha+1} \circ e_{\alpha+1} \circ \eta_{\alpha+1}^{-1} \circ j_{\mathscr{V}_{\alpha+1}},
$$

其中,

$$
j_{\mathscr{V}_{\alpha+1}} : \mathrm{V} \prec N_{\alpha+1},\ \eta_{\alpha+1}^{-1} : N_{\alpha+1} \cong \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_{\alpha+1}),
$$

$$
j_{0,\alpha+1} : \mathrm{V} \to M_{\alpha+1},\ \pi_{\alpha+1}^{-1} : M_{\alpha+1} \cong \mathrm{ult}^{(\alpha+1)}(\mathrm{V}, U).
$$

为此, 令 $f = c_x$ 为定义在 $\kappa^{\alpha+1}$ 上的取常值 x 的函数. 根据定义, $\delta(f)$ 是定义在 κ_α 上的取常值 $j_{0,\alpha}(x)$ 的函数. 因此,

$$
j_{\mathscr{V}_{\alpha+1}}(x) = \eta_{\alpha+1}\left([c_x]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}}\right) = \pi_{\alpha+1}\left(e_{\alpha+1}\left([c_x]_{\mathscr{V}_{\alpha+1}}\right)\right) = j_{\alpha,\alpha+1}(j_{0,\alpha}(x)) = j_{0,\alpha+1}(x).
$$

设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个极限序数. 应用归纳假设以及定义, 直接计算表明 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)$ 与定向系统

$$
\langle \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\beta), i_{\beta,\gamma} \mid \beta < \gamma < \alpha \rangle
$$

的定向极限同构, 从而与 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U)$ 同构. □

我们现在应用迭代超幂的表示定理来证明下述连续性引理. 这个引理是有关超幂的命题 1.1 的迭代发展.

引理 1.45 设 U 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 令 $j_{0,\alpha}:\mathrm{V}\prec M_\alpha\cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V},U)$ 为从 V 到它的第 α 次迭代的同质嵌入映射. 那么

(1) 如果 α 是一个基数, 并且 $\alpha>2^\kappa$, 那么 $j_{0,\alpha}(\kappa)=\alpha$;

(2) 如果 $\lambda>\alpha$ 是一个基数, $\mathrm{cf}(\lambda)>\kappa$, 并且 $\forall\gamma<\lambda\ (|\gamma|^\kappa<\lambda)$, 那么 $j_{0,\alpha}(\lambda)=\lambda$.

证明 根据迭代超幂表示引理 (引理 1.44), 对于任何序数 ξ 和 η, 所有比 $j_{0,\xi}(\eta)$ 小的序数都由那些从 κ^ξ 到 η 的具有有限支撑的函数所表示. 这就表明: $|j_{0,\xi}(\eta)|\leqslant |\xi|\cdot|\eta|^\kappa$. 由此, 我们有:

(1) 当 $\alpha>2^\kappa$ 是一个基数时, 由等式 $j_{0,\alpha}(\kappa)=\sup\{\,j_{0,\xi}(\kappa)\mid \xi<\alpha\}$, 以及

$$\forall\xi<\alpha\ (|j_{0,\xi}(\kappa)|\leqslant|\xi|\cdot 2^\kappa<\alpha)\,,$$

就得到 $j_{0,\alpha}(\kappa)=\alpha$.

(2) 当 $\lambda>\alpha$ 是一个基数并且 $\mathrm{cf}(\lambda)>\kappa$ 时, 每一个从 κ^α 到 λ 的具有有限支撑的函数都会在 λ 中有界. 这就意味着我们有如下等式:

$$j_{0,\alpha}(\lambda)=\sup\{\,j_{0,\alpha}(\gamma)\mid\gamma<\lambda\}\,.$$

又因为对于 $\gamma<\lambda$, 都有 $|j_{0,\alpha}(\gamma)|\leqslant|\alpha|\cdot|\gamma|^\kappa<\lambda$, 所以 $j_{0,\alpha}(\lambda)=\lambda$. □

1.1.5 可测基数内模型

现在我们应用前面所定义的迭代超幂来分析相对于一个可测基数 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子 U 的构造集合论域 $L[U]$.

回顾一下在 II.2.2.1 小节中我们所定义的相对可构造集层次 (定义 II.2.23). 设 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 定义 $L[U]$ 如下:

(1) $L_0[U]=\varnothing$;

(2) 对于任意序数 α, 令 $L_{\alpha+1}[U]=\mathscr{D}_U\left(L_\alpha[U],\in,U\cap L_\alpha[U]\right)$;

(3) 对于极限序数 λ, 令 $L_\lambda[U]=\bigcup\limits_{\alpha<\lambda}L_\alpha[U]$;

(4) 令 $L[U]=\bigcup\{\,L_\alpha[U]\mid\alpha\in\mathrm{Ord}\}$,

其中 $\mathscr{D}_U$ 是由定义 II.2.22 所确定的在对集合论纯语言添加了一个一元谓词符号之后的可定义子集合的收集算子. 令 $\bar U=U\cap L[U]$. 根据引理 II.2.24, 我们有 $\bar U\in L[U]$, 并且 $L[U]=L\left[\bar U\right]$. 由定理 II.2.17 我们知道

(1) $L[U]$ 是 ZFC 的一个传递模型;

(2) 在 $L[U]$ 中, 语句 $\exists X\,(\mathrm{V}=L[X])$ 为真;

(3) 如果 N 是 ZF 的一个内模型, 并且 $U\cap N\in N$, 那么 $L[U]\subseteq N$.

在这里我们更感兴趣的是当用一个非平凡的超滤子来解释相对可构造集层次定义中的一元谓词时, 我们得到可测基数的内模型.

引理 1.46 *在 $L[U]$ 中, $\bar{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子, 从而 κ 在 $L[U]$ 中是一个可测基数; 并且如果 U 是一个正规超滤子, 那么 $\bar{U}$ 在 $L[U]$ 中也是一个正规超滤子.*

证明 因为 $\bar{U}=U\cap L[U]$, 所以

$$L[U]=L\left[\bar{U}\right]\models \bar{U}\,\text{是}\,\kappa\,\text{上的一个非平凡的}\,\kappa\text{-完全的超滤子}.$$

现在假设 U 是一个正规超滤子. 设 $f\in L[U]$ 为定义在 κ 上的一个选择函数. f 在 V 中自然也是 κ 上的一个选择函数. 令 $\gamma<\kappa$ 满足要求：集合

$$X=\{\alpha<\kappa\mid f(\alpha)=\gamma\}\in U.$$

设 $f\in L_\lambda[U]$. 那么 X 是一个由 f 和 γ 作为参数在 $(L_\lambda[U],\in,U\cap L_\lambda[U])$ 上可定义的. 所以 $X\in L_{\lambda+1}[U]\subset L[U]$. 于是

$$L\left[\bar{U}\right]\models f\,\text{在}\,\bar{U}\,\text{的某一个元素}\,X\,\text{上取常值}.$$

□

由于 U 是一个可测基数上的一个非平凡的完全的超滤子, 利用这一特殊信息, 我们可以增强定理 II.2.19 中的结论：在 $L[U]$ 中一般连续统假设成立. 首先根据凝聚引理 (引理 II.2.25), 重复一下定理 II.2.19 以及它的证明. 这就是下述引理：

引理 1.47 *设 $A\subset\mathfrak{P}(\omega_\alpha)$. 如果 $\mathrm{V}=L[A]$, 那么 $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$.*

证明 设 $A\subset\mathfrak{P}(\omega_\alpha)$, 并且 $\mathrm{V}=L[A]$. 所以, $A\in L[A]$.

设 $X\subset\omega_\alpha$. 令 λ 为一个满足要求 $A\in L_\lambda[A]$ 以及 $X\in L_\lambda[A]$ 的基数. 令

$$\{A,X\}\cup\omega_\alpha\subset M\prec(L_\lambda[A],\in,A),$$

并且 $|M|=\aleph_\alpha$. 令 $\pi:M\cong N$ 为 M 的传递化映射. 由于 $\omega_\alpha\subset M$, 因此对于 $Z\cap M\cap\mathfrak{P}(\omega_\alpha)$, 总有 $\pi(Z)=Z$. 于是, $\pi(X)=X$. 另外, $\pi(A)=\pi(A\cap M)=A\cap N$. 根据凝聚引理 (引理 II.2.25), $\exists\gamma\,(N=L_\gamma[A\cap N])$. 因此, $\exists\gamma\ (N=L_\gamma[A])$. 因为 $|N|=|M|=\aleph_\alpha$, 满足等式 $(N=L_\gamma[A])$ 的 γ 一定严格小于 $\aleph_{\alpha+1}$. 由此得到：$X\in L_{\omega_{\alpha+1}}[A]$. 这就证明了：

$$\mathfrak{P}(\omega_\alpha)\subset L_{\omega_{\alpha+1}}[A],$$

从而 $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$. □

由于 $U \subset \mathfrak{P}(\kappa)$, 所以在 $L[U]$ 中对于任何不小于 κ 的基数 λ, 就都有 $2^\lambda = \lambda^+$. 因而, 一般连续统假设在 $L[U]$ 中成立的证明的核心部分是论证对那些在 $L[U]$ 中比 κ 小的无穷基数而言一般连续统成立. 这是下面银杰定理[7] 的内容.

定理 1.23　设 κ 是一个可测基数, D 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 如果 $\mathrm{V} = L[D]$, 那么一般连续统假设成立.

证明　根据引理 1.47, 如果 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数, 那么 $2^\lambda = \lambda^+$. 现在我们来证明: 如果 $\lambda < \kappa$ 是一个无穷基数, 那么 $2^\lambda = \lambda^+$.

用反证法. 假设 $\lambda < \kappa$ 是一个反例: $|\mathfrak{P}(\lambda)| \geqslant \lambda^{++}$. 我们来寻求一个矛盾.

具体来讲, 设 $2^\lambda > \lambda^+$, 令 $X \subset \lambda$ 为 λ 的在 $L[D]$ 中的典型秩序 $<_{L[D]}$ 之下的第 λ^+ 个子集合. 令 α 为满足要求 $X \in L_\alpha[D]$ 的最小序数. 因为每一个 $L_\xi[D]$ 都是秩序 $<_{L[D]}$ 的一个前段, 所以在秩序 $<_{L[D]}$ 之下位于 X 之前的所有 λ 的子集就都在 $L_\alpha[D]$ 之中, 从而

$$|\mathfrak{P}(\lambda) \cap L_\alpha[D]| \geqslant \lambda^+.$$

我们应用引理 1.16 来得到一个具备某种特殊性质的同质子模型. 令 $\eta > \alpha$ 为一个满足下述要求的基数:

$$D \in L_\eta[D].$$

考虑模型 $\mathfrak{A} = (L_\eta[D], \in)$, 以及 $P = \mathfrak{P}(\lambda) \cap L_\eta[D]$. 因为 κ 是一个不可达基数, $\lambda < \kappa$, 所以 $2^\lambda < \kappa$. 这样, $|P| < \kappa$. 应用引理 1.16, 令 $\mathfrak{B} = (B, \in) \prec \mathfrak{A}$ 并且满足如下要求:

(i) $|B| = \kappa$, $\{D, X, \alpha\} \cup \lambda \subset B$;

(ii) $\kappa \cap B \in D$, 以及 $|P \cap B| \leqslant \lambda$.

令 $\pi : B \cong M$ 为 B 的传递化映射. 那么 $\exists \gamma\ (M = L_\gamma[\pi(D)])$. 令 γ 为满足等式要求 $M = L_\gamma[\pi(D)]$ 的序数.

应用 D 的正规性, 我们来验证: $\pi(D) = D \cap M$.

因为 $|B \cap \kappa| = \kappa$, 所以 $\pi(\kappa) = \kappa$. 对于 $\xi < \kappa$, 如果 $\xi \in B$, 那么 $\pi(\xi) \leqslant \xi$. 由于 $B \cap \kappa \in D$, 根据 D 的正规性, 我们自然就有

$$Z = \{\xi \in B \cap \kappa \mid \pi(\xi) = \xi\} \in D.$$

如果 $Y \in B \cap D$, 那么 $Y \cap Z = \pi(Y \cap Z) \subset \pi(Y)$, 从而, $\pi(Y) \in D$; 另一方面, 如果 $Y \in B$ 并且 $\pi(Y) \in D$, 那么

$$Z \cap \pi(Y) = \pi(Z) \cap \pi(Y) = \pi(Z \cap Y) = Z \cap Y \subset Y,$$

7 Jack Silver, The consistency of the generalized continuum hypothesis with the existence of a measurable cardinal. In “Axiomatic Set Theory”, (D. Scott ed.) Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, vol 13. part I. Providence, American Math. Soc., 1971, 391-395.

从而 $Y \in D$. 这些就表明 $\pi(D) = D \cap M$.

这样, $M = L_\gamma[D]$. 由于 $\lambda \subset B$, 对于任意的 $Y \in B \cap \mathfrak{P}(\lambda)$, $\pi(Y) = Y$. 于是

$$M \cap \mathfrak{P}(\lambda) = B \cap \mathfrak{P}(\lambda).$$

由于 $\pi(X) = X$, 我们有 $X \in M = L_\gamma[D]$. 根据 α 的极小性, $\alpha \leqslant \gamma$.

可是这就意味着一个矛盾：一方面 $|\mathfrak{P}(\lambda) \cap L_\alpha[D]| \geqslant \lambda^+$; 另一方面

$$|\mathfrak{P}(\lambda) \cap L_\gamma[D]| \leqslant \lambda. \qquad \square$$

上面的引理 1.46 表明：如果 D 是可测基数 κ 上的非平凡正规超滤子, 那么在内模型 $L[D]$ 中, κ 依旧是一个可测基数; $\bar{D}$ 也是 κ 上的非平凡正规超滤子. 自然的问题是：在 $L[D]$ 中是否还有其他可测基数？在 κ 之上, 除了 $\bar{D}$ 之外, 是否还有其他的非平凡正规超滤子？

我们先来回答第一个问题.

引理 1.48 设 D 是可测基数 κ 上的非平凡正规超滤子. 如果 $\mathrm{V} = L[D]$, 那么 κ 是唯一的可测基数.

证明 假设引理的结论不成立. 令 $\lambda \neq \kappa$ 为另外一个可测基数. 设 U 为 λ 上的非平凡的 λ-完全的正规超滤子. 令

$$j_U : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U).$$

我们来证明：$M = L[D] = \mathrm{V}$. 这便是一个矛盾, 因为根据命题 1.1, $U \notin M$.

根据同质特性, $M = L\left[j_U(D)\right]$.

如果 $\lambda > \kappa$, 那么 $j_U(D) = D$, 从而 $M = L[D]$.

现在假设 $\lambda < \kappa$. 令

$$Z = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{是一个不可达基数, 并且} \alpha > \lambda\}.$$

那么 $Z \in D$. 再根据命题 1.1, 我们有 $j_U(\kappa) = \kappa$ 以及 $\forall \alpha \in Z\ (j_U(\alpha) = \alpha)$.

让我们来证明 $j_U(D) = D \cap M$. 为此, 证明不等式 $j_U(D) \subseteq D \cap M$ 就足够了, 因为 $j_U(D)$ 在 M 中是一个超滤子. 设 $X \in j_U(D)$. 令 $f : \lambda \to D$ 在超幂中表示 X. 令

$$Y = \bigcap_{\xi < \lambda} f(\xi).$$

D 是 κ-完全的, $\lambda < \kappa$, 所以, $Y \in D$. 由于 $\forall \xi < \lambda\ (Y \subset f(\xi))$, 所以, $j_U(Y) \subset j_U(f)(\lambda) = X$. 对于 $\alpha \in Y \cap Z$, 我们有 $j_U(\alpha) = \alpha$. 因此,

$$X \supset j_U(Y) \supset j_U[Y \cap Z] = Y \cap Z \in D.$$

这表明：$X \in D$.

由 $j_U(D) = D \cap M$, 我们得到 $M = L[j_U(D)] = L[D \cap M] = L[D]$. □

接下来, 我们试图回答第二个问题. 这里需要用到 1.1.4 小节中的迭代超幂构造. 应用迭代超幂我们将对 $L[D]$ 进行分析, 从而证明下述库能[8] 的唯一性定理：

定理 1.24 (Kunen)　设存在一个可测基数. 那么

(1) 设 D 是可测基数 κ 上的一个非平凡的正规超滤子. 如果 $\mathrm{V} = L[D]$, 那么 κ 是唯一的可测基数; D 是 κ 上的唯一的非平凡正规超滤子.

(2) 对于任意的序数 λ, 至多存在一个 $D \subset \mathfrak{P}(\lambda)$ 来实现下述结论:

(a) $D \in L[D]$;

(b) $L[D] \models D$ 是 λ 上的一个非平凡正规超滤子.

(3) 如果 $\kappa_1 < \kappa_2$ 是两个序数, D_1 与 D_2 具备如下特性:

$$L[D_i] \models D_i \text{ 是 } \kappa_i \text{ 上的一个非平凡正规超滤子} \ \ (i = 1, 2),$$

那么 $L[D_2]$ 是 $L[D_1]$ 的迭代超幂, 即

$$\exists \alpha \in \mathrm{Ord} \ \left(L[D_2] \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(L[D_1]) \wedge D_2 = j_{0,\alpha}(D_1) \right).$$

库能的唯一性定理的证明将由几个引理以及它们的证明所组成. 这既是因为整个证明比较长, 也是因为有些引理本身还提供新的有趣的信息.

首先我们来看看形如 $(L_\theta[D], \in, D)$ 的模型所具有的一般可以利用的特点, 其中 $D \in L_\theta[D]$ 作为模型中的一个常元. 一般而言, 设 $U \subset \mathfrak{P}(\kappa)$, 如果 θ 是一个足够大的基数以至于 $U \in L_\theta[U]$, 根据相对可构造性的绝对不变性质, 模型 $(L_\theta[U], \in)$ 的任何一个包括常元 U 以及 κ 中的全体序数的同质子模型的传递化都是形如 $(L_\alpha[U], \in)$ 的模型; 又由于模型 $(L_\theta[U], \in, U)$ 携带着一个可定义的秩序, 它便携带有可定义的斯科伦函数, 因此我们可以考虑它的子集的斯科伦闭包. 正是基于这样的考虑, 我们有下述引理：

引理 1.49　设在 $L[D]$ 中, D 是 κ 上的一个非平凡的正规超滤子. 设 A 是序数的一个势不小于 κ^+ 的集合. 令 θ 是一个足够大的基数以至于 $A \subset L_\theta[D]$ 以及 $D \in L_\theta[D]$. 令

$$M = \mathcal{SH}^{(L_\theta[D], \in, D)}(\kappa \cup A) \prec (L_\theta[D], \in, D).$$

那么 $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D] \subset M$. 因此, 对于每一个 $X \in \mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D]$, 都必然有一个斯科伦项 t 以及两组参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n < \kappa$ 和 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in A$ 来实现等式:

$$(L_\theta[D], \in, D) \models (X = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, D)).$$

8 Kenneth Kunen, Some applications of iterated ultrapowers in set theory. Ann. Math. Logic, 1(1970),179-227.

证明 给定 $M = \mathcal{SH}^{(L_\theta[D],\in,D)}(\kappa \cup A)$, 令 π 为 M 的传递化映射. 我们得到存在某个序数 α 来实现等式 $\pi[M] = L_\alpha[D]$. 因为 $|A| \geqslant \kappa^+$ 以及 $A \subset M$, 所以 $\alpha \geqslant \kappa^+$. 根据引理 1.47,

$$\mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D] \subset L_{\kappa^+}[D].$$

由于 π 在 κ 上是恒等函数, 我们就有 $\mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D] \subset M$. □

下述引理是证明 $L[D]$ 的唯一性的关键. 它表明当 $L[D]$ 的迭代超幂被迭代足够长的时候, 它的迭代超幂就由一个足够大的正则基数上的无界闭集滤子所完全确定, 也就是说, $L[D]$ 可以同质嵌入到一个 $L[F]$ 中, 而 F 是某个足够大的正则基数上的无界闭集滤子.

引理 1.50 设 $D \subset \mathfrak{P}(\kappa)$ 满足 $D \in L[D]$, 并且

$$L[D] \models D \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

对于每一个序数 α, 令 $\mathrm{ult}^{(\alpha)}(L[D], D)$ 为在 $L[D]$ 之中定义的经 D 所确定的 $L[D]$ 的第 α 次迭代超幂; 令

$$i_{0,\alpha} : L[D] \prec N_\alpha \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(L[D], D)$$

为相应的迭代嵌入映射. 令 $\lambda > \kappa^+$ 为一个正则基数. 令 F_λ 为 λ 上的无界闭集滤子. 那么

(1) $i_{0,\lambda}(D) = F_\lambda \cap N_\lambda$;

(2) $L[F_\lambda] = N_\lambda \cong \mathrm{ult}^{(\lambda)}(L[D], D)$.

证明 整个讨论都在 $L[D]$ 中进行, 因而不妨假设 $\mathrm{V} = L[D]$. 这样前面所建立起来的有关迭代超幂的理论完全适用.

首先根据引理 1.45 中的 (1), 由于

$$\left(2^\kappa\right)^{L[D]} = \left(\kappa^+\right)^{L[D]} \leqslant \kappa^+ < \lambda,$$

我们有等式 $i_{0,\lambda}(\kappa) = \lambda$. 令 $D_\lambda = i_{0,\lambda}(D)$. 根据引理 1.38, 每一个 $X \in D_\lambda$ 都事实上包含着 λ 的一个无界闭子集. 因此, $D_\lambda \subset F_\lambda$. 因为 D_λ 是 N_λ 中的 λ 上的非平凡正规超滤子, F_λ 是 λ 上的一个滤子, 我们就有 $N_\lambda \cap F_\lambda \subseteq D_\lambda$. 所以 (1) 中的等式成立.

关于 (2), 我们有下列等式:

$$N_\lambda = L[D_\lambda] = L[F_\lambda \cap N_\lambda] = L[F].$$ □

现在我们应用上述无界闭集滤子的迭代引理 (引理 1.50) 来证明下述正规超滤子唯一性引理, 从而可以完成库能唯一性定理之 (1) 和 (2) 的证明.

引理 1.51　设 $D_1, D_2 \subset \mathfrak{P}(\kappa)$ 并且 $D_i \in L[D_i]$ $(i=1,2)$. 如果

$$L[D_i] \models D_i \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子} \quad (i=1,2),$$

那么 $D_1 = D_2$.

证明　设 $D_1, D_2 \subset \mathfrak{P}(\kappa)$, $D_i \in L[D_i]$ $(i=1,2)$, 并且

$$L[D_i] \models D_i \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子} \quad (i=1,2).$$

我们来证 $D_1 = D_2$. 根据对称性, 我们来证 $D_1 \subseteq D_2$.

令 $\lambda > \kappa^+$ 为一个正则基数, F_λ 为 λ 上的无界闭集滤子. 令

$$j^i_{0,\lambda} : L[D_i] \prec M^i_\lambda \cong \mathrm{ult}^{(\lambda)}(L[D_i], D_i) \quad (i=1,2).$$

根据引理 1.50, $M^1_\lambda = L[F_\lambda] = M^2_\lambda$, 以及 $j^1_{0,\lambda}(D_1) = j^2_{0,\lambda}(D_2) = F_\lambda \cap L[F_\lambda]$.

令 $G = F_\lambda \cap L[F_\lambda]$. 令 A 为严格大于 λ 的并且梯度严格大于 κ 的强极限基数的一个势为 κ^+ 的集合:

$$|A| = \kappa^+ \wedge \forall \gamma \in A \left(\gamma = |\gamma| > \lambda \wedge \mathrm{cf}(\gamma) > \kappa \wedge \forall \eta < \gamma \left(2^{|\eta|} < \gamma\right)\right).$$

根据引理 1.45 中的 (2), $\forall \gamma \in A \left(j^1_{0,\lambda}(\gamma) = \gamma = j^2_{0,\lambda}(\gamma)\right)$. 令 $\theta > \sup(A)$ 为一个梯度严格大于 κ 的强极限基数. 根据引理 1.45 中的 (2), $j^1_{0,\lambda}(\theta) = \theta = j^2_{0,\lambda}(\theta)$.

设 $X \in D_1$. 根据引理 1.49,

$$X \in \mathcal{SH}^{(L_\theta[D_1], \in, D_1)}(\kappa \cup A).$$

令 t 为一个斯科伦项, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n < \kappa$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in A$ 为两组参数, 以至于它们一起来实现下述等式:

$$L_\theta[D_1] \models X = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, D_1).$$

引用这个斯科伦项和这两组参数在 $(L_\theta[D_2], \in, D_2)$ 中来定义一个集合 (用常元 D_2 替换 D_1), 得到一个 $Y \in L_\theta[D_2]$, 此 Y 满足下述等式:

$$L_\theta[D_2] \models Y = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, D_2).$$

我们现在的目标是证明: $Y \in D_2$, 并且 $Y = X$. 这将表明 $X \in D_2$.

为此, 令 $Z_1 = j^1_{0,\lambda}(X)$, 以及 $Z_2 = j^2_{0,\lambda}(Y)$. 根据 λ, θ 以及 A 的取法, 我们有

$$j^1_{0,\lambda}(\alpha_i) = \alpha_i \, (1 \leqslant i \leqslant n);\ j^1_{0,\lambda}(\gamma_k) = \gamma_k \, (1 \leqslant k \leqslant m);\ j^1_{0,\lambda}(\theta) = \theta;\ j^1_{0,\lambda}(D_1) = G.$$

将嵌入映射 $j^1_{0,\lambda}$ 应用到上面关于 X 与 t 的等式, 我们就有

$$L_\theta\left[j^1_{0,\lambda}(D_1)\right] \models j^1_{0,\lambda}(X) = t\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, j^1_{0,\lambda}(D_1)\right).$$

也就是

$$L_\theta[G] \models Z_1 = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, G).$$

再将嵌入映射 $j^2_{0,\lambda}$ 应用到上面关于 Y 与 t 的等式, 我们就有

$$L_\theta[G] \models Z_2 = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, G).$$

因此, 得到 $Z_1 = Z_2$.

根据迭代超幂有秩性定理 (Gaifman 定理 (定理 1.22)) 的推论 (推论 1.10), 有

$$X = Z_1 \cap \kappa \ \wedge\ Y = Z_2 \cap \kappa.$$

于是, $X = Y$.

由于 $j^2_{0,\lambda}(Y) \in G = j^2_{0,\lambda}(D_2)$, 我们有 $Y \in D_2$. 也就是 $X \in D_2$.

这就证明了 $D_1 \subseteq D_2$. 由对称性, $D_2 \subseteq D_1$. □

剩下的任务是证明库能定理的第三个结论. 为此我们需要下述引理:

引理 1.52 设 κ 和 D 具备如下性质:

$$L[D] \models D \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

令 $j_{0,1} : L[D] \prec N_1 \cong \mathrm{ult}(L[D], D)$ 为超幂嵌入映射. 设 γ 为一个满足不等式 $\kappa < \gamma < j_{0,1}(\kappa)$ 的序数. 那么一定不存在具备下述性质的 $U \subseteq \mathfrak{P}(\gamma)$:

$$L[U] \models U \text{ 是 } \gamma \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

证明 假设引理的结论不成立. 令 γ 为一个反例. 令 $U \subseteq \mathfrak{P}(\gamma)$ 见证如下事实:

$$L[U] \models U \text{ 是 } \gamma \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

令 $j : L[U] \prec N \cong \mathrm{ult}(L[U], U)$ 为超幂嵌入映射.

令 $\lambda = |\gamma|^{++}$. 令 F 为 λ 上的无界闭集滤子, 以及 $G = F \cap L[F]$. 由于 $L[U] \models$ GCH, 根据引理 1.45 中的 (2), 我们有 $j(\lambda) = \lambda$. 在 $L[U]$ 中, G 是 U 的第 λ 次迭代的像; 于是, 在 $L[j(U)]$ 中, $j(G)$ 是 $j(U)$ 的第 $j(\lambda)$ 次迭代的像. 因此 $j(G) = G$.

令 $f : \kappa \to \kappa$ 为 $L[D]$ 中的函数并且它在超幂 $\mathrm{ult}(L[D], D)$ 中表示序数 γ. 由于 D 在 $L[D]$ 中是正规超滤子, κ 上的恒等函数在超幂 $\mathrm{ult}(L[D], D)$ 中表示 κ. 于是, $(j_{0,1}(f))(\kappa) = \gamma$. 因为

$$j_{0,\lambda} : L[D] \prec L[G] \cong \mathrm{ult}^{(\lambda)}(L[D], D),$$

以及 $\gamma < \operatorname{Crit}(j_{1,\lambda}) = j_{0,1}(\kappa)$, 所以 $(j_{0,\lambda}(f))(\kappa) = \gamma$.

现在取 A 为一个具备下述性质的基数的集合:

$$|A| = \kappa^+ \wedge \forall \xi \in A \ (j_{0,\lambda}(\xi) = \xi \wedge j(\xi) = \xi \wedge \xi > \lambda).$$

根据引理 1.45 中的 (2), 我们很容易取到这样的 A. 再取一个基数 θ 满足下述要求:

$$\theta > \sup(A) \wedge j_{0,\lambda}(\theta) = \theta \wedge j(\theta) = \theta.$$

根据引理 1.49, f 在模型 $(L_\theta[D], \in, D)$ 中由集合 $\kappa \cup A \cup \{D\}$ 中的参数可定义. 因此, $j_{0,\lambda}(f)$ 在模型 $(L_\theta[G], \in, G)$ 中由集合 $\kappa \cup A \cup \{G\}$ 中的参数可定义. 依此, γ 在模型 $(L_\theta[G], \in, G)$ 中由集合 $\kappa \cup A \cup \{G\} \cup \{\kappa\}$ 中的参数可定义.

令 t 为一个斯科伦项, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \kappa$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in A$ 为两组参数, 以至于下述等式成立:

$$L_\theta[G] \models \gamma = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, G, \kappa).$$

应用超幂嵌入映射 j 于上述等式, 我们就得到

$$L_\theta[G] \models j(\gamma) = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, G, \kappa),$$

因为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \kappa < \gamma = \operatorname{Crit}(j)$, $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in A$ 都是 j 的不动点, 以及上面所论证的 $j(G) = G$. 可是, $j(\gamma) > \gamma$. 这就是一个矛盾. □

证明 现在我们可以来完成定理 1.24 中剩下的 (3) 的证明.

设 $\kappa_1 < \kappa_2$ 以及 D_1, D_2 具备下述性质:

$$L[D_i] \models D_i \text{ 是 } \kappa_i \text{ 上的非平凡正规超滤子} \quad (i = 1, 2).$$

令 α 满足下述要求的唯一序数: $L[D_1]$ 的由 D_1 所确定的第 α 次迭代嵌入映射 $j_{0,\alpha}$ 见证不等式

$$j_{0,\alpha}(\kappa_1) \leqslant \kappa_2 < j_{0,\alpha+1}(\kappa_1).$$

根据引理 1.52, 我们得到等式 $\kappa_2 = j_{0,\alpha}(\kappa_1)$. 再根据 $j_{0,\alpha}(D_1)$ 的唯一性, 我们就得到所要的结论. □

有关可测基数内模型的构造还剩下一个问题: 如果 U_1 与 U_2 是可测基数 κ 上的两个不同的非平凡的 κ-完全的超滤子, 那么由它们得到的内模型 $L[U_1]$ 与 $L[U_2]$ 是否也不相等?

推论 1.11 设 U 是可测基数 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 设 $D \subset \mathfrak{P}(\kappa)$ 满足下述要求:

$$L[D] \models D \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

那么 $L[U] = L[D]$.

证明 首先, $L[U] \models \kappa$ 是一个可测基数, $\bar{U}$ 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子, 其中,

$$\bar{U} = U \cap L[U].$$

根据定理 1.2, 在 $L[U]$ 中, κ 上有一个非平凡的正规超滤子 (因而也是 κ-完全的). 令 $D \in L[U]$ 满足要求:

$$L\,[D] \models D \text{ 是 } \kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

根据 $L[D]$ 的绝对不变性, $L[D] \subseteq L[U]$. 另一方面, 如果 $U \cap L[D] \in L[D]$, 那么

$$L[U] = L[U \cap L[D]] \subseteq L[D].$$

所以, 我们只需要证明 $U \cap L[D] \in L[D]$.

断言一 $U \cap L[D] \in L[D]$.

令 $j = j_U : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U) : \pi$. 令 $\gamma = j(\kappa)$. 设 $d : \kappa \to \kappa$ 为恒等函数. 令 $\delta = \pi([d])$, 其中 π 是超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 的传递化映射. 这样, 对于 $X \subseteq \kappa$ 都有

$$X \in U \iff \delta \in j(X).$$

根据同质性,

$$L[j(D)] \models j(D) \text{ 是 } \gamma \text{ 上的非平凡正规超滤子}.$$

应用定理 1.24 中的 (3), $L[j(D)]$ 是 $L[D]$ 的一个迭代超幂. 令 α 满足等式:

$$j_{0,\alpha} : L[D] \prec L[j(D)] \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(L[D], D).$$

从而, $\gamma = j_{0,\alpha}(\kappa), j(D) = j_{0,\alpha}(D)$.

断言二 $\forall X \in \mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D]\ (j(X) = j_{0,\alpha}(X))$.

断言二给出断言一：因为

$$U \cap L[D] = \{X \in L[D] \mid X \subseteq \kappa \wedge \delta \in j_{0,\alpha}(X)\} \in L[D].$$

现在我们来证明断言二.

为此, 我们再次应用引理 1.49. 根据引理 1.45 中的 (2), 取 A 为一个具备下述性质的基数的集合:

$$|A| = \kappa^+ \wedge \forall \xi \in A\ \left(j_{0,\lambda}(\xi) = \xi \wedge j(\xi) = \xi\right),$$

以及令 $\theta > \sup(A)$ 为一个强极限基数并且 $\mathrm{cf}(\theta) > \kappa$. 那么 $j_{0,\alpha}(\theta) = \theta = j(\theta)$. 根据引理 1.49, 如果 $X \in \mathfrak{P}(\kappa) \cap L[D]$, 那么有斯科伦项 t 和两组参数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n < \kappa$ 和 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m \in A$ 来见证等式:

$$L_\theta[D] \models X = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, D).$$

于是,

$$L_\theta[j_{0,\alpha}(D)] \models j_{0,\alpha}(X) = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, j_{0,\alpha}(D)),$$

以及

$$L_\theta[j(D)] \models j(X) = t(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \gamma_1, \cdots, \gamma_m, j(D)).$$

由于 $j(D) = j_{0,\alpha}(D)$, 上面的等式表明: $j_{0,\alpha}(X) = j(X)$.

断言二由此得证. □

上面推论的证明中涉及可测基数 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子如何应用满足要求

$$L[D] \models D \text{ 是}\kappa \text{ 上的非平凡正规超滤子}$$

的内模型的迭代超幂的刻画的问题. 实际上, 上述推论的证明给出了更多的信息: 假设 $\mathrm{V} = L[D]$ 以及 U 是可测基数 κ 上的任意一个非平凡的 κ-完全的超滤子, 那么存在序数 α 和 δ 来见证下述事实: 令 $\delta < j(\kappa) = j_{0,\alpha}(\kappa)$ 以及

$$U = \{ X \in \kappa \mid \delta \in j_{0,\alpha}(X) \},$$

其中, $j : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 和 $j_{0,\alpha} \prec M_\alpha \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, D)$.

有趣的是, 我们可以将此 α 选定为 ω:

定理 1.25　设 $\mathrm{V} = L[D]$ 以及 D 是可测基数 κ 上的非平凡正规超滤子. 如果 U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子, 那么

$$\exists \delta < j_{0,\omega}(\kappa) \ (U = \{X \in \kappa \mid \delta \in j_{0,\omega}(X)\}),$$

其中, $j_{0,\omega} : \mathrm{V} \prec M_\omega \cong \mathrm{ult}^{(\omega)}(\mathrm{V}, D)$ 是第 ω 次迭代嵌入映射.

证明　令 $j = j_U : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$. 我们知道 $\exists \alpha \ (j(\kappa) = j_{0,\alpha}(\kappa))$. 我们希望证明此 $\alpha < \omega$.

由于 $\mathrm{V} = L[D] = L[U]$, 有

$$L\left[j_{0,\alpha}(D)\right] \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, D) \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U) \cong L\left[j(U)\right] = L\left[j_{0,\alpha}(D)\right].$$

如果 $\alpha \geqslant \omega$, 那么在 $M_\alpha \cong \mathrm{ult}^{(\alpha)}(\mathrm{V}, D)$ 中, $j_{0,\omega}(\kappa)$ 是一个不可达基数 (它在 M_ω 中是可测基数); 可是在 $M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 中 $j_{0,\omega}(\kappa)$ 的梯度为 ω, 因为 $M^\omega \subset M$ 以及在 V 中 $j_{0,\omega}(\kappa)$ 的梯度是 ω. 这就是一个矛盾. 所以, $\alpha < \omega$.

设 $\delta < j(\kappa) = j_{0,n}(\kappa)$ 见证

$$U = \{X \in \kappa \mid \delta \in j_{0,n}(X)\}.$$

那么对于 $X \subseteq \kappa$, $\delta \in j_{0,n}(X) \iff \delta = j_{n,\omega}(\delta) \in j_{n,\omega}(j_{0,n}(X)) = j_{0,\omega}(X)$; 因此,

$$U = \{X \in \kappa \mid \delta \in j_{0,\omega}(X)\}.$$ □

这个定理有一个有趣的推论：当 $V = L[D]$ 时, 唯一可测基数 κ 上的非平凡的完全超滤子的个数恰好是 κ^+.

推论 1.12 *设 $V = L[D]$ 为可测基数 κ 的典型内模型. 那么 κ 之上恰好存在 κ^+ 个非平凡的 κ-完全的超滤子.*

证明 根据前面的特征定理 (定理 1.25), κ 之上的非平凡的 κ-完全的超滤子的个数不会超过 $|j_{0,\omega}(\kappa)| \leqslant \kappa^+$.

另一方面, 存在 $[\kappa]^\kappa$ 的一个势为 $2^\kappa = \kappa^+$ 的模理想 $[\kappa]^{<\kappa}$ 几乎不相交的子集合 A. 对于每一个 $X \in A$, 可以得到一个由 X 所确定的 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 所以, 在可测基数 κ 上存在至少 κ^+ 个非平凡的 κ-完全的超滤子. □

1.2 超紧基数

在这一节里, 我们试图将可测基数的概念提升到更高层次上去, 从而引进更高阶的无穷基数概念. 摆在我们面前的至少两条路径. 一是超滤子的存在性：在什么集合上存在什么样的超滤子; 一是同质嵌入映射: 存在具备什么样性质的同质嵌入映射. 下面就让我们沿着这两条路径来探讨一下是否可以得到实质性的概念提升.

首先看看超滤子概念提升的可能性.

第一, 我们希望引起注意的是超滤子的正规性条件. 在引入的可测基数的定义 (定义 1.1) 中, 我们以不可数基数 κ 上存在一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子作为资格判定条件; 后来我们在定理 1.2 中得知事实上可以用看起来似乎弱一些的条件——省略掉正规性——来作为可测基数的资格判定条件; 后面我们也知道, 尽管作为可测基数的资格条件, 省略正规性与否, 没有什么差别, 但是作为超滤子的存在性, 对于一个可测基数而言, 差别可能很大：在一个可测基数 κ 之上一定存在至少 κ^+ 个非平凡的 κ-完全的非正规的超滤子, 而完全有可能在它上面只存在唯一一个非平凡的正规超滤子. 可见, 正规性, 对于超滤子而言, 的确是比完全性强许多的一种性质. 另外, 通过超幂构造, 我们也清楚超滤子的正规性实质上就是超幂映射的临界点在超幂中以什么函数来表示的一种确定. 对于正规超滤子而言, 关键点在于恒等函数表示这个临界点; 而对于非正规超滤子而言, 恒等函数并不表示这个临界点. 这一节里, 我们将看到更为新鲜的状态：正规性将带来天壤之别.

第二, 我们希望引起注意的是超滤子在那里存在这样的事实. 在可测基数的定义 (定义 1.1) 中, 我们明确的是在不可数基数 κ 之上的超滤子的存在性. 事实上, 如果我们关注不可数正则基数 κ 上的理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\kappa) = [\kappa]^{<\kappa}$, 那么实际上就会发现 $\kappa \subset \mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 以及当考虑这个理想上的非平凡的 κ-完全的超滤子时, 一旦要求 κ 是这样的超滤子的元素, 我们就完全等价地回落到基数 κ 之上来. 换一种方式来说, 我们原本可以考虑 $\mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 之上的非平凡的 κ-完全的超滤子：$U \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}_\kappa(\kappa))$ 是

$\mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 之上的超滤子当且仅当它是集合布尔代数 $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}_\kappa(\kappa))$ 上的超滤子; 一旦要求作为 $\mathfrak{P}_\kappa(\kappa)$ 的一个特殊子集 κ 在这样的超滤子之中, 我们就很快简化到只需关注集合布尔代数 $\mathfrak{P}(\kappa)$ 上的超滤子.

基于上面的讨论, 可以试图将可测基数上的超滤子的概念以如下方式提升起来: 设 κ 是一个不可数的正则基数. 设 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数. 定义

$$\mathfrak{P}_\kappa(\lambda) = \{X \subseteq \lambda \mid |X| < \kappa\}.$$

这是集合布尔代数 $\mathfrak{P}(\lambda)$ 上的典型的具备 κ-可加性的理想. 在定义可测基数概念时, 我们仅仅考虑 $\lambda = \kappa$ 这一特殊情形. 现在还需要考虑 $\lambda > \kappa$ 的情形.

定义 1.15　设 κ 是一个不可数的正则基数. 设 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数. 设 $U \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}_\kappa(\lambda))$ 是一个超滤子.

(1) U 是 κ-**完全**的当且仅当对于任意的 $\gamma < \kappa$, 以及任意的 $f : \gamma \to U$,

$$\left(\bigcap_{\xi<\gamma} f(\xi)\right) \in U;$$

(2) U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个**精良测度**当且仅当 U 是 κ-完全的, 并且

$$\forall \gamma \in \lambda \ (\{y \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \gamma \in y\} \in U);$$

(3) U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个**正规测度**当且仅当 U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个精良测度, 并且具备如下正规特性: 如果 $A \in U$, $f : A \to \lambda$ 是一个选择函数, 那么

$$\exists \gamma < \lambda \ (\{x \in A \mid f(x) = \gamma\} \in U).$$

定义 1.16　(1) 称一个不可数的正则基数 κ 为一个**强紧基数**当且仅当对于任意一个基数 $\lambda \geqslant \kappa$ 而言, 理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上都存在一个精良测度.

(2) 称一个不可数的正则基数 κ 为一个**超紧基数**当且仅当对于任意一个基数 $\lambda \geqslant \kappa$ 而言, 理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上都存在一个正规测度.

(3) 称一个不可数的正则基数 κ 为一个 λ-**超紧基数**当且仅当 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数, 并且理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上存在一个正规测度.

由定义立即可见每一个强紧基数都是一个可测基数, 但是并非每一个可测基数都是强紧基数; 同样由定义可知每一个超紧基数都是一个强紧基数, 但是并非每一个强紧基数都是超紧基数. 后面将展示正规性在这种情形下所带来的差异.

我们再来看看同质嵌入映射可以怎样提升.

由可测基数 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子 U 我们构造出集合论论域 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$; 经过这个超幂的传递化与从 V 到此超幂的自然嵌入映射的复合, 得

到一个从 V 到一个传递类 M 的同质嵌入映射：$j : \mathrm{V} \prec M$. 这个嵌入映射有临界点 κ, 并且 $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$; 这个传递内模型 M 在 V 中关于长度为 κ 的序列是封闭的. 这样的同质嵌入映射的存在性与可测基数的存在性是对等的. 很自然地, 我们可以将同质嵌入映射在临界点的取值的大小作为一种提升的可能; 也可以将同质嵌入映射的目标内模型在 V 中的封闭度作为提升的可能. 将这两点综合纳入, 我们可以这样来提升可测基数的概念：

定义 1.17 设 $\lambda \geqslant \kappa$ 是两个序数. 称同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 是一个 (κ, λ)-**超紧嵌入映射**当且仅当

(1) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$ 以及 $\lambda < j(\kappa)$;

(2) M 是传递内模型, 并且 $M^\lambda \subset M$, 即若 $f : \lambda \to M$, 则 $f \in M$.

称 κ 为一个 λ-**超紧基数**当且仅当 $\lambda \geqslant \kappa$, 并且 λ 是一个基数以及存在一个 (κ, λ)-超紧嵌入映射; 称 κ 为一个**超紧基数**当且仅当对于所有基数 $\lambda \geqslant \kappa$ 而言, κ 都是一个 λ-超紧基数.

由 1.1 节中对可测基数的分析, 我们知道每一个可测基数 κ 都是一个 (κ, κ)-超紧基数. 但是有可能一个可测基数 κ 并不是一个 (κ, κ^+)-超紧基数. 由引理 1.6 的证明, 我们知道一个同质映射的临界点一定是一个可测基数, 所以任何一个 λ-超紧基数一定是一个可测基数. 诚如前面所说, 一个可测基数 κ 有可能连 κ^+-超紧基数都不是. 下面的命题则明确指出：当 κ 是一个 $(\kappa, 2^\kappa)$-超紧基数时, 它自身便是第 κ 个可测基数. 这自然与强紧基数的情形大不一样, 因为梅格铎 (Magidor) 曾经证明最小的强紧基数可以是最小的可测基数, 也就是说这两个最小基数的等式是一个相对一致的命题.

命题 1.2 设 κ 是 2^κ-超紧基数. 那么下面的集合是 κ 上的一个荟萃集:

$$T = \{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ 是一个可测基数}\},$$

事实上, κ 上存在一个包括 T 的正规测度 D. 从而 κ 是第 κ 个可测基数.

证明 设 κ 是 2^κ-超紧基数. 令 $\lambda = 2^\kappa$, 以及 $j : \mathrm{V} \prec M$ 是一个 (κ, λ)-超紧嵌入映射. 定义

$$D = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}.$$

用我们已经很熟悉的讨论得知 D 是 κ 上的一个正规测度. 由于 $|D| = 2^\kappa$, M 是 $\lambda = 2^\kappa$-封闭的, 所以 $D \in M$, 并且

$$M \models D \text{ 是 } \kappa \text{ 上的一个正规测度},$$

(因为 $\mathrm{V}_{\kappa+1} \subset M$) 因此, $M \models \kappa$ 是一个可测基数. 这也表明 $M \models \kappa \in j(T)$, 从而 $T \in D$. 由于 D 是正规测度, T 是 κ 的荟萃集. 这一点也可以直接证明：设 $C \subseteq \kappa$

是 κ 上的一个无界闭子集. 那么 $C=\kappa\cap j(C)$, 从而 $\kappa\in j(C)$. 于是,

$$M\models\exists\gamma\in j(C)\ (\gamma\text{是一个可测基数}).$$

根据嵌入的同质性, $\mathrm{V}\models\exists\gamma\in C$ (γ 是一个可测基数). 也就是说, $T\cap C\neq\varnothing$. □

下面的命题则表明超紧基数对于连续统函数有相当大的控制权:

命题 1.3 设 κ 是 λ-超紧基数, 并且 $\forall\alpha<\kappa\ \left(2^{|\alpha|}=|\alpha|^{+}\right)$. 那么

$$\forall\alpha\leqslant\lambda\ \left(2^{|\alpha|}=|\alpha|^{+}\right).$$

证明 设 κ 是 λ-超紧基数. 令 $j:\mathrm{V}\prec M$ 为一个 (κ,λ)-超紧嵌入映射. 设 $\kappa\leqslant\alpha\leqslant\lambda$ 是一个基数. 由于 M 是 λ-封闭的, $\mathfrak{P}(\alpha)=(\mathfrak{P}(\alpha))^{M}$ 以及 $(\alpha^{+})^{M}=\alpha^{+}$; 又因为, $\lambda<j(\kappa)$, 根据同质特性,

$$(2^{\alpha})^{M}=\left(\alpha^{+}\right)^{M}.$$

于是, $2^{\alpha}\leqslant(2^{\alpha})^{M}=(\alpha^{+})^{M}=\alpha^{+}$. □

现在我们必须回答的问题是: 定义 1.16 中的 (3) 所给出的概念与定义 1.17 的概念是否一致? 由定义 1.16 中的 (2) 所给出的超紧基数的存在性是否一定可以给出定义 1.17 所要求的同质嵌入映射? 我们把这些问题的解答留到后面 1.2.2 小节. 先将注意力转向对强紧基数的分析.

1.2.1 强紧基数

在这一小节里, 我们来探讨强紧基数的内涵以及它们的存在性对集合论论域的影响, 并解答在第二卷第 2 章中留下的问题.

下面的定理揭示强紧基数的不同侧面: 强紧基数还可以被认为是 ω 上的两条基本定理的自然推广: 塔尔斯基的超滤子定理 (定理 I.2.19), 以及一阶逻辑的紧致性定理 (定理 II.1.21).

定理 1.26 设 κ 是一个不可数的正则基数. 那么下述命题等价:

(1) κ 是一个强紧基数;

(2) 任何集合 X 上的每一个 κ-完全的滤子都可以扩展成一个 κ-完全的超滤子;

(3) 语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 具备紧致性定理, 即对于语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ (见定义 II.2.20) 的语句的任意集合 Σ, 如果 Σ 的每一个势严格小于 κ 的子集合都有一个模型, 那么 Σ 一定有一个模型.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 令

$$F=\left\{X\subseteq\mathfrak{P}_{\kappa}(\lambda)\mid\exists a\in\mathfrak{P}_{\kappa}(\lambda)\ \left(X\supseteq\left\{x\in\mathfrak{P}_{\kappa}(\lambda)\mid a\subseteq x\right\}\right)\right\}.$$

由于理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 是 κ-可加的, F 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个 κ-完全的滤子. 根据 (2), 令 $F \subset U \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}_\kappa(\lambda))$ 为一个 κ-完全的超滤子. 那么 U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个精良测度.

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 Σ 为 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 的语句的一个集合, 并且 Σ 的每一个势严格小于 κ 的子集合都有一个模型. 令

$$\lambda = |\Sigma| \ \wedge \ f : \lambda \cong \Sigma.$$

令 U_1 为 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个精良测度. 令 U 为 $\mathfrak{P}_\kappa(\Sigma)$ 上的经双射 f 和 U_1 所确定的精良测度. 对于每一个 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\Sigma)$, 令 $\mathfrak{A}_x \models x$. 考虑由 U 所确定的超积：

$$\mathfrak{A} = \prod_U \{\mathfrak{A}_x \mid x \in \mathfrak{P}_\kappa(\Sigma)\}.$$

对此超积, 我们有 Łoś 定理：对于 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 中的语句 σ, 都有

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\Sigma) \mid \mathfrak{A}_x \models \sigma\} \in U.$$

这种情形下的证明和语言 $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ 中的超积基本定理——Łoś 定理——的证明一样, 唯一不同之处在于超滤子的 ω-完全性与 κ-完全性, 而这也正是 $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ 与 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 中的析取表达式与合取表达式的长度区别所在. 因此, 我们将这种情形的超积基本定理的证明留作练习.

由于 U 是一个精良测度, 对于 $\sigma \in \Sigma$, 集合

$$A_\sigma = \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\Sigma) \mid \sigma \in x\} \in U.$$

因为对于 $x \in A_\sigma$ 都有 $\mathfrak{A}_x \models \sigma$, 所以 $\mathfrak{A} \models \sigma$. 这就表明 $\mathfrak{A}$ 是 Σ 的一个模型.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 X 是任意一个集合. 令 F 是 X 上的一个 κ-完全的滤子. 考虑如下语言符号的全体：对于每一个 $x \subseteq X$, 引进一个一元谓词符号 P_x; 外加一个常元符号 c. 在这些符号基础上, 考虑语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$. 令 Σ 为语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 的下述语句之全体：

(i) 所有在结构 $(X, a)_{a \subseteq X}$ 中成立的 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ 语句;

(ii) 对于每一个 $a \in F$, 语句 $P_a(c)$.

断言一 如果 $S \subset \Sigma$ 满足 $|S| < \kappa$, 那么 S 有一个模型.

给定 $S \subset \Sigma$ 满足 $|S| < \kappa$. 令

$$A_S = \{a \in F \mid P_a(c) \in^* S\},$$

其中 $P_a(c) \in^* S$ 意味着 $P_a(c)$ 是 S 中的某个语句的子语句. 由于 $|S| < \kappa$, F 是 κ-完全的滤子, 所以 $\bigcap A_S$ 非空. 令 $d \in \bigcap A_S$. 考虑结构

$$\mathfrak{A}_S = (X, a, d)_{P_a \in^* S \,\wedge\, a \subseteq X},$$

其中对于在 S 中的某个语句中出现的 P_a, 我们用 $a \subseteq X$ 作为符号 P_a 的解释; 用 $d \in X$ 来解释常元符号 c. 那么 S 中的每一个语句 σ 都在 $\mathfrak{A}_S$ 中为真. 从而, $\mathfrak{A}_S$ 是 S 的一个模型.

据此断言一以及 (3), Σ 有一个模型

$$\mathfrak{A}_S = (X, a, d)_{a \subseteq X}.$$

定义

$$U = \{a \subseteq X \mid \mathfrak{A} \models P_a(c)\}.$$

断言二　$F \subset U$; U 是 X 上的一个 κ-完全的超滤子.

设 $a \in F$. 那么 $P_a(c) \in \Sigma$. 所以, $\mathfrak{A} \models P_a(c)$. 于是, $a \in U$.

接下来我们验证 U 是一个 κ-完全的超滤子. 第一, 设 $\alpha < \kappa$ 并且 $\langle a_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ 是来自 U 的一个长度为 α 的序列. 那么, 对于每一个 $\xi < \alpha$, 都有

$$\mathfrak{A} \models P_{a_\xi}(c).$$

从而 $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{\xi<\alpha} P_{a_\xi}(c)$. 令 $b = \bigcap_{\xi<\alpha} a_\xi$. 那么 $\mathfrak{A} \models P_b(c)$. 所以, $b \in U$. 第二, 如果 $a \in U$, $a \subset b \subset X$, 由 $\mathfrak{A} \models P_a(c)$ 得到 $\mathfrak{A} \models P_b(c)$. 所以 $b \in U$. 第三, $\mathfrak{A} \not\models P_\varnothing(c)$ 以及 $\mathfrak{A} \models P_X(c)$. 因此, $X \in U$ 以及 $\varnothing \notin U$. 第四, 设 $a \subset X$. 那么 $(\mathfrak{A} \models P_a(c)) \iff \left(\mathfrak{A} \not\models P_{(X-a)}(c)\right)$. 所以 U 是一个超滤子. □

前面我们证明了 Scott 定理 (定理 1.10)：可测基数的存在性蕴涵 $\mathrm{V} \neq L$. 现在来证明一个类似的结论[9]：强紧基数的存在性蕴涵 $\forall A\,(\mathrm{V} \neq L[A])$. 这自然与前面可测基数的典型内模型形成鲜明对比：在那里, $\mathrm{V} = L[D]$ 总是可能的.

定理 1.27 (Vopenka-Hrbráček)　*如果存在一个强紧基数, 那么* $\forall A\,(\mathrm{V} \neq L[A])$.

证明　假设结论不成立：$\exists A\,(\mathrm{V} = L[A])$. 根据选择公理, 我们不妨假设 A 是序数的一个集合. 设 κ 是一个强紧基数. 令 $\lambda \geqslant \kappa$ 为一个包含 A 的基数. 考虑 λ^+-完全的滤子：

$$F = \left\{X \subseteq \lambda^+ \;\middle|\; \left|\lambda^+ - X\right| \leqslant \lambda\right\}.$$

令 $U \supset F$ 为一个 κ-完全的超滤子. 那么 $\forall X \in U\ (|X| = \lambda^+)$. 因为 $\kappa > \omega$, U 的 κ-完全性保证了 V 的经 U 所确定的超幂是有秩结构. 令

$$j = j_U : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$$

为超幂典型嵌入映射.

9 Petr Vopenka and Karel Hrbráček, On strongly measurable cardinals. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 14(1966), 581-591.

我们来考虑这种超幂构造中的一种特殊情形: 仅仅考虑由定义在 λ^+ 上的但值域的势最多为 λ 的函数所确定的超幂.

称函数 $f:\lambda^+\to \mathrm{V}$ 为一个**小值域函数**当且仅当 $|\mathrm{rng}(f)|\leqslant\lambda$.

对于小值域函数 f,g, 定义

$$f=^* g\leftrightarrow \left\{\alpha<\lambda^+ \;\middle|\; f(\alpha)=g(\alpha)\right\}\in U,$$

以及 $[f]_-$ 为所有与 f 等价的小值域函数中秩最小的那些小值域函数的集合; 同样地, 我们有

$$[f]_-=[g]_-\leftrightarrow f=^* g.$$

再定义

$$[f]_-\,\epsilon\,[g]_-\leftrightarrow \left\{\alpha<\lambda^+ \;\middle|\; f(\alpha)\in g(\alpha)\right\}\in U.$$

令 $\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)$ 为所有小值域函数经 U 所确定的超幂. 对此超幂 $\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)$, 同样有 Łoś 基本定理: 对于小值域函数 $f_1,\cdots,f_n$,

$$\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)\models\varphi\left[[f_1]_-,\cdots,[f_n]_-\right]\iff\left\{\alpha<\lambda^+\mid\varphi\left[f_1(\alpha),\cdots,f_n(\alpha)\right]\right\}\in U.$$

我们将这个受限制超幂基本定理的证明留给感兴趣的读者. 由于 U 是 κ-完全的, 这个受限制超幂也是有秩结构. 令

$$i:\mathrm{V}\prec N\cong\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U),$$

其中 $x\mapsto[c_x]_-$ 是从 V 到 $\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)$ 的自然嵌入映射, c_x 是定义在 λ^+ 上的取常值 x 的函数.

注意, 对于任何一个小值域函数 f, 它在 $\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)$ 中有一个等价类 $[f]_-$; 它在 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 中也有一个等价类 $[f]$; 对于任意两个小值域函数 f 和 g, 我们总有

$$[f]_-=[g]_-\iff[f]=[g].$$

于是, 自然有一个从 $\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)$ 到 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 的同质嵌入映射:

$$k_1:\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)\ni[f]_-\mapsto[f]\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},U),$$

并且交换图 $j=\pi\circ k_1\circ\pi_-^{-1}\circ i$ 成立, 其中

$$\pi:\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)\cong M \text{ 以及 } \pi_-:\mathrm{ult}_-(\mathrm{V},U)\cong N$$

为各自的传递化映射; $j(x)=\pi\left([c_x]\right)$ 以及 $i(x)=\pi_-\left([c_x]_-\right)$.

同样需要注意的是对于 $\gamma < \lambda^+$ 以及 $f : \lambda^+ \to \gamma$, f 是一个小值域函数. 所以, $[f]_- = [f]$. 另外, 因为 λ^+ 是正则基数, 如果 $f : \lambda^+ \to \lambda^+$ 是一个小值域函数, 那么 f 在 λ^+ 中有界. 所以

$$i\left(\lambda^+\right) = \sup\{i(\gamma) \mid \gamma < \lambda^+\}.$$

也就是说, 对于 $\xi < i\left(\lambda^+\right)$, $k(\xi) = \xi$, 其中, $k = \pi \circ k_1 \circ \pi_-^{-1} : N \prec M$.

类似地, 我们有 $i(A) = j(A)$. 因此, $M = L[j(A)] = L[i(A)] = N$.

我们即将得到我们所需寻找的矛盾：因为

$$j\left(\lambda^+\right) > \sup\left\{j(\gamma) \;\middle|\; \gamma < \lambda^+\right\} = \sup\left\{i(\gamma) \;\middle|\; \gamma < \lambda^+\right\} = i\left(\lambda^+\right),$$

一方面, N 认为 $i\left(\lambda^+\right)$ 是 $i(\lambda)$ 的后继基数; M 认为 $j\left(\lambda^+\right)$ 是 $j(\lambda) = i(\lambda)$ 的后继; 尽管 $M = N$, 它们关于 $i(\lambda) = j(\lambda)$ 的后继为何却不相同. 这就是矛盾.

剩下的, 我们来验证最左边的不等式：令 d 为 λ^+ 上的恒等函数 (这个函数并非小值域函数). 那么在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 之中, 对于每一个 $\gamma < \lambda^+$, $[c_\gamma] < [d]$; 并且 $[d] < [c_{\lambda^+}]$. 所以上述不等式成立. □

强紧基数的存在不仅保证许多形形色色的超滤子存在, 而且还保证强紧基数之上奇异基数假设一定成立. 现在就来讨论强紧基数所提供的这些有趣事实.

首先来看看强紧基数可以带给我们一些什么样的有用的超滤子. 下面的引理可以理解为在强紧基数基础上的 “钻石原理”：任何一个大于强紧基数的正则基数上都存在一个 “弱钻石序列”. 这种弱钻石序列的存在恰恰是奇异基数假设在强紧基数之上成立的根本理由. 这自然可以与超紧基数对于连续统函数的控制权命题 (命题 1.3) 有可比之处.

引理 1.53　*设 κ 是一个强紧基数. 设 $\lambda > \kappa$ 是一个正则基数. 令 $A = \{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \kappa\}$. 那么 λ 上存在一个 κ-完全的均匀的包括下述集合 $A \subset \lambda$ 的超滤子 D (D 是均匀的当且仅当 $\forall X \in D\ (|X| = \lambda)$); 以及存在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的一个势为 λ 的子集合*

$$\{M_\alpha \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \alpha < \lambda\}$$

以至于下述要求得到满足

$$\forall \gamma < \lambda\ \left(\{\alpha < \lambda \mid \gamma \in M_\alpha\} \in D\right);$$

在此基础上下述等式成立:

$$\mathfrak{P}_\kappa(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathfrak{P}\left(M_\alpha\right).$$

从而, $|\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)| = \lambda^{<\kappa} = \lambda$.

证明 (a) D 的存在性.

令 U 为 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个精良测度. 考虑 V 的经 U 所确定的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$. 令

$$j = j_U : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V},U).$$

令 $f : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ 在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 中满足要求

$$[f] = \sup\{[c_\gamma] \mid \gamma < \lambda\}.$$

由于 U 是精良测度, 对于 $\gamma < \lambda$,

$$A_\gamma = \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \gamma \in x\} \in U.$$

令 $g : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to \lambda$ 由下述等式确定:

$$g(x) = \sup(x).$$

那么 $\forall\gamma < \lambda\, \forall x \in A_\gamma\ (c_\gamma(x) < g(x))$; 从而 $\forall\gamma < \lambda\ ([c_\gamma] < [g])$. 于是, $[f] \leqslant [g] < [c_\lambda]$.

应用这个极小函数 f, 我们将 U 变换到 λ 上一个超滤子 D : 对于 $X \subseteq \lambda$, 令

$$X \in D \iff f^{-1}[X] \in U.$$

根据定理 1.2 的证明我们知道 D 是 λ 上的一个 κ-完全的超滤子. 由于对 $\gamma < \lambda$, 总有 $[c_\gamma] < [f]$, D 是非平凡的; 再由于对 $\gamma < \lambda$,

$$\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) > \gamma\} \in U,$$

$\forall\gamma < \lambda\ (\{\alpha < \lambda \mid \alpha > \gamma\} \in D)$, 所以 D 是一个均匀的超滤子.

剩下的需要证明 $\{\alpha < \lambda \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \kappa\} \in D$. 为此, 我们来证明

$$\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \mathrm{cf}(f(x)) < \kappa\} \in U.$$

这个结论由下述给出:

$$\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) = \sup\{\alpha \in x \mid \alpha < f(x)\}\} \in U.$$

自然, 由定义, $\forall x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\ (f(x) \geqslant \sup\{\alpha \in x \mid \alpha < f(x)\})$. 所以, 我们只需证明下述结论:

$$\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) \leqslant \sup\{\alpha \in x \mid \alpha < f(x)\}\} \in U.$$

对于 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 令 $h(x) = \sup\{\alpha \in x \mid \alpha < f(x)\}$. 对于 $\gamma < \lambda$, $\forall x \in A_\gamma\ (\gamma \leqslant h(x))$. 所以, 对于任意的 $\gamma < \lambda$, 在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 中一定有 $[c_\gamma] \leqslant [h]$. 由 f 的最小性, $[f] \leqslant [h]$. 也就是

$$\{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) \leqslant \sup\{\alpha \in x \mid \alpha < f(x)\}\} \in U.$$

(b) 所要序列的存在性.

令 D 为上面 (a) 中得到的 λ 上的 κ-完全的均匀的超滤子. 令 $d:\lambda\to\lambda$ 为恒等函数. 根据上面的分析, $\forall\gamma<\lambda\ (\{\alpha<\lambda\mid\alpha>\gamma\}\in D)$. 因此, 在 V 的经 D 所确定的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},D)$ 中,

$$[d]_D=\sup\{[c_\gamma]\mid\gamma<\lambda\}.$$

又因为 $A=\{\alpha<\lambda\mid\mathrm{cf}(\alpha)<\kappa\}\in D$, 对于 $\alpha\in A$, 令 A_α 为 α 的一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的单调递增且在 α 中无界的序列. 如果 $\alpha<\lambda$ 为一个梯度不小于 κ 的极限序数, 令 $A_\alpha=\varnothing$. 于是, 我们得到一个定义在 λ 上的函数

$$H=\langle A_\alpha\mid\alpha<\lambda\rangle.$$

在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},D)$ 中, $[H]_D$ 是一个在序数 $[d]_D$ 中无界的单调递增的序数序列. 这样, $[d]$ 有两个单调递增且在其中无界的序数序列: $[H]_D$ 和 $\left\{[c_\xi]_D\ \middle|\ \xi<\lambda\right\}$.

递归地定义一个序列 $\langle\eta_\xi\mid\xi<\lambda\rangle$ 如下:

(i) $\eta_0=0$;

(ii) 给定 η_γ, 令 $\eta_{\gamma+1}$ 为满足不等式的最小序数 η :

$$\exists\xi<\lambda\ \left([c_\xi]\in[H]\wedge\left[c_{\eta_\gamma}\right]\leqslant[c_\xi]<[\eta]\right);$$

(iii) 如果 $\gamma<\lambda$ 是一个极限序数, 那么

$$\eta_\gamma=\sup\{\eta_\beta\mid\beta<\gamma\}.$$

对于 $\gamma<\lambda$, 令 $I_\gamma=\{\xi<\lambda\mid\eta_\gamma\leqslant\xi<\eta_{\gamma+1}\}$. 那么, 对于每一个 $\gamma<\lambda$,

$$\{\alpha<\lambda\mid I_\gamma\cap A_\alpha\neq\varnothing\}\in D.$$

对于 $\alpha<\lambda$, 令

$$M_\alpha=\{\gamma<\lambda\mid I_\gamma\cap A_\alpha\neq\varnothing\}.$$

因此,

$$\forall\gamma<\lambda\ (\{\alpha<\lambda\mid\gamma\in M_\alpha\}\in D).$$

最后, 我们需要测量 M_α 的大小. 对于每一个 $\alpha<\lambda$, $|A_\alpha|<\kappa$; 对于 $\gamma<\beta$, $I_\gamma\cap I_\beta=\varnothing$. 所以, 对于每一个 $\alpha<\lambda$, $M_\alpha\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$.

(c) 令 D 为 (a) 所给出, 序列 $\{M_\alpha\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\mid\alpha<\lambda\}$ 由 (b) 所给出. 自然, 对于每一个 $\alpha<\lambda$, $\mathfrak{P}(M_\alpha)\subset\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$. 现在设 $x\in\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$. 根据它们所具备的特性,

$$\{\alpha<\lambda\mid x\subset M_\alpha\}\in D.$$

所以, $\exists\alpha<\lambda\ (x\in\mathfrak{P}(M_\alpha))$.

因为 κ 是一个不可达基数, 对于 $\alpha<\lambda$, 由 $|M_\alpha|<\kappa$ 得到 $|\mathfrak{P}(M_\alpha)|<\kappa$. 所以

$$|\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)|=\sum_{\alpha<\lambda}|\mathfrak{P}(M_\alpha)|\leqslant\sum_{\alpha<\lambda}\kappa=\lambda.$$ □

现在我们可以马上得到索洛维关于奇异基数假设在强紧基数之上成立[10] 的定理.

定理 1.28 (Solovay) 设 κ 是一个强紧基数. 如果 $\lambda>\kappa$ 是一个奇异基数, 并且 $2^{\mathrm{cf}(\lambda)}<\lambda$, 那么 $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}=\lambda^+$.

证明 设 $\lambda>\kappa$ 是任意一个基数. 根据引理 1.53 中的 (3), 我们有

$$\lambda^{<\kappa}\leqslant\left(\lambda^+\right)^{<\kappa}=\lambda^+.$$

所以对于所有的 $\lambda>\kappa$, 都有 $\lambda^{\aleph_0}\leqslant\lambda^+$. 尤其是对于所有的梯度为 ω 的极限基数 $\lambda>\kappa$, 都有 $\lambda^{\aleph_0}=\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}=\lambda^+$. 根据银杰定理 (定理 I.2.38)(应用到 κ 上), 我们得到所要的结论. □

1.2.2 超紧基数

在这一小节里, 我们来回答前面在定义了超紧基数之后所提出的两个概念的一致性问题. 下面的定理表明两个定义所给出的概念是一致的.

定理 1.29 设 $\kappa\leqslant\lambda$ 是两个序数. 如下两个命题对等:

(1) 存在一个 (κ,λ)-超紧嵌入映射 $j:\mathrm{V}\prec M$;

(2) κ 是一个不可数的正则基数, 并且理想 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上存在一个正规测度.

证明 (1)⇒(2). 设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个 (κ,λ)-超紧嵌入映射. 根据引理 1.6, $\kappa=\mathrm{Crit}(j)$ 一定是一个可测基数. 由于 $M^\lambda\subset M$, λ 在 j 作用下的像集 $j''\lambda=j[\lambda]\in M$, 并且在 M 中, $|j[\lambda]|=\lambda<j(\kappa)$, 因为 λ 是 $j[\lambda]$ 的传递化集合. 应用这一信息, 我们如下定义 U_1: 对于 $X\subseteq\mathfrak{P}(\lambda)$, 令

$$X\in U_1\leftrightarrow j[\lambda]\in j(X).$$

根据上面的分析, $j[\lambda]\in j\left(\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\right)=\mathfrak{P}_{j(\kappa)}(j(\lambda))$. 所以, $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\in U_1$.

由此, 我们定义: 对于 $X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 令

$$X\in U\leftrightarrow j[\lambda]\in j(X).$$

10 Robert Solovay, Strongly compact cardinals and the GCH. In "Proceedings of the Tarski Symposium." (Henkin et al. eds.) Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vol 25. Providence, American Math. Soc., (1974), 365-372.

断言 U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度.

第一, 根据定义一目了然: U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个超滤子.

第二, 我们来验证 U 是 κ-完全的. 设 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle \in U^\gamma$ 是 U 中元素的一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的序列. 令 $X = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} X_\alpha$. 由于 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $j(\gamma) = \gamma$. 于是,

$$j(X) = j\left(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha<\gamma} j\left(X_\alpha\right).$$

从而, $j[\lambda] \in j(X)$. 这表明 $X \in U$.

第三, 我们来验证 U 是一个精良测度: 设 $\alpha < \lambda$. 令 $A_\alpha = \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \alpha \in x\}$. 那么

$$j\left(A_\alpha\right) = \left\{x \in \mathfrak{P}_{j(\kappa)}(j(\lambda)) \;\middle|\; j(\alpha) \in x\right\}.$$

由于 $\alpha \in \lambda$, 所以 $j(\alpha) \in j[\lambda]$. 因此, $j[\lambda] \in j\left(A_\alpha\right)$. 从而, $A_\alpha \in U$.

第四, 我们来验证 U 具备正规性: 设 $A \in U$, $f : A \to \lambda$ 是 A 上的一个选择函数. 那么 $j(f)$ 是 $j(A)$ 上的一个选择函数. 由于 $j[\lambda] \in j(A)$, $j(f)(j[\lambda]) \in j[\lambda]$. 令 $\alpha < \lambda$ 满足等式 $j(\alpha) = j(f)(j[\lambda])$. 令

$$B = \{x \in A \mid f(x) = \alpha\}.$$

那么 $j(B) = \{x \in j(A) \mid j(f)(x) = j(\alpha)\}$. 由上面的等式 $j(\alpha) = j(f)(j[\lambda])$, 我们得到 $j[\lambda] \in j(B)$. 于是, $B \in U$. 可见, 的确 U 具备正规性.

综上所述, U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 κ 是一个不可数的正则基数, $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数. 令 $U \subset \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\right)$ 为 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度. 应用超滤子 U 确定 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$. 这是 ZFC 的一个有秩模型. 令 $\pi : \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U) \cong M$ 为传递化映射, $i : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 是由等式 $i(x) = [c_x]$ 所确定的自然超幂嵌入映射. 令 $j = j_U = \pi \circ i : \mathrm{V} \prec M$ 为典型超幂嵌入映射.

令 $\mathrm{Id} : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 为恒等函数. 令 $d = \pi([\mathrm{Id}])$. 那么, 对于 $X \subseteq \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$,

$$X \in U \leftrightarrow d \in j(X).$$

有趣的是, 当 U 是正规测度时, $d = j[\lambda]$, 从而对于 $X \subseteq \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$,

$$X \in U \leftrightarrow j[\lambda] \in j(X).$$

我们现在来验证等式 $d = j[\lambda]$.

一方面, 我们知道 U 是精良测度, 所以对于任意的 $\gamma < \lambda$,

$$A_\gamma = \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \gamma \in x\} \in U,$$

因而 $[c_\gamma] \,\epsilon\, [\mathrm{Id}]$. 故 $j(\gamma) \in d$. 所以, $j[\lambda] \subseteq d$. 另一方面, 如果 $[f] \,\epsilon\, [\mathrm{Id}]$, 那么

$$A = \{ x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) \in x\} \in U,$$

这样, f 在 A 上是一个选择函数. 由 U 的正规性,

$$\exists \gamma < \lambda \left(B = \{ x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid f(x) = \gamma\} \in U\right).$$

也就是说, $\exists \gamma < \lambda$ $([c_\gamma] = [f])$. 从而, $\pi([f]) \in j[\lambda]$. 因此, $d \subseteq j[\lambda]$.

依据 U 的这一特点：$X \in U \leftrightarrow j[\lambda] \in j(X)$, 我们来证明 $j : \mathrm{V} \prec M$ 是一个 (κ, λ)-超紧嵌入映射. 根据超幂的定义, 以及 U 的这一刻画, 我们有

$$[f] =^* [g] \leftrightarrow j(f)(j[\lambda]) = j(g)(j[\lambda]) \;\wedge\; [f] \,\epsilon\, [g] \leftrightarrow j(f)(j[\lambda]) \in j(g)(j[\lambda]);$$

以及 $M = \{j(f)(j[\lambda]) \mid f \in \mathrm{V} \wedge f : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to \mathrm{V}\}$.

对于 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 令 $k(x) = \kappa_x = x \cap \kappa$, 以及 $\ell(x) = \lambda_x = \mathrm{ot}(x) = x$ 的序型.

(a) κ 是 j 的临界点以及 $\lambda < j(\kappa)$.

由于 $\lambda = \mathrm{ot}(d) = \mathrm{ot}(j[\lambda])$, $\lambda = \pi([\ell])$. 因为对于每一个 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, $\ell(x) < \kappa$, 所以 $[\ell] \,\epsilon\, [c_\kappa]$. 于是, $\lambda < j(\kappa)$. 因为 U 是 κ-完全的, 所以对于每一个 $\xi < \kappa$ 都有 $j(\xi) = \xi$. 由此, $\kappa = j[\lambda] \cap j(\kappa)$, 并且 $\kappa = \pi([k])$.

(b) 如果 $\langle a_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle \in M^\lambda$, 那么 $\langle a_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle \in M$.

对于每一个 $\alpha < \lambda$, 令 $f_\alpha : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to \mathrm{V}$ 满足等式 $j\left(f_\alpha\right)(j[\lambda]) = a_\alpha$. 利用这个序列

$$\langle f_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle,$$

我们定义一个函数 $f : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \to V$ 如下：对于每一个 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 令

$$f(x) = \langle f_\alpha(x) \mid \alpha \in x\rangle.$$

断言 $j(f)(j[\lambda]) = \langle a_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$.

由定义,

$$\mathrm{V} \models \forall x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \ \left(f(x) = \langle f_\alpha(x) \mid \alpha \in x\rangle\right),$$

根据同质性：

$$M \models \forall x \in \mathfrak{P}_{j(\kappa)}(j(\lambda)) \ \left(j(f)(x) = \langle j\left(f_\alpha\right)(x) \mid j(\alpha) \in x\rangle\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} j(f)(j[\lambda]) &= \langle j\left(f_\alpha\right)(j[\lambda]) \mid j(\alpha) \in j[\lambda]\rangle \\ &= \langle j\left(f_\alpha\right)(j[\lambda]) \mid \alpha \in \lambda\rangle \\ &= \langle a_\alpha \mid \alpha \in \lambda\rangle. \end{aligned}$$

□

在结束这一小节前, 我们来展示一下超紧基数的一种全域掌控的能力: 它有一种通用计算规则以至于可以将全域之中的任何有趣的对象集合纳入到这种算法的随意指派的超幂解释的计算结果中来. 在一定意义上讲, 这是一种具有全局反演特性的 “强钻石原理”.

定理 1.30 (Laver) *设 κ 为一个超紧基数. 那么存在一个具备下述特性的函数 $f:\kappa\to \mathrm{V}_\kappa$: 对于任意集合 x, 对于任意大于 $\max\{\kappa, |\mathcal{TC}(x)|\}$ 的基数 λ, 都一定存在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度 U 来见证等式 $j_U(f)(\kappa)=x$, 其中 $j_U:\mathrm{V}\prec M\cong \mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 为依 U 所确定的超幂嵌入映射.*

证明 假设定理的结论不成立. 对 $f:\kappa\to\mathrm{V}_\kappa$, 令 $\lambda_f\geqslant\kappa$ 为满足下述性质的最小基数:

$$\exists x\ \left(|\mathcal{TC}(x)|\leqslant\lambda_f\ \wedge\ \forall U\subset\mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}_\kappa\left(\lambda_f\right)\right)\ \left(U\,\text{是一个正规测度}\to j_U(f)(\kappa)\neq x\right)\right).$$

令 $\nu>\sup\left\{\lambda_f\mid f:\kappa\to\mathrm{V}_\kappa\right\}$ 为一个强极限基数. 令 $j:\mathrm{V}\prec M$ 为一个 (κ,ν)-超紧嵌入映射.

用 $\varphi\left(g,\lambda_g\right)$ 来记下述命题:

$$\left(\begin{array}{l}g\,\text{是一个函数}\ \wedge\ \alpha=\mathrm{dom}(g)=|\mathrm{dom}(g)|\ \wedge\ \mathrm{rng}(g)\subset\mathrm{V}_\alpha\wedge\\ \lambda_g=\text{满足下述条件的最小序数}\,\gamma,\\ \gamma=|\gamma|\geqslant\alpha\ \wedge\ \exists x\left(\begin{array}{l}\gamma\geqslant|\mathcal{TC}(x)|\wedge\\ \left(\neg\left(\exists U\left(\begin{array}{l}U\,\text{是}\,\mathfrak{P}_\alpha(\gamma)\,\text{上的正规测度}\\ \wedge\quad\left(j_U(g)(\alpha)=x\right)\end{array}\right)\right)\right)\end{array}\right)\end{array}\right).$$

由于 $M^\nu\subset M$, ν 是一个强极限基数, $\nu=|\mathrm{V}_\nu|$, 所以, $\mathrm{V}_\nu\subset M$. 由于 $\mathrm{V}\models\forall f\in\mathrm{V}_\kappa^\kappa\,\varphi\left(f,\lambda_f\right)$, 所以 $\mathrm{V}_\nu\models\forall f\in\mathrm{V}_\kappa^\kappa\,\varphi\left(f,\lambda_f\right)$, 从而 $M\models\forall f\in\mathrm{V}_\kappa^\kappa\,\varphi\left(f,\lambda_f\right)$.

令

$$A=\left\{\alpha<\kappa\ \mid\ \alpha=|\alpha|\ \wedge\ \forall g\in\mathrm{V}_\alpha^\alpha\,\varphi\left(g,\lambda_g\right)\right\}.$$

于是, $\kappa\in j(A)$. 因此, A 是 κ 的一个荟萃子集.

设 $\alpha_0=\min(A)$. 任取 $g:\alpha_0\to\mathrm{V}_{\alpha_0}$. 由于 $\varphi\left(g,\lambda_g\right)$ 成立, 令 x_{α_0} 为一个证据. 令 $f\restriction_{\alpha_0}=g$. 从此递归地定义 $f:\kappa\to\mathrm{V}_\kappa$: 如果 $\alpha\in A$, 令 $f(\alpha)=x_\alpha$ 为命题 $\varphi\left(f\restriction_\alpha,\lambda_{f\restriction_\alpha}\right)$ 成立的证据; 如果 $\alpha\notin A$, 令 $f(\alpha)=\varnothing$.

令 $x=j(f)(\kappa)$. 根据 f 的递归定义, $x\in M$ 在 M 中是命题 $\varphi\left(f,\lambda_f\right)$ 成立的证据. x 便是在 V 中命题 $\varphi\left(f,\lambda_f\right)$ 成立的证据.

令 $U=\left\{X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa\left(\lambda_f\right)\mid j\left[\lambda_f\right]\in j(X)\right\}$. 由于 $j(\kappa)>\nu>\lambda_f\geqslant\kappa$, U 是 $\mathfrak{P}_\kappa\left(\lambda_f\right)$ 上的一个正规测度. 下面的断言给出我们寻求中的矛盾.

断言 $j_U(f)(\kappa)=x=j(f)(\kappa)$, 其中 $j_U:\mathrm{V}\prec N\cong\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 为依 U 所确定的典型超幂嵌入映射.

令 $\pi : \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U) \cong N$ 为超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 的传递化映射. 对于每一个 $h : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda_f) \to \mathrm{V}$, 令

$$k(\pi([h])) = j(h)(j[\lambda_f]).$$

那么, $k : N \prec M$, 并且有交换图：$j = k \circ j_U$.

有趣的是：$\forall \alpha \leqslant \lambda_f\ (k(\alpha) = \alpha)$. 对于 $\alpha \leqslant \lambda_f$, $j_U[\lambda_f] \cap j_U(\alpha)$ 的序型为 α; 令

$$h : \mathfrak{P}_\kappa(\lambda_f) \ni x \mapsto \mathrm{ot}(x \cap \alpha) \in \lambda_f^+,$$

那么

$$\pi([h]) = j_U(h)(j_U[\lambda_f]) = \mathrm{ot}(j_U[\lambda_f] \cap j_U(\alpha)) = \alpha.$$

于是,

$$k(\alpha) = k(\pi([h])) = j(h)(j[\lambda_f]) = \mathrm{ot}(j[\lambda_f] \cap j(\alpha)) = \alpha.$$

因为 $\lambda_f \geqslant |\mathcal{TC}(x)|$, 所以 $k(x) = x$. 据此, 我们有

$$k(j_U(f)(\kappa)) = j(f)(\kappa) = x = k(x),$$

从而 $j_U(f)(\kappa) = x$. □

1.2.3 强基数

由一个可测基数 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子 U 所确定的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 的传递化 M 还有一个特点：$\mathrm{V}_{\kappa+1} \subset M$, 也就是说, 从 U 出发, 我们得到一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$, 并且 $\mathrm{V}_{\kappa+1} \subset M$. 我们同样也可以很自然地利用这一点来提升可测基数这一概念. 正是基于这样的考虑, 引进强基数的概念.

定义 1.18 设 $\kappa \leqslant \lambda$ 是两个序数. 称同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 是一个 (κ, λ)-**强嵌入映射**当且仅当

(i) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, 并且 $j(\kappa) > \lambda$;

(ii) $\mathrm{V}_\lambda \subset M$.

称 κ 为一个 λ-**强基数**当且仅当存在一个 (κ, λ)-强嵌入映射; 称 κ 是一个**强基数**当且仅当对于每一个 $\lambda \geqslant \kappa$ 而言, κ 都是一个 λ-强基数.

由定义一目了然：κ 是一个可测基数当且仅当 κ 是一个 $(\kappa, \kappa+1)$-强基数; 如果 κ 是一个超紧基数, 那么 κ 是一个强基数.

作为前面拉弗 (Lavor) 定理 (定理 1.30) 的一个简单推论, 我们得到下述命题：如果 κ 是一个超紧基数, 那么对于任意一个集合 x 都必有一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 以至于 $x \in M$. 我们自然也可以用这个命题的结论来引入一种高阶无穷的概念. 有趣的是, 这样得到的提升与强基数的概念是对等的.

命题 1.4　设 κ 是一个序数. 下述两个命题对等:

(i) κ 是一个强基数;

(ii) 对于任意一个集合 x 都必有一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j: \mathrm{V} \prec M$ 以至于 $x \in M$.

证明　(i) $\Rightarrow$ (ii). 任给集合 x, 令 $\lambda > \max\{\mathrm{RK}(x)+1, \kappa\}$. 令 $j: \mathrm{V} \prec M$ 为一个 (κ, λ)-强嵌入映射. 那么 $x \in \mathrm{V}_\lambda \subset M$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 任给 $\lambda \geqslant \kappa$, 令 $x = \mathrm{V}_\lambda$. 设 $j: \mathrm{V} \prec M$ 为一个以 κ 为临界点且满足要求 $x \in M$ 的同质嵌入映射. 那么 $\mathrm{V}_\lambda \subset M$. □

无论是强基数的定义 (定义 1.18) 本身, 还是命题 1.4 中的 (ii), 都不是可以在 ZFC 基础上以集合论纯语言表达出来的命题. 这自然对我们提出了一种挑战: 这种自然概念提升的结果是否可以在集合论的纯语言之中得到合适的表达?

为此, 我们需要引入用超滤子系统来表示同质嵌入映射的方法, 就如同用超滤子来逼近给定的同质嵌入映射那样. 很清楚, 对于一个足够强的同质嵌入映射, 单个超滤子或者太弱, 或者太强, 往往难以恰到好处. 所以, 需要应用一个超滤子系统来恰到好处地表示强同质嵌入映射. 我们将称这种可以恰到好处地表示一个给定的强同质嵌入映射的超滤子系统为一个**张子**[11].

导出张子

在正式引入张子概念之前, 先来看看我们应当怎样逼近一个给定的强同质嵌入映射. 自然, 这里的内容与前面 1.1.4 小节中有关迭代超幂的表示有着极大的关联.

设 $j: \mathrm{V} \prec M$ 为一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 (按照定义, M 是一个传递内模型).

设 $\kappa \leqslant \lambda \leqslant j(\kappa)$. 对于每一个 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, 如下定义 $[\kappa]^{|a|}$ 上的一个超滤子 E_a :

$$\forall X \subseteq [\kappa]^{|a|}\ (X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X)).$$

令 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$. 我们称 $\mathcal{E}$ 为 j 的**导出张子**; 称 κ 为导出长子 $\mathcal{E}$ 的**临界点**; 称 λ 为导出张子 $\mathcal{E}$ 的**长度**.

那么这个同质嵌入映射 j 的导出张子都有些什么样的值得关注的特性? 这里的 "值得关注的特性" 就是那些我们可以将它们独立出来恰到好处地表示这个给定的同质嵌入映射的性质.

(a) 每一个 E_a 都是一个 κ-完全的超滤子; (注意, 当 $a = \varnothing$ 时, $[\kappa]^0 = \{\varnothing\}$, 所以, $E_\varnothing = \{\{\varnothing\}\}$ 是一个平凡超滤子, 也是 κ-完全的, 还是正规超滤子; 由它所确定的 V 的超幂的传递化就是 V.) $E_{\{\kappa\}}$ 不是 κ^+-完全的; 对于每一个 $\alpha < \kappa$, 令

11 英文为 Extender.

$a=\{\alpha,\kappa\}$, 那么

$$\left\{x\in[\kappa]^{|a|}\;\middle|\;\alpha\in x\right\}\in E_a.$$

第一个结论是因为当 $f:\alpha\to E_a$, $\alpha<\kappa$ 时, $j(\alpha)=\alpha$, $j\left(\bigcap\limits_{\xi<\alpha}f(\xi)\right)=\bigcap\limits_{\xi<\alpha}j(f(\xi))$; 第二个结论是因为对于每一个 $\alpha<\kappa$,

$$A_\alpha=\{\{\beta\}\mid\alpha<\beta<\kappa\}\in E_{\{\kappa\}},$$

而 $\varnothing=\bigcap\limits_{\alpha<\kappa}A_\alpha$; 第三个结论是因为对于 $\alpha<\kappa$, 令

$$X_\alpha=\{\{\alpha,\beta\}\mid\alpha<\beta<\kappa\},$$

那么 $\{\alpha,\kappa\}\in j\left(X_\alpha\right)$, 从而 $X_\alpha\in E_{\{\alpha,\kappa\}}$.

(b) (协调性) 对于任意的 $a,b\in[\lambda]^{<\omega}$, 如果 $a\subset b$, 按照单调递增顺序排列 b 中的元素, 比如, $b=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}_<$, $a=\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}\}_<$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n$, 每一个 i_ℓ 恰好是 α_{i_ℓ} 在 b 的递增排列中所处的位置的指标, 那么, 定义从 $[\kappa]^{|b|}$ 到 $[\kappa]^{|a|}$ 的由 $(a\subset b)$ 所确定的投影函数 $\mathrm{TY}_a^b:[\kappa]^{|b|}\to[\kappa]^{|a|}$ 如下：对于 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}_<\in[\kappa]^{|b|}$, 令

$$\mathrm{TY}_a^b\left(\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}_<\right)=\{\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_m}\}_<.$$

也就是说, 投影函数 TY_a^b 是一个完全由等式 $\mathrm{TY}_a^b(b)=a$ 所确定的函数[12]. 那么, 对于 $X\subseteq[\kappa]^{|a|}$, 一定有

$$X\in E_a\leftrightarrow\left\{x\in[\kappa]^{|b|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_a^b(x)\in X\right\}\in E_b.$$

(这里的要求与迭代超幂的表示部分中的引理 1.42 的结论有值得比较的地方.)

设 $X\subseteq[\kappa]^{|a|}$. 根据定义,

$$X\in E_a\leftrightarrow a\in j(X),$$

以及

$$\left\{x\in[\kappa]^{|b|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_a^b(x)\in X\right\}\in E_b\leftrightarrow b\in\left\{x\in[j(\kappa)]^{|b|}\;\middle|\;j\left(\mathrm{TY}_a^b\right)(x)\in j(X)\right\};$$

又根据定义, $\mathrm{TY}_a^b=j\left(\mathrm{TY}_a^b\right)\restriction_{[\kappa]^{|b|}}$, 所以 $j\left(\mathrm{TY}_a^b\right)(b)=a$, 从而

$$X\in E_a\leftrightarrow\left\{x\in[\kappa]^{|b|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_a^b(x)\in X\right\}\in E_b.$$

12 TY 是 “投影” 这个词的拼音字头的连写.

(c) (正规性) 对于任意非空的 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, 以及任意的 $f : [\kappa]^{|a|} \to \kappa$, 如果

$$\left\{x \in [\kappa]^{|a|} \;\middle|\; f(x) \in \max(x)\right\} \in E_a,$$

那么

$$\exists b \in [\lambda]^{<\omega} \;\left(a \subset b \wedge \left\{y \in [\kappa]^{|b|} \;\middle|\; \left(f \circ \mathrm{TY}_a^b\right)(y) \in y\right\} \in E_b\right).$$

设 $a \in [\lambda]^{<\omega}$ 非空并且设 $f : [\kappa]^{|a|} \to \kappa$ 满足

$$A_0 = \left\{x \in [\kappa]^{|a|} \;\middle|\; f(x) \in \max(x)\right\} \in E_a.$$

令 $A_1 = \{x \in A_0 \mid f(x) \in x\}$. 如果 $A_1 \in E_a$, 令 $b = a$ 即为所求. 不妨设 $A_1 \notin E_a$. 令 $A = A_0 - A_1$. 那么 $A \in E_a$. 所以 $j(f)(a) \notin a$. 令 $b = a \cup \{j(f)(a)\}$. 由于 $\max(a) < \lambda$, $j(f)(a) \in \lambda$, 从而

$$b \in [\lambda]^{|a|+1} = [\lambda]^{|b|}.$$

因为 $j\left(f \circ \mathrm{TY}_a^b\right)(b) = j(f)\left(j\left(\mathrm{TY}_a^b\right)(b)\right) = j(f)\left(\mathrm{TY}_a^b(b)\right) = j(f)(a) \in b$, 所以

$$\left\{y \in [\kappa]^{|b|} \;\middle|\; \left(f \circ \mathrm{TY}_a^b\right)(y) \in y\right\} \in E_b.$$

(d) (ω-完全性) 对于任意序列 $a_n \in [\lambda]^{<\omega}, X_n \in E_{a_n}, n < \omega$, 都一定存在一个从 $\bigcup_{n<\omega} a_n$ 到 κ 的保序映射 g 来见证下述事实:

$$\forall n < \omega \;\left(g\left[a_n\right] \in X_n\right).$$

给定任意序列 $a_n \in [\lambda]^{<\omega}, X_n \in E_{a_n}, n < \omega$. 令 $A = \bigcup_{n<\omega} a_n \subset \lambda$.

我们现在的目标是寻找一个从 A 到 κ 的保序映射 g 来保证下述命题成立:

$$\forall n < \omega \;\left(g\left[a_n\right] \in X_n\right).$$

令 $\alpha = \mathrm{ot}(A)$. $\alpha < \omega_1$. 令 $s : \omega \to \alpha$ 为一个双射; 令 $\rho : A \cong \alpha$ 为 A 的传递化映射, 并且对于 $n < \omega$, 令 $e_n = \rho\left[a_n\right]$.

以如下方式来定义一棵树 T : $t \in T$ 当且仅当 $\exists n < \omega(\mathrm{dom}(t) = s[n] \wedge \mathrm{rng}(t) \subset \kappa \;\wedge\; t$ 是一个序同构), 并且 $\forall m < \omega$, 如果 $e_m \subset \mathrm{dom}(t)$, 那么 $t\left[e_m\right] \in X_m$; 对于 $t_1, t_2 \in T$, 定义 $t_1 \leqslant t_2 \leftrightarrow t_2 \subset t_1$.

断言　树 $(T, \leqslant)$ 是一棵无秩之树, 即它有一根无限单调下降的树枝.

为此, 我们来证明: $M \models j(T, \leqslant)$ 有一根无限单调下降的树枝.

由于 M 是传递的, 如果 $M \models j(T, \leqslant)$ 是一棵有秩之树, 那么这棵树在 M 中的秩函数也一定还是它在 V 中的秩函数. 因此, 我们只需证明树 $j(T, \leqslant)$ 在 V 中有一根无限单调下降的树枝.

注意, $j(\langle e_m \mid m<\omega\rangle)=\langle e_m \mid m<\omega\rangle$, $j(\alpha)=\alpha$, $j(s)=s$.

根据定义以及 j 的同质嵌入特性, $\forall n<\omega\ \left(\rho^{-1}\restriction_{s[n]}\in j(T)\right)$. 这是因为 $\rho^{-1}: \alpha\to j(\kappa)$ 是一个保序映射, 并且

$$\forall n<\omega\,\forall m<\omega\ \left(e_m\subset s[n]\to\rho^{-1}\left[e_m\right]=a_n\cup a_{n+1}\in j\left(X_n\right)\right).$$

由此可见, $j(T,\leqslant)$ 有一根无限单调下降的树枝.

这样, 依据 j 的同质嵌入特性, 树 $(T,\leqslant)$ 在 V 中就有一根无限单调下降的树枝. 令 $h:\alpha\to\kappa$ 为一个保序映射, 并且

$$\forall n<\omega\ \left(h\restriction_{s[n]}\in T\right).$$

令 $g=\rho\circ h$. 那么 $g:A\to\kappa$ 是一个保序映射, 并且

$$\forall n<\omega\ \left(g\left[a_n\cup a_{n+1}\right]\in X_n\right).$$

(e) 对于每一个 $a\in[\lambda]^{<\omega}$, 令 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_a)$ 为经 E_a 所确定的 V 的超幂 (由所有的定义在 $[\kappa]^{|a|}$ 上的函数经超滤子 E_a 所给出); 对于定义在 $[\kappa]^{|a|}$ 上的函数 f, 令

$$k_a([f])=j(f)(a).$$

那么 $k_a:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_a)\to M$ 是一个同质嵌入映射. 令 $\pi_a:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_a)\cong N_a$ 为传递化映射, 令

$$i_a:\mathrm{V}\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_a)$$

为自然嵌入映射, $j_a=\pi_a\circ i_a:\mathrm{V}\prec N_a$. 于是, 我们有交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{V} & \xrightarrow{j} & M\\ & \searrow j_a & \uparrow k_a\circ\pi_a^{-1}\\ & & N_a.\end{array}$$

即 $j=k_a\circ\pi_a^{-1}\circ j_a$.

对于 $a\subset b\in[\lambda]^{<\omega}$, 依照下述等式定义 $i_{a,b}:N_a\to N_b$:

$$i_{a,b}\left(\pi_a\left([f]_{E_a}\right)\right)=\pi_b\left(\left[f\circ\mathrm{TY}_a^b\right]_{E_b}\right),$$

其中 $\mathrm{dom}(f)=[\kappa]^{|a|}$. 也就是说, 我们有下述交换图:

$$\begin{array}{ccc}N_a & \xrightarrow{i_{a,b}} & N_b\\ \nearrow\pi_a & & \uparrow\pi_b\\ \mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_a) & \xrightarrow{k_{a,b}} & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V},E_b).\end{array}$$

其中, $k_{a,b}\left([f]_{E_a}\right)=\left[f\circ \mathrm{TY}_a^b\right]_{E_b}$. 那么, $k_{a,b}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},E_a\right)\to \mathrm{ult}\left(\mathrm{V},E_b\right)$ 是一个同质嵌入映射, 从而, $i_{a,b}:N_a\prec N_b$, 并且我们还有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{j_b} & N_b \\ & \searrow j_a & \uparrow i_{a,b} \\ & & N_a. \end{array}$$

这样, 我们得到一个定向系统

$$\left\{N_a\cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{V},E_a\right), i_{a,b}\;\middle|\; a\subset b\in[\lambda]^{<\omega}\right\},$$

并且这个定向系统有一个有秩极限:

$$\left\{\pi_{\mathcal{E}}^{-1}:M_{\mathcal{E}}\cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathcal{E}\right), j_{\mathcal{E}}, j_{a,\mathcal{E}}, k_{\mathcal{E}}\;\middle|\; a\in[\lambda]^{<\omega}\right\},$$

其中, $k_{\mathcal{E}}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathcal{E}\right)\to M$ 是 $\{k_a\mid a\in[\lambda]^{<\omega}\}$ 的定向极限; $\pi_{\mathcal{E}}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathcal{E}\right)\cong M_{\mathcal{E}}$ 是传递化映射; $j_{\mathcal{E}}=\pi_{\mathcal{E}}\circ i_{\mathcal{E}}:\mathrm{V}\to M_{\mathcal{E}}$; 并且下述交换图成立:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{j_{\mathcal{E}}} & M_{\mathcal{E}} \\ & \searrow j_a & \uparrow j_{a,\mathcal{E}} \\ & & N_a, \end{array}$$

其中 $a\in[\lambda]^{<\omega}$, 以及

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{j_{\mathcal{E}}} & M_{\mathcal{E}} \\ & \searrow j & \uparrow k_{\mathcal{E}}\circ\pi_{\mathcal{E}}^{-1} \\ & & M. \end{array}$$

张子确定同质嵌入映射

事实上, 定向极限 $\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},\mathcal{E}\right)$ 以及 $k_{\mathcal{E}}$, $i_{a,\mathcal{E}}$, $j_{\mathcal{E}}$ 可以明确定义出来:

考虑下述类:

$$\mathscr{C}=\left\{(a,f)\mid a\in[\lambda]^{<\omega}\wedge f\,\text{是一个函数, 并且}\,\mathrm{dom}(f)=[\lambda]^{|a|}\right\}.$$

对于 $(a,f),(b,g)\in\mathscr{C}$, 令

$$(a,f)\equiv(b,g)\leftrightarrow\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)=\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\}\in E_{(a\cup b)}.$$

依旧定义 $[(a,f)]_{\mathcal{E}}$ 为所有那些与 (a,f) 具备 $\equiv$ 关系的最小秩的序对的集合; 然后再定义

$$[(a,f)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(b,g)]_{\mathcal{E}}\leftrightarrow\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)\in\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\}\in E_{(a\cup b)}.$$

断言 对于 $(a,f),(b,g)\in\mathscr{C}$, $([(a,f)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(b,g)]_{\mathcal{E}}\leftrightarrow j(f)(a)\in j(g)(b))$.

根据 ϵ 和 $E_{(a\cup b)}$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
&[(a,f)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(b,g)]_{\mathcal{E}}\\
\leftrightarrow&\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)\in\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\}\in E_{(a\cup b)}\\
\leftrightarrow&(a\cup b)\in\left\{x\in[j(\kappa)]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(j\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)\right)(x)\in\left(j\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)\right)(x)\right\}\\
\leftrightarrow&j(f)\left(j\left(\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(a\cup b)\right)\in j(g)\left(j\left(\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(a\cup b)\right)\\
\leftrightarrow&j(f)(a)\in j(g)(b).
\end{aligned}$$

根据这个断言, 定向极限结构 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathcal{E})=(\mathscr{C}/\equiv,\epsilon)$ 是一个有秩结构, 因为在上述基础上, 下述等式定义一个从 $(\mathscr{C}/\equiv,\epsilon)$ 到 $(M,\in)$ 的嵌入映射 $k_{\mathcal{E}}$: 对于 $(a,f)\in\mathscr{C}$, 令

$$k_{\mathcal{E}}\left([(a,f)]_{\mathcal{E}}\right)=j(f)(a).$$

令 $\pi_{\mathcal{E}}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},\mathcal{E})\cong M_{\mathcal{E}}$ 为传递化映射.

事实 1.2.1 (1) $\equiv$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个等价关系;

(2) $(a,f)\equiv(b,g)\leftrightarrow[(a,f)]_{\mathcal{E}}=[(b,g)]_{\mathcal{E}}$;

(3) $[(a,f)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(b,g)]_{\mathcal{E}}$ 的定义与代表元的选取无关;

(4) $k_{\mathcal{E}}$ 的定义与代表元的选取无关, 并且 $k_{\mathcal{E}}$ 是一个同质嵌入映射.

我们将上述这些定义的基本性质以及定义的合理性的验证留作练习 (见练习 1.29).

上面的断言提供了定向极限可以嵌入到一个传递内模型之中, 因而它是一个自同一的有秩结构, 进而有传递化. 现在我们来审视一下 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})=(\mathscr{C}/\equiv,\epsilon)$ 是一个有秩结构的源自定向极限定义本身的理由. 这对于我们放弃对于同质映射 j 的依赖非常重要. 因为我们正试图寻找强基数这一概念在 ZFC 理论体系下在集合论纯语言中的一种恰到好处的表示.

为达此目的, 利用 $\mathcal{E}$ 的 ω-完全性, 我们来证明定向极限 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})$ 是一个有秩结构.

假设我们的定向极限 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})$ 不是有秩的. 设 $\langle[(a_n,f_n)]_{\mathcal{E}}\mid n<\omega\rangle$ 为一个满足下述关系式的序列:

$$\forall n<\omega\;\left([(a_{n+1},f_{n+1})]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(a_n,f_n)]_{\mathcal{E}}\right).$$

对于 $n<\omega$, 令

$$X_n=\left\{x\in[\kappa]^{|a_n\cup a_{n+1}|}\;\middle|\;\left(f_{n+1}\circ\mathrm{TY}_{a_{n+1}}^{(a_n\cup a_{n+1})}\right)(x)\in\left(f_n\circ\mathrm{TY}_{a_n}^{(a_n\cup a_{n+1})}\right)(x)\right\},$$

于是, $(a_n \cup a_{n+1}) \in X_n \in E_{(a_n \cup a_{n+1})}$.

令 $A = \bigcup_{n<\omega} a_n \subset \lambda$.

应用 $\mathcal{E}$ 的 ω-完全性, 我们现在有一个从 A 到 κ 的保序映射 g 来保证下述命题成立:

$$\forall n < \omega \ \ (g\,[a_n \cup a_{n+1}] \in X_n)\,.$$

可是这样一来我们就遇到了难以逾越的困难 (一个矛盾): 对于所有的 $n < \omega$,

$$\left(\left(f_{n+1} \circ \mathrm{TY}_{a_{n+1}}^{(a_n \cup a_{n+1})}\right)(g\,[a_n \cup a_{n+1}]) \in \left(f_n \circ \mathrm{TY}_{a_n}^{(a_n \cup a_{n+1})}\right)(g\,[a_n \cup a_{n+1}])\right).$$

(f) 对于 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $f : [\kappa]^{|a|} \to \mathrm{V}$, 定义

$$k_{a,\mathcal{E}}\left([f]_{E_a}\right) = [(a, f)]_{\mathcal{E}}$$

和

$$j_{a,\mathcal{E}}\left(\pi_a\left([f]_{E_a}\right)\right) = \pi_{\mathcal{E}}\left([(a, f)]_{\mathcal{E}}\right).$$

然后定义 $j_{\mathcal{E}}$ 如下: 对于 $x \in \mathrm{V}$, 令 $c_x(\{\varnothing\}) = x$, 以及

$$j_{\mathcal{E}}(x) = \pi_{\mathcal{E}}\left([(\{\varnothing\}, c_x)]_{\mathcal{E}}\right).$$

由此, $j = \ell_{\mathcal{E}} \circ j_{\mathcal{E}}$; $\ell_{\mathcal{E}} = k_{\mathcal{E}} \circ \pi_{\mathcal{E}}^{-1}$;

$$\forall a \in [\lambda]^{<\omega} \ \ ((j_{\mathcal{E}} = j_{a,\mathcal{E}} \circ j_a) \ \wedge \ (k_a = k_{\mathcal{E}} \circ k_{a,\mathcal{E}}))\,;$$

并且如果 $y \in M_{\mathcal{E}}$, 那么必然存在 $a \in [\lambda]^{<\omega}$ 以及 $[f] \in \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, E_a)$ 来实现等式 $y = (\pi_{\mathcal{E}} \circ k_{a,\mathcal{E}})\,([f]_{E_a})$.

综合起来, 我们有下述交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M = & & = M \\
 & j \nearrow & \uparrow k_{\mathcal{E}} & & \nwarrow \ell_{\mathcal{E}} \\
\mathrm{V} & \xrightarrow{i_{\mathcal{E}}} & \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}}} & M_{\mathcal{E}} \\
 & i_a \searrow & \uparrow k_{a,\mathcal{E}} & & \uparrow j_{a,\mathcal{E}} \\
 & & \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, E_a) & \xrightarrow{\pi_a} & N_a.
\end{array}$$

其中, $i_{\mathcal{E}}(x) = [(\{\varnothing\}, c_x)]_{\mathcal{E}}$; $i_a(x) = [c_x]_{E_a}$.

引理 1.54　(a) $\forall \alpha < \lambda \ \left(\left(k_{\mathcal{E}} \circ \pi_{\mathcal{E}}^{-1}\right)(\alpha) = \alpha\right)$;

(b) $\mathrm{Crit}\,(j_{\mathcal{E}}) = \kappa$, 并且 $j_{\mathcal{E}}(\kappa) \geqslant \lambda$;

(c) $M_{\mathcal{E}} = \left\{ j_{\mathcal{E}}(f)(a) \;\middle|\; a \in [\lambda]^{<\omega} \wedge f : [\kappa]^{|a|} \to \mathrm{V} \right\}$;

(d) $\forall a \in [\lambda]^{<\omega}\ \forall X \subseteq [\kappa]^{|a|}\ \ (a \in j_{\mathcal{E}}(X) \leftrightarrow a \in j(X))$, 从而由 j 导出的张子 $\mathcal{E}$ 事实上可以由这个张子所确定的同质嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}$ 所导出.

证明 (a) 对于$\alpha<\kappa$, 令 $f(\{\alpha\})=\alpha$, 则 $f:[\kappa]^1\to\kappa$ 满足 $\forall x\in\mathrm{dom}(f)(f(x)\in x)$, 所以 $\forall a\in[\lambda]^1\,(j(f)(a)\in a)$. 由于

$$k_{\mathcal{E}}\,[\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})]=\left\{j(f)(a)\ \middle|\ a\in[\lambda]^{<\omega}\wedge f:[\kappa]^{|a|}\to\mathrm{V}\right\},$$

所以, $\lambda\subset k_{\mathcal{E}}\,[\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})]$. 因此, $\forall\alpha<\lambda\ (\ell_{\mathcal{E}}(\alpha)=\alpha)$.

(b) 因为 $j=\ell_{\mathcal{E}}\circ j_{\mathcal{E}}$, 由 (a) 即得所要的结论.

(c) 因为对于 $a\in[\lambda]^{<\omega}$, $\ell_{\mathcal{E}}(a)=a$, 对于 $x\in M_{\mathcal{E}}$,

$$\exists a\in[\lambda]^{<\omega}\,\exists f:[\kappa]^{|a|}\to\mathrm{V}\ \left(\ell_{\mathcal{E}}(x)=j(f)(a)=\ell_{\mathcal{E}}(j_{\mathcal{E}}(f))\,(\ell_{\mathcal{E}}(a))=\ell_{\mathcal{E}}\,(j_{\mathcal{E}}(f)(a))\right),$$

所以

$$\exists a\in[\lambda]^{<\omega}\,\exists f:[\kappa]^{|a|}\to\mathrm{V}\ \left(x=j_{\mathcal{E}}(f)(a)\right).$$

(d) 依据与 (c) 相同的理由. □

张子

经过上面的分析, 我们可以正式引进张子的概念.

定义 1.19 (张子) 设 $\kappa\leqslant\lambda$ 为两个不可数基数. 一个定义在 $[\lambda]^{<\omega}$ 上的函数

$$\mathcal{E}=\left\{E_a\ \middle|\ a\in[\lambda]^{<\omega}\right\}$$

是一个 (κ,λ)-**张子**当且仅当它具备下述性质:

(1) 每一个 E_a 都是一个 κ-完全的超滤子; $E_{\{\kappa\}}$ 不是 κ^+-完全的; 对于每一个 $\alpha<\kappa$, 令 $a=\{\alpha,\kappa\}$, 那么

$$\left\{x\in[\kappa]^{|a|}\ \middle|\ \alpha\in x\right\}\in E_a.$$

(2) (协调性) 对于任意的 $a,b\in[\lambda]^{<\omega}$, 如果 $a\subset b$, 按照单调递增顺序排列 b 中的元素, 比如, $b=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}_<$, $a=\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}\}_<$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n$, 每一个 i_ℓ 恰好是 α_{i_ℓ} 在 b 的递增排列中所处的位置的指标, 那么, 定义从 $[\kappa]^{|b|}$ 到 $[\kappa]^{|a|}$ 的由 $(a\subset b)$ 所确定的投影函数 $\mathrm{TY}_a^b:[\kappa]^{|b|}\to[\kappa]^{|a|}$ 如下: 对于 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}_<\in[\kappa]^{|b|}$, 令

$$\mathrm{TY}_a^b\left(\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}_<\right)=\{\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_m}\}_<.$$

也就是说, 投影函数 TY_a^b 是一个完全由等式 $\mathrm{TY}_a^b(b)=a$ 所确定的函数. 那么, 对于 $X\subseteq[\kappa]^{|a|}$, 一定有

$$X\in E_a\leftrightarrow\left\{x\in[\kappa]^{|b|}\ \middle|\ \mathrm{TY}_a^b(x)\in X\right\}\in E_b.$$

(3) (正规性) 对于任意非空的 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, 对于任意的 $f : [\kappa]^{|a|} \to \kappa$, 如果

$$\left\{x \in [\kappa]^{|a|} \;\middle|\; f(x) \in \max(x)\right\} \in E_a,$$

那么

$$\exists b \in [\lambda]^{<\omega} \ \left(a \subset b \wedge \left\{y \in [\kappa]^{|b|} \;\middle|\; \left(f \circ \mathrm{TY}_a^b\right)(y) \in y\right\} \in E_b\right).$$

(4) (ω-完备性) 对于任意序列 $a_n \in [\lambda]^{<\omega}, X_n \in E_{a_n}, n < \omega$, 都一定存在一个从 $\bigcup\limits_{n<\omega} a_n$ 到 κ 的保序映射 g 来见证下述事实:

$$\forall n < \omega \ (g[a_n] \in X_n).$$

定义 1.20 (张子超幂) 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$ 是一个 (κ, λ)-张子. 令

$$\mathscr{C} = \left\{(a, f) \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \wedge f \text{ 是一个函数, 并且} \operatorname{dom}(f) = [\lambda]^{|a|}\right\}.$$

对于 $(a, f), (b, g) \in \mathscr{C}$, 令

$$(a, f) \equiv (b, g) \leftrightarrow \left\{x \in [\kappa]^{|a\cup b|} \;\middle|\; \left(f \circ \mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x) = \left(g \circ \mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\} \in E_{(a\cup b)}.$$

依旧定义 $[(a, f)]_{\mathcal{E}}$ 为所有那些与 (a, f) 具备 $\equiv$ 关系的最小秩的序对的集合; 然后再定义

$$[(a, f)]_{\mathcal{E}} \,\epsilon\, [(b, g)]_{\mathcal{E}} \leftrightarrow \left\{x \in [\kappa]^{|a\cup b|} \;\middle|\; \left(f \circ \mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x) \in \left(g \circ \mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\} \in E_{(a\cup b)}.$$

称 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) = (\mathscr{C}/\equiv, \epsilon)$ 为**由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的 V 的超幂**.

如果 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E})$ 是有秩的, 那么令 $\pi_{\mathcal{E}} : \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) \cong M_{\mathcal{E}}$ 为它的传递化映射; $i_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \to \mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E})$ 为由下式所定义的自然嵌入映射: 对于 $x \in \mathrm{V}$, $t \in [\kappa]^{<\omega}$, 令 $c_x(t) = x$, 以及

$$i_{\mathcal{E}}(x) = [(\varnothing, c_x)]_{\mathcal{E}};$$

再令 $j_{\mathcal{E}}(x) = \pi_{\mathcal{E}}(i_{\mathcal{E}}(x))$, 并且称 $j_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \to M_{\mathcal{E}}$ 为**由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的嵌入映射**. 此时定义张子 E 的**强度**为满足不等式 $\mathrm{V}_\eta \subset \mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ 的最大序数 η, 并且以记号 $\mathrm{QiangDu}(E)$ 来记张子 E 的强度.

有关上述定义的合理性由下述引理给出.

引理 1.55 (1) $\equiv$ 满足等价关系的三项基本要求;

(2) $[(a, f)]_{\mathcal{E}} = [(b, g)]_{\mathcal{E}}$ 当且仅当 $(a, f) \equiv (b, g)$;

(3) 如果 $(a_1, f_1) \equiv (b_1, g_1)$ 以及 $(a_2, f_2) \equiv (b_2, g_2)$, 那么

$$[(a_1, f_1)]_{\mathcal{E}} \,\epsilon\, [(a_2, f_2)]_{\mathcal{E}} \leftrightarrow [(b_1, g_1)]_{\mathcal{E}} \,\epsilon\, [(b_2, g_2)]_{\mathcal{E}}.$$

证明 (1) (a) $(a,f)\equiv(a,f)$. 这是因为 $a\cup a=a$, $\mathrm{TY}_a^{a\cup a}(x)=x$, 所以

$$\left\{x\in[\kappa]^{|a|}\;\middle|\;f\left(\mathrm{TY}_a^a(x)\right)=f(x)\right\}=[\kappa]^{|a|}\in E_a.$$

(b) 如果 $(a,f)\equiv(b,g)$, 那么 $(b,g)\equiv(a,f)$. 这是因为

$$\begin{aligned}&\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)=\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\}\\=&\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)=\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)\right\}.\end{aligned}$$

(c) 如果 $(a,f)\equiv(b,g)$ 并且 $(b,g)\equiv(c,h)$, 那么 $(a,f)\equiv(c,h)$. 令

$$X_1=\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(x)=\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(x)\right\},$$

以及

$$X_2=\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b\cup c|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_{a\cup b}^{a\cup b\cup c}(x)\in X_1\right\};$$

再令

$$Y_1=\left\{x\in[\kappa]^{|b\cup c|}\;\middle|\;\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{b\cup c}\right)(x)=\left(h\circ\mathrm{TY}_c^{b\cup c}\right)(x)\right\},$$

以及

$$Y_2=\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b\cup c|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_{b\cup c}^{a\cup b\cup c}(x)\in Y_1\right\}.$$

那么 $X_2\in E_{a\cup b\cup c}$, 以及 $Y_2\in E_{a\cup b\cup c}$. 所以 $X_2\cap Y_2\in E_{a\cup b\cup c}$. 又令

$$Z_1=\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup c|}\;\middle|\;\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup c}\right)(x)=\left(h\circ\mathrm{TY}_c^{a\cup c}\right)(x)\right\},$$

以及

$$Z_2=\left\{x\in[\kappa]^{|a\cup b\cup c|}\;\middle|\;\mathrm{TY}_{a\cup c}^{a\cup b\cup c}(x)\in Z_1\right\}.$$

对于 $x\in X_2\cap Y_2$, 我们有

$$f\uparrow_a^{a\cup b\cup c}(x)=g\uparrow_b^{a\cup b\cup c}(x)=h\uparrow_c^{a\cup b\cup c}(x).$$

所以, $x\in Z_2$. 因此 $X_2\cap Y_2\subseteq Z_2$, 于是 $Z_2\in E_{a\cup b\cup c}$, 从而 $Z_1\in E_{a\cup c}$. 这就表明 $(a,f)\equiv(c,h)$.

(2) 根据 (1) 中所证明的 $\equiv$ 的传递性即得.

(3) 设 $(a_1,f_1)\equiv(b_1,g_1)$, $(a_2,f_2)\equiv(b_2,g_2)$, 以及 $[(a_1,f_1)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(a_2,f_2)]_{\mathcal{E}}$. 我们来证明:

$$[(b_1,g_1)]_{\mathcal{E}}\,\epsilon\,[(b_2,g_2)]_{\mathcal{E}}\,.$$

根据对称性, 这就足够了.

令 $a=a_1\cup b_1$, $b=a_2\cup b_2$, $c=a_1\cup a_2$, $d=b_1\cup b_2$, $e=a_1\cup a_2\cup b_1\cup b_2$,

$$X_1=\left\{x\in[\kappa]^{|a|}\;\middle|\; f_1\circ \mathrm{TY}^a_{a_1}(x)=g_1\circ \mathrm{TY}^a_{b_1}(x)\right\},$$

$$Y_1=\left\{x\in[\kappa]^{|b|}\;\middle|\; f_2\circ \mathrm{TY}^b_{a_2}(x)=g_2\circ \mathrm{TY}^b_{b_2}(x)\right\},$$

$$Z_1=\left\{x\in[\kappa]^{|c|}\;\middle|\; f_1\circ \mathrm{TY}^c_{a_1}(x)\in f_2\circ \mathrm{TY}^c_{a_2}(x)\right\},$$

以及

$$W_1=\left\{x\in[\kappa]^{|d|}\;\middle|\; g_1\circ \mathrm{TY}^d_{b_1}(x)\in g_2\circ \mathrm{TY}^d_{b_2}(x)\right\}.$$

再令

$$X_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; f_1\circ \mathrm{TY}^e_{a_1}(x)=g_1\circ \mathrm{TY}^e_{b_1}(x)\right\},$$

$$Y_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; f_2\circ \mathrm{TY}^e_{a_2}(x)=g_2\circ \mathrm{TY}^e_{b_2}(x)\right\},$$

$$Z_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; f_1\circ \mathrm{TY}^e_{a_1}(x)\in f_2\circ \mathrm{TY}^e_{a_2}(x)\right\},$$

以及

$$W_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; g_1\circ \mathrm{TY}^e_{b_1}(x)\in g_2\circ \mathrm{TY}^e_{b_2}(x)\right\}.$$

因为

$$X_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; \mathrm{TY}^e_a(x)\in X_1\right\},$$

$$Y_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; \mathrm{TY}^e_b(x)\in Y_1\right\},$$

$$Z_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; \mathrm{TY}^e_c(x)\in Z_1\right\},$$

$$W_2=\left\{x\in[\kappa]^{|e|}\;\middle|\; \mathrm{TY}^e_d(x)\in W_1\right\},$$

以及 $X_1\in E_a, Y_1\in E_b, Z_1\in E_c$, 所以 $X_2\in E_e, Y_2\in E_e, Z_2\in E_e$, 从而 $X_2\cap Y_2\cap Z_2\in E_e$. 又因为 $X_2\cap Y_2\cap Z_2\subseteq W_2$, 所以, $W_2\in E_e$. 因此, $W_1\in E_d$. 于是,

$$[(b_1,g_1)]_{\mathcal{E}}\in[(b_2,g_2)]_{\mathcal{E}}.$$

□

我们知道 ω-完全性是为了保证张子所确定的超幂是有秩结构而设计的. 那么正规性又有什么特别用处呢? 正规性是为了保证张子的支撑集合 λ 的每一个元素在超幂中都有非常典型的表示, 从而 λ 就是相应于那些表示的传递化. 下面的引理表明了这一点. 因为后面还会引进更一般的张子的概念, 并且将证明下述引理的更一般的情形 (引理 1.59), 所以我们就将这个引理的证明留作练习.

引理 1.56 设 $\kappa \leqslant \lambda$ 是不可数基数. 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$ 为一个正规的 ω-完全的 (κ, λ)-张子. 令 $f : \kappa^1 \to \kappa$ 为由下述等式确定的函数:

$$\forall \alpha \in \kappa \, (f(\langle \alpha \rangle) = \alpha).$$

那么 $(\lambda, \in)$ 是

$$(\{[(\langle \gamma \rangle, f)]_{\mathcal{E}} \mid \gamma \in \lambda\}, \epsilon)$$

的传递化; 并且对于每一个 $\gamma \in \lambda$, 都有 $[(\langle \gamma \rangle, f)]_{\mathcal{E}} \in [(\varnothing, c_\kappa)]$, 其中 c_κ 是取常值 κ 的函数.

证明 (练习. 这是应用张子的正规性条件的地方.) □

将前面的分析综合起来, 我们知道由一个张子所确定的超幂事实上是同质嵌入映射的一个定向系统的定向极限, 它是一个有秩结构. 下面的定理是对上面分析和讨论的总结.

定理 1.31 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$ 为一个 (κ, λ)-张子. 那么

(1) 由 (κ, λ)-张子 $\mathcal{E}$ 所确定的 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) = (\mathscr{C}/\equiv, \epsilon)$ 是一个自同一的有秩结构;

(2) 设 $j_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \to M_{\mathcal{E}}$ 为由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的嵌入映射, 那么 $j_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \prec M_{\mathcal{E}}$, 并且

(a) $\kappa = \mathrm{Crit}\,(j_{\mathcal{E}})$, $j_{\mathcal{E}}(\kappa) > \lambda$;

(b) 对于 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $X \subseteq [\kappa]^{|a|}$, $X \in E_a \iff a \in j_{\mathcal{E}}(X)$;

(c) $M_{\mathcal{E}} = \left\{ j_{\mathcal{E}}(f)(a) \mid a \in [\lambda]^{<\omega} \wedge f : [\kappa]^{|a|} \to \mathrm{V} \right\}$;

(d) 如果 $|\mathrm{V}_\alpha| < |\lambda|$, 那么 $\mathrm{V}_\alpha \subset M_{\mathcal{E}}$.

证明 (1) 张子超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E})$ 的有秩性根据张子 $\mathcal{E}$ 的 ω-完全性所得. 这在前面的分析中已经见到. 这里就不再重复.

(2) 除了 (d) 之外的张子嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}$ 的基本性质已经在前面的分析和讨论中给出. 这里也就不再重复. 我们将 (d) 的证明留作练习. □

依据上述定理 1.31, 我们立即得到强基数的特征定理, 因而强基数这一概念可以在 ZFC 理论基础上用集合论纯语言的表达式给出.

定理 1.32 一个基数 κ 是一个强基数当且仅当对于每一个 $\lambda \geqslant \kappa$ 都存在一个 $\left(\kappa, |\mathrm{V}_\lambda|^+\right)$-张子.

超强基数

在我们引入 (κ, λ)-强嵌入映射时我们把握着一个重要的分寸: 这就是要求 $\lambda \geqslant \mathrm{Crit}(j) = \kappa$ 是一个严格小于 $j(\kappa)$ 的序数. 这样, 我们由给定的同质映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 诱导出一个 (κ, λ)-张子

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\kappa, \lambda) = \left\{ E_a \;\middle|\; a \in [\lambda]^{<\omega} \right\},$$

然后利用这个张子, 可以构造 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})$. 因为 $\mathcal{E}$ 是一个 ω-完全的张子, 由它确定的超幂是有秩的, 所以得到一个由张子确定的超幂同质嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}:\mathrm{V}\prec M_{\mathcal{E}}$. 这个超幂实现了 $\kappa=\mathrm{Crit}\,(j_{\mathcal{E}})\leqslant\lambda<j_{\mathcal{E}}(\kappa)$ 以及 $\mathrm{V}_\lambda\subset M_{\mathcal{E}}$. 我们避开了 $\lambda=j(\kappa)$ 的情形. 这样做并不是因为库能定理 (定理 1.11) 的警示作用, 因为库能定理的证明所排除的是

$$j:\mathrm{V}\prec M\ \wedge\ \kappa=\mathrm{Crit}(j)\ \wedge\ \lambda=\bigcup\{j^n(\kappa)\mid n<\omega\}\ \wedge\ \mathrm{V}_{\lambda+3}\subset M.$$

对于存在以 κ 为临界点的满足不等式 $\mathrm{V}_{j(\kappa)}\subset M$ 要求的同质嵌入映射 $j:\mathrm{V}\prec M$, 库能定理 (定理 1.11) 并没有排除. 选择回避 $\lambda=j(\kappa)$ 完全是因为技术原因：当试图用张子 $\mathcal{E}(\kappa,j(\kappa))$ 来表示这样的同质映射时, 我们感到力不从心. 那么是否有类似的 "张子" 可以被用来表示这样的 "超强嵌入映射"? 这就需要我们在 "张子" 这一概念上再下点功夫. 为了说话方便, 我们引进超强基数的概念.

定义 1.21　称一个基数 κ 是一个**超强基数**当且仅当存在一个以 κ 为临界点的满足不等式 $\mathrm{V}_{j(\kappa)}\subset M$ 的同质嵌入映射 $j:\mathrm{V}\prec M$; 一个同质嵌入映射 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个**超强嵌入映射**当且仅当它非平凡并且如果 $\kappa=\mathrm{Crit}(j)$, 那么 $\mathrm{V}_{j(\kappa)}\subset M$.

超强基数诱导张子

现在来分析一下怎样利用一个给定的超强嵌入映射来得到一个可以用超幂来表示它的根本部分的超滤子系统.

设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个以 κ 为临界点且满足不等式 $\mathrm{V}_{j(\kappa)}\subset M$ 的超强嵌入映射.

令 $Y=\mathrm{V}_{j(\kappa)}$. 注意 $\mathrm{V}_\kappa\subset Y$, $\kappa\in Y$, 以及 Y 是一个传递集合.

对于 $b\in Y^{<\omega}=\bigcup\limits_{n<\omega}Y^n$, 如果 $\mathrm{dom}(b)\geqslant m\geqslant 1$, 那么对于 $\sigma\in[\mathrm{dom}(b)]^m$, 令 $\sigma=\{n_0,\cdots,n_{m-1}\}_<$ 为 σ 的单调递增列表, 我们用下述等式定义 $b[\sigma]\in Y^m$：

$$\forall i<m\ \left(b[\sigma](i)=b\left(n_i\right)\right).$$

对于 $a,b\in Y^{<\omega}$, 定义

(i) $a\leqslant b$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(a)\leqslant\mathrm{dom}(b)$ 并且存在一个 $\sigma\in[\mathrm{dom}(b)]^{\mathrm{dom}(a)}$ 来见证等式 $a=b[\sigma]$. 注意, $a\leqslant b$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(a)\leqslant\mathrm{dom}(b)$ 以及存在一个 $\mathrm{dom}(b)$ 上的置换 τ 来见证等式 $a=(b\circ\tau)\restriction_{\mathrm{dom}(a)}$.

(ii) $a+b$ 为 Y 上的满足下述等式的序列：$\mathrm{dom}(a+b)=\mathrm{dom}(a)+\mathrm{dom}(b)$ 以及对于每一个 $i<\mathrm{dom}(a+b)$, 都有

$$(a+b)(i)=\begin{cases}a(i) & \text{如果 } i<\mathrm{dom}(a),\\ b(i-\mathrm{dom}(a)) & \text{如果 } \mathrm{dom}(a)\leqslant i<\mathrm{dom}(a)+\mathrm{dom}(b).\end{cases}$$

对于满足不等式 $a \leqslant b$ 的 $a, b \in Y^{<\omega}$, 令 τ_a^b 为 $\mathrm{dom}(b)$ 的满足等式

$$a = \left(b \circ \tau_a^b\right) \restriction_{\mathrm{dom}(a)}$$

的唯一置换; 并且对于 $z \in Y^{\mathrm{dom}(b)}$, 定义

$$\mathrm{TY}_a^b(z) = \left(z \circ \tau_a^b\right) \restriction_{\mathrm{dom}(a)} \in Y^{\mathrm{dom}(a)}.$$

对于 $a \in Y^{<\omega}$, 对于 $X \subset \mathrm{V}_\kappa^{|a|} = \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$, 令

$$X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X).$$

令 $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$. 我们来分析一下 $\mathcal{E}(\kappa, Y)$ 具备哪些有用的性质. 下面的分析与证明与第 114 页中有关导出张子的讨论类似.

命题 1.5 我们断言:

(a) 对于每一个 $a \in Y^{<\omega}$ 来说, E_a 是 $\mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$ 上的一个 κ-完全的超滤子; E_a 是平凡超滤子当且仅当 $a \in \mathrm{V}_\kappa^{<\omega} \subset \mathrm{V}_\kappa$; $\kappa \times \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)} \in E_{\langle\kappa\rangle + a}$.

(b) (协调性) 对于 $a, b \in Y^{<\omega}$, 如果 $a \leqslant b$, 那么 E_b 投影到 E_a 之上, 即

$$\forall X \subseteq V_\kappa^{\mathrm{dom}(a)} \left(X \in E_a \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^{\mathrm{dom}(b)} \;\middle|\; \mathrm{TY}_a^b(z) \in X\right\} \in E_b\right).$$

(c) (正规性)

(i) $$\forall y \in Y \, \forall x \in Y \, \left(y \in x \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^2 \mid z(0) \in z(1)\right\} \in E_{\langle y, x\rangle}\right);$$

$$\forall y \in Y \, \forall x \in Y \, \left(y = x \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^2 \mid z(0) = z(1)\right\} \in E_{\langle y, x\rangle}\right).$$

(ii) 对于任意的 $n < \omega$, 对任意的 $a \in Y^n$, 对任意的 $x \in Y$ 以及任意的 $f : V_\kappa^n \to \mathrm{V}_\kappa$, 都有

$$\left(\begin{array}{c} \left\{z \in V_\kappa^{n+1} \mid f(z\restriction_n) \in z(n)\right\} \in E_{a+\langle x\rangle} \\ \to \left(\exists y \in x \; \left\{z \in V_\kappa^{n+1} \mid f(z\restriction_n) = z(n)\right\} \in E_{a+\langle y\rangle}\right) \end{array}\right).$$

(d) (ω-完全性) 对于任意的由一个自然数无穷子集 $x = \{n_i : i < \omega\}_< \in [\omega]^\omega$ 和一个 Y 中的无穷序列 $f \in Y^\omega$ 所成序对 (x, f) 确定的序列 $\langle X_{f\restriction_{n_i}} \in E_{f\restriction n_i} : i < \omega\rangle$ 来说, 一定存在一个函数 $g \in V_\kappa^\omega$ 来见证 $g\restriction_{n_i} \in X_{f\restriction_{n_i}}$.

证明 (a) 第一个结论成立是因为: $a \notin j(\varnothing)$, $a \in j\left(\mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}\right) = \mathrm{V}_{j(\kappa)}^{\mathrm{dom}(a)}$, 以及下述等式:

$$X_1 \subset X_2 \leftrightarrow j\left(X_1\right) \subset j\left(X_1\right);\; j\left(\mathrm{V}_\kappa^n - X\right) = j\left(\mathrm{V}_\kappa^n\right) - j(X) = \mathrm{V}_{j(\kappa)}^n - j(X).$$

以及对于 $\gamma<\kappa$, 因为 $j(\gamma)=\gamma$, 所以

$$j\left(\bigcap_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha<\gamma} j\left(X_\alpha\right).$$

第二个结论之所以成立, 是因为：当 $a\in \mathrm{V}_\kappa^{<\omega}$ 时, $j(a)=a$, 从而 $a\in j(X)\rightarrow j(a)\in j(X)\rightarrow a\in X$; 当 $a\in\left(\mathrm{V}_{j(\kappa)}^{<\omega}-\mathrm{V}_\kappa^{<\omega}\right)$ 时, 比如 $\mathrm{RK}(a(i))\geqslant\kappa$, 那么 $j(a)\notin \mathrm{V}_{j(\kappa)}$, 所以 E_a 就不会是一个平凡超滤子：若 $X=\{b\}\in E_a$, 那么 $a\in j(X)=\{j(b)\}$, 从而 $a=j(b)$, 可是 $\left(\mathrm{V}_{j(\kappa)}-\mathrm{V}_\kappa\right)$ 与 j 的值域无交. 第三个结论成立在于：

$$\kappa\times \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}=\left\{\langle\alpha\rangle+t \;\middle|\; \alpha<\kappa\wedge t\in \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}\right\},$$

以及 $(\langle\kappa\rangle+a)\in j\left(\kappa\times \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}\right)$.

(b) 之所以成立是因为 $j\left(\mathrm{TY}_a^b\right)\restriction_{Y^{\mathrm{dom}(b)}}=\mathrm{TY}_a^b$. 这一讨论和前面在 $Y=\lambda$ 时的讨论完全一样.

(c) (i) 令 $X=\left\{t\in \mathrm{V}_\kappa^2 \;\middle|\; t(0)\in t(1)\right\}$. 那么

$$j(X)=\left\{t\in j\left(\mathrm{V}_\kappa^2\right) \;\middle|\; t(0)\in t(1)\right\}=\left\{t\in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^2 \;\middle|\; t(0)\in t(1)\right\}.$$

所以, 对于 $x\in Y$ 和 $y\in Y$, 令 $a(0)=y$ 以及 $a(1)=x$, 那么 $a\in Y^2$. 如果 $y\in x$, 那么 $a\in j(X)$, 从而, $X\in E_a$; 如果 $y\notin x$, 那么 $a\notin j(X)$, 于是 $a\in j\left(\mathrm{V}_\kappa^2-X\right)$, 从而 $X\notin E_a$.

令 $X=\left\{t\in \mathrm{V}_\kappa^2 \;\middle|\; t(0)=t(1)\right\}$. 那么

$$j(X)=\left\{t\in j\left(\mathrm{V}_\kappa^2\right) \;\middle|\; t(0)=t(1)\right\}=\left\{t\in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^2 \;\middle|\; t(0)=t(1)\right\}.$$

所以, 对于 $x\in Y$ 和 $y\in Y$, 令 $a(0)=y$ 以及 $a(1)=x$, 那么 $a\in Y^2$. 如果 $y=x$, 那么 $a\in j(X)$, 从而, $X\in E_a$; 如果 $y\neq x$, 那么 $a\notin j(X)$, 于是 $a\in j\left(\mathrm{V}_\kappa^2-X\right)$, 从而 $X\notin E_a$.

(ii) 设 $n=0$. 那么 $a\in Y^0=\{\varnothing\}$ 就意味着 $a=\varnothing$. 设 $x\in Y$ 以及 $f:\mathrm{V}_\kappa^0\rightarrow \mathrm{V}_\kappa$. 令 $z=f(\varnothing)$. 设

$$\left\{t\in \mathrm{V}_\kappa^1 \;\middle|\; f(\varnothing)\in t(0)\right\}\in E_{\langle x\rangle}.$$

根据定义

$$\langle x\rangle\in\left\{t\in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^1 \;\middle|\; j(f(\varnothing))\in t(0)\right\}=\left\{t\in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^1 \;\middle|\; f(\varnothing)\in t(0)\right\}.$$

也就是说, $f(\varnothing)\in x$. 令 $y=f(\varnothing)$. 令

$$B=\left\{t\in \mathrm{V}_\kappa^1 \;\middle|\; y=t(0)\right\}.$$

那么 $\langle y\rangle \in j(B)=\left\{t \in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^{1} \,\middle|\, j(y)=y=t(0)\right\}$. 所以, $B \in E_{\langle y\rangle}$.

设 $n>0$, 以及 $a \in Y^{n}$. 设 $x \in Y$ 以及 $f: \mathrm{V}_{\kappa}^{n} \rightarrow \mathrm{V}_{\kappa}$. 又设

$$A=\left\{t \in \mathrm{V}_{\kappa}^{n+1} \mid f\left(t \upharpoonright_{n}\right) \in t(n)\right\} \in E_{a+\langle x\rangle}.$$

根据定义,

$$(a+\langle x\rangle) \in j(A)=\left\{t \in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^{n+1} \,\middle|\, j(f)\left(t \upharpoonright_{n}\right) \in t(n)\right\}.$$

也就是说, $j(f)(a) \in x$. 令 $y=j(f)(a)$, 以及令

$$B=\left\{t \in \mathrm{V}_{\kappa}^{n+1} \mid f\left(t \upharpoonright_{n}\right)=t(n)\right\}.$$

那么, $(a+\langle y\rangle) \in j(B)$, 因为 $j(f)(a)=y$. 所以 $B \in E_{a+\langle y\rangle}$.

(d) 这里的讨论与第 116 页中关于导出张子的 ω-完全性类似：用到对于传递内模型而言有秩关系的绝对不变性.

设 $x=\{n_i: i<\omega\}_{<} \in[\omega]^{\omega}$ 以及 $f: \omega \rightarrow Y$. 设它们一起确定一个序列

$$\langle X_{f\upharpoonright_{n_i}} \in E_{f\upharpoonright n_i}: i<\omega\rangle.$$

我们定义树 $\mathrm{V}_{\kappa}^{<\omega}$ 的一棵子树 T 如下：

$$t \in T \leftrightarrow t \in \mathrm{V}_{\kappa}^{<\omega} \wedge \forall i<\omega\left(n_i \leqslant \operatorname{dom}(t) \rightarrow t \upharpoonright_{n_i} \in X_{f\upharpoonright_{n_i}}\right).$$

自然, $t_1<t_2 \leftrightarrow t_1 \supset t_2$ 是树 $\mathrm{V}_{\kappa}^{<\omega}$ 上的序关系.

和第 116 页中关于导出张子的 ω-完全性证明一样, 我们来证明在 M 中, $j(T)$ 有一根无限单调下降的树枝. 根据有秩关系对于传递模型 M 的绝对不变性, 我们在 V 中证明 $j(T)$ 有一根无限单调下降的树枝. 根据定义,

$$t \in j(T) \leftrightarrow t \in \mathrm{V}_{j(\kappa)}^{<\omega} \wedge \forall i<\omega\left(n_i \leqslant \operatorname{dom}(t) \rightarrow t \upharpoonright_{n_i} \in j\left(X_{f\upharpoonright_{n_i}}\right)\right).$$

根据 (x, f) 以及 $\left\langle X_{f\upharpoonright_{n_i}} \,\middle|\, i<\omega\right\rangle$ 的性质, 有

$$\forall i<\omega\ \left(\left(f \upharpoonright_{n_i}\right) \in j\left(X_{f\upharpoonright_{n_i}}\right)\right).$$

所以, f 就是 $j(T)$ 的一根无限单调下降的树枝. 因此, $M \models j(T)$ 有一根无限单调下降的树枝. 根据 j 的同质嵌入特性, $\mathrm{V} \models T$ 有一根无限单调下降的树枝. 令 g 为 T 的一根无限单调下降的树枝. 那么 $g: \omega \rightarrow \mathrm{V}_{\kappa}$, 并且

$$\forall i<\omega\ \left(g \upharpoonright_{n_i} \in X_{f\upharpoonright_{n_i}}\right).$$ □

广义张子

现在将张子的定义 (定义 1.19) 推广到我们目前所处的更一般的情形, 姑且还称之为张子, 但从上下文看, 并不会带来混淆, 并且事实上现在的概念的确更一般.

定义 1.22　设 κ 是一个不可数的正则基数以及设 Y 是一个传递集合, 并且 $\kappa \in Y$.

(1) 称函数 $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$ 为一个 (κ, Y)-**张子**(并且称 κ 为本张子的**临界点**, 称 Y 为本张子的**支撑**) 当且仅当

(a) 对于每一个 $a \in Y^{<\omega}$ 来说, E_a 是 $\mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$ 上的一个 κ-完全的超滤子; E_a 是平凡超滤子当且仅当 $a \in \mathrm{V}_\kappa^{<\omega} \subset \mathrm{V}_\kappa$; $\kappa \times \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)} \in E_{\langle\kappa\rangle + a}$.

(b) (协调性) 对于 $a, b \in Y^{<\omega}$, 如果 $a \leqslant b$, 那么 E_b **投影到** E_a 之上, 即

$$\forall X \subseteq V_\kappa^{\mathrm{dom}(a)} \ \left(X \in E_a \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^{\mathrm{dom}(b)} \;\middle|\; \mathrm{TY}_a^b(z) \in X\right\} \in E_b\right).$$

(2) 称 (κ, Y)-张子 $\mathcal{E}(\kappa, Y)$ 为一个**正规张子**当且仅当它具备下述正规性:

(i) $\forall y \in Y \, \forall x \in Y \ \left(y \in x \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^2 \mid z(0) \in z(1)\right\} \in E_{\langle y, x\rangle}\right)$;

$$\forall y \in Y \, \forall x \in Y \ \left(y = x \leftrightarrow \left\{z \in V_\kappa^2 \mid z(0) = z(1)\right\} \in E_{\langle y, x\rangle}\right).$$

(ii) 对任意的 $n < \omega$, 对任意的 $a \in Y^n$, 对任意的 $x \in Y$ 以及对任意的 $f : V_\kappa^n \to \mathrm{V}_\kappa$, 都有

$$\left(\begin{array}{c} \left\{z \in V_\kappa^{n+1} \mid f(z\restriction_n) \in z(n)\right\} \in E_{a+\langle x\rangle} \\ \to \left(\exists y \in x \ \left\{z \in V_\kappa^{n+1} \mid f(z\restriction_n) = z(n)\right\} \in E_{a+\langle y\rangle}\right) \end{array}\right).$$

(3) 称 (κ, Y)-张子 $\mathcal{E}(\kappa, Y)$ 为一个 ω-**完全的张子** 当且仅当它具备下述 ω-完全性: 对于任意的由一个自然数无穷子集 $x = \{n_i : i < \omega\}_< \in [\omega]^\omega$ 和一个 Y 中的无穷序列 $f \in Y^\omega$ 所成序对 (x, f) 确定的序列 $\langle X_{f\restriction_{n_i}} \in E_{f\restriction n_i} : i < \omega\rangle$ 来说, 一定存在一个函数 $g \in V_\kappa^\omega$ 来见证 $g\restriction_{n_i} \in X_{f\restriction_{n_i}}$.

前面的分析 (命题 1.5) 表明, 由一个以 κ 为临界点的超强嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 可以得到一个 $(\kappa, \mathrm{V}_{j(\kappa)})$-$\omega$-完全的正规张子. 自然, 我们应当也可以由一个这样的张子构造由它确定的超幂, 就像我们在第 122 页中所定义的那样 (定义 1.20).

广义张子超幂

定义 1.23 (广义张子超幂)　设 κ 是一个不可数的正则基数, Y 是一个传递集合, $\kappa \in Y$. 设

$$\mathcal{E} = \left\{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\right\}$$

是一个 (κ, Y)-正规的 ω-完全的张子. 令

$$\mathscr{C} = \left\{(a, f) \mid a \in Y^{<\omega} \wedge f \text{ 是一个函数, 并且} \operatorname{dom}(f) = \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}\right\}.$$

对于 $(a,f),(b,g)\in\mathscr{C}$, 令

$$(a,f)\equiv(b,g)\leftrightarrow$$
$$\left\{x\in \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)+\mathrm{dom}(b)}\;\middle|\;\left(f\circ \mathrm{TY}_a^{a+b}\right)(x)=\left(g\circ \mathrm{TY}_b^{a+b}\right)(x)\right\}\in E_{(a+b)}.$$

依旧定义 $[(a,f)]_\mathcal{E}$ 为所有那些与 (a,f) 具备 $\equiv$ 关系的最小秩的序对的集合; 然后再定义

$$[(a,f)]_\mathcal{E}\,\epsilon\,[(b,g)]_\mathcal{E}\leftrightarrow$$
$$\left\{x\in \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)+\mathrm{dom}(b)}\;\middle|\;\left(f\circ \mathrm{TY}_a^{a+b}\right)(x)\in\left(g\circ \mathrm{TY}_b^{a+b}\right)(x)\right\}\in E_{(a+b)}.$$

称 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})=(\mathscr{C}/\equiv,\epsilon)$ 为**由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的 V 的超幂**.

如果 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})$ 是有秩的, 那么令 $\pi_\mathcal{E}:\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})\cong M_\mathcal{E}$ 为它的传递化映射; $i_\mathcal{E}:\mathrm{V}\to\mathrm{ult}(\mathrm{V},\mathcal{E})$ 为由下式所定义的自然嵌入映射: 对于 $x\in\mathrm{V}$, 以及 $t\in\mathrm{V}_\kappa^{<\omega}$, 令 $c_x(t)=x$, 以及

$$i_\mathcal{E}(x)=[(\varnothing,c_x)]_\mathcal{E}\,;$$

再令 $j_\mathcal{E}(x)=\pi_\mathcal{E}(i_\mathcal{E}(x))$, 并且称 $j_\mathcal{E}:\mathrm{V}\to M_\mathcal{E}$ 为**由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的嵌入映射**.

同前面的特殊情形的基本事实 (引理 1.55) 那样, 我们也有下述引理.

引理 1.57 (1) $\equiv$ 满足等价关系的三项基本要求;

(2) $[(a,f)]_\mathcal{E}=[(b,g)]_\mathcal{E}$ 当且仅当 $(a,f)\equiv(b,g)$;

(3) 如果 $(a_1,f_1)\equiv(b_1,g_1)$ 以及 $(a_2,f_2)\equiv(b_2,g_2)$, 那么

$$[(a_1,f_1)]_\mathcal{E}\,\epsilon\,[(a_2,f_2)]_\mathcal{E}\leftrightarrow[(b_1,g_1)]_\mathcal{E}\,\epsilon\,[(b_2,g_2)]_\mathcal{E}\,.$$

证明 (练习.) □

引理 1.58 由一个正规的 ω-完全的 (κ,Y)-张子 $\mathcal{E}$ 所确定的超幂 $\mathrm{ult}\,(V,\mathcal{E})$ 是一个自同一的有秩结构.

证明 和前面特殊情形下的讨论一样, 应用 ω-完全性. 详细论证留作练习. □

如果说 ω-完全性是为了保证张子所确定的超幂是有秩结构, 那么正规性则是为了保证张子的支撑集合的每一个元素在超幂中都有非常典型的表示. 下面的引理表明张子满足正规性的根本理由: 我们希望张子的支撑集合 Y 自动成为该张子所确定的超幂的一部分.

引理 1.59 设 Y 是一个传递集合, $\kappa\in Y$ 是一个不可数的正则基数. 设 $\mathcal{E}=\{E_a\mid a\in Y^{<\omega}\}$ 为一个正规的 ω-完全的 (κ,Y)-张子. 令 $f:\mathrm{V}_\kappa^1\to\mathrm{V}_\kappa$ 为由下述等式确定的函数:

$$\forall x\in\mathrm{V}_\kappa^1\;(f(\langle x\rangle)=x).$$

那么 $(Y, \in)$ 是

$$(\{[(\langle z\rangle, f)]_{\mathcal{E}} \mid z \in Y\}, \epsilon)$$

的传递化; 并且对于每一个 $z \in Y$, 都有

$$[(\langle z\rangle, f)]_{\mathcal{E}} \in [(\varnothing, c_{\mathrm{V}_\kappa})],$$

其中 c_{V_κ} 是取常值 V_κ 的函数.

证明　设 $y \in Y$, $z \in Y$. 我们有

$$y \in z \leftrightarrow [(\langle y\rangle, f)] \,\epsilon\, [(\langle z\rangle, f)].$$

设 $y \in z$. 根据正规性 (i), $A_\in \in E_{\langle y,z\rangle}$. 对于 $t\mathrm{V}_\kappa^2$, 有

$$t \in A_\in \leftrightarrow f\left(t\restriction_1\right) \in f\left(\langle t(1)\rangle\right).$$

所以, $[(\langle y\rangle, f)] \,\epsilon\, [(\langle z\rangle, f)]$. 反之, 设

$$X = \left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^2 \;\middle|\; f\left(t\restriction_1\right) \in f\left(\langle t(1)\rangle\right)\right\} \in E_{\langle y,z\rangle}.$$

也就是说,

$$X = \left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^2 \;\middle|\; f\left(t\restriction_1\right) \in t(1)\right\} \in E_{\langle y,z\rangle}.$$

根据正规性之 (ii), 令 $w \in z$ 来见证

$$X_1 = \left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^2 \;\middle|\; f\left(t\restriction_1\right) = t(1)\right\} \in E_{\langle y,w\rangle}.$$

根据 f 的定义, 我们有 $\forall t \in X_1\ (t(0) = t(1))$. 由此, 再根据正规性之 (i) 和张子的投影性质, 我们得到 $y = w$ 的结论. 所以, $y \in z$.

接下来, 我们需要验证: 如果 $[(a, g)] \,\epsilon\, [(\langle y\rangle, f)]$, 那么

$$\exists z \in y\ ([(a, g)] \equiv [(\langle z\rangle, f)]).$$

设 $[(a, g)] \,\epsilon\, [(\langle y\rangle, f)]$. 根据定义,

$$\left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)+1} \mid g\left(t\restriction_{\mathrm{dom}(a)}\right) \in t(\mathrm{dom}(a))\right\} \in E_{a+\langle y\rangle}.$$

根据正规性之 (ii), 我们就有

$$\exists z \in y\ \left(\left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)+1} \mid g\left(t\restriction_{\mathrm{dom}(a)}\right) = t(\mathrm{dom}(a))\right\} \in E_{a+\langle z\rangle}\right).$$

取出 y 中满足上述要求的 z, 我们就有 $[(a, g)] \equiv [(\langle z\rangle, f)]$.

现在设 $z \in Y$. 那么

$$\left\{t \in \mathrm{V}_\kappa^1 \mid f(t) \in c_{\mathrm{V}_\kappa}(t)\right\} = \mathrm{V}_\kappa^1 \in E_{\langle z\rangle}.$$

所以, $[(\langle z\rangle, f)]_{\mathcal{E}} \in [(\varnothing, c_{\mathrm{V}_\kappa})]_{\mathcal{E}}$. □

对于由 (κ, Y)-张子确定的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E})$, 我们也有超幂基本定理 (Łoś 定理). 它的证明和前面的超幂基本定理 (定理 1.8) 以及定理 1.4 的证明一样.

定理 1.33 设 Y 是一个传递集合, $\kappa \in Y$ 是一个不可数的正则基数. 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$ 为一个正规的 ω-完全的 (κ, Y)-张子. 设 $\phi(v_1, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为 $Y^{<\omega}$ 中的元素. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 分别为定义在 $\mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a_1)}, \cdots, \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a_n)}$ 上的函数. 那么如下命题对等:

(1) $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) \models \phi\left[[(a_1, f_1)], \cdots, [(a_2, f_2)]\right]$.

(2) $\exists t\, \exists \sigma_1 \cdots \exists \sigma_n\ (a_1 = t[\sigma_1] \wedge \cdots \wedge a_n = t[\sigma_n] \wedge A \in E_t)$, 其中

$$A = \left\{ z \in V_\kappa^{\mathrm{dom}(t)} \;\middle|\; \phi\left[f_1\left(z\left[\sigma_1\right]\right), \cdots, f_n\left(z\left[\sigma_n\right]\right)\right] \right\}.$$

(3) $\forall t\, \forall \sigma_1 \cdots \forall \sigma_n\ ((a_1 = t\left[\sigma_1\right] \wedge \cdots \wedge a_n = t\left[\sigma_n\right]) \to A \in E_t)$, 其中

$$A = \left\{ z \in V_\kappa^{\mathrm{dom}(t)} \;\middle|\; \phi\left[f_1\left(z\left[\sigma_1\right]\right), \cdots, f_n\left(z\left[\sigma_n\right]\right)\right] \right\}.$$

证明 (练习.) □

综合起来, 用这种广义张子所确定的超幂有下述性质:

定理 1.34 设 Y 是一个传递集合, $\kappa \in Y$ 是一个不可数的正则基数. 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$ 为一个正规的 ω-完全的 (κ, Y)-张子. 那么

(1) 由 (κ, Y)-张子 $\mathcal{E}$ 所确定的 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E}) = (\mathscr{C}/\equiv, \epsilon)$ 是一个自同一的有秩结构.

(2) 设 $j_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \to M_{\mathcal{E}}$ 为由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的嵌入映射, 那么 $j_{\mathcal{E}} : \mathrm{V} \prec M_{\mathcal{E}}$, 并且

(a) $\kappa = \mathrm{Crit}\,(j_{\mathcal{E}})$, $Y \subset \mathrm{V}_{j_{\mathcal{E}}(\kappa)}^{M_{\mathcal{E}}}$;

(b) 对于 $a \in Y^{<\omega}$, $X \subseteq \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$, $X \in E_a \leftrightarrow a \in j_{\mathcal{E}}(X)$;

(c) $M_{\mathcal{E}} = \left\{ j_{\mathcal{E}}(f)(a) \mid a \in Y^{<\omega} \wedge f : \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)} \to \mathrm{V} \right\}$.

证明 (练习.) □

作为广义张子超幂构造的一个应用, 我们来证明任何一个超紧基数之下必有许多超强基数.

定理 1.35 设 κ 是一个 2^κ-超紧基数. 那么集合

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个超强基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃子集.

证明　设 κ 是一个 2^κ-超紧基数. 设 $j: \mathrm{V} \prec M$ 为满足下述要求的同质嵌入映射:

(1) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $j(\kappa) > 2^\kappa$;

(2) $M^{2^\kappa} \subset M$.

令 $Y = \mathrm{V}^M_{j(\kappa)}$. $\kappa \in Y \in M$ 是一个传递集合. 我们以 Y 为支撑来定义由 j 诱导出来的张子: 对于 $a \in Y^{<\omega}$, 对于 $X \subseteq \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$, 令

$$X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X).$$

令 $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$.

令 $i = j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}: \mathrm{V}_{\kappa+1} \prec \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$. 那么, $i \in M$.

对于 $a \in Y^{<\omega}$, 以及 $X \subseteq \mathrm{V}_\kappa$, 我们有

$$X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X) \leftrightarrow a \in i(X).$$

因此, $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\} \in M$. 在 M 中, 应用张子 $\mathcal{E}(\kappa, Y)$ 构造 M 的超幂, 得到一个超强嵌入映射 $j^M_{\mathcal{E}}: M \prec N_{\mathcal{E}}$ 并且满足要求: $\kappa = \mathrm{Crit}\left(j^M_{\mathcal{E}}\right)$ 以及 $\mathrm{V}^M_{j^M_{\mathcal{E}}(\kappa)} = \mathrm{V}^M_{j(\kappa)} \subset N_{\mathcal{E}}$.

这样, $M \models \kappa$ 是一个超强基数. 从而

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{是一个超强基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃子集. 事实上, 它在由 j 所确定的正规超滤子 D 之中: 对于 $X \subseteq \kappa$,

$$X \in D \leftrightarrow \kappa \in j(X).$$

□

1.2.4　武丁基数

应用张子概念, 我们引进一类对于实数正则性产生深刻作用的大基数: 武丁[13]基数.

定义 1.24　称一个正则基数 δ 为一个**武丁基数**当且仅当对于每一个 $A \subseteq \mathrm{V}_\delta$, 以及每一个 $\beta < \delta$, 一定存在一个具备下述特性的基数 $\kappa \geqslant \beta$: 对于任意基数 $\kappa \leqslant \lambda < \delta$, 在 V_δ 中存在一个 $\left(\kappa, |\mathrm{V}_\lambda|^+\right)$-张子 $\mathcal{E}$ 以至于由 $\mathcal{E}$ 所确定的超幂嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}: \mathrm{V} \prec M$ 满足等式 $A \cap \mathrm{V}_\lambda = j(A) \cap \mathrm{V}_\lambda$.

引理 1.60　如果 δ 是一个武丁基数, 那么 δ 是一个不可达基数.

证明　由于 δ 之下有任意大的可测基数, 所以 δ 自然是一个强极限基数. 如果 $\mathrm{cf}(\delta) < \delta$, 那么就令 A 为从 $\mathrm{cf}(\delta)$ 到 δ 的单调递增并收敛于 δ 的函数. 令

13 H. W. Woodin 根据对实数正则性分析的需求提炼出这一最佳概念.

$\delta > \kappa > \mathrm{cf}(\delta)$ 具备武丁基数 δ 所要求的特性. 令 $\alpha < \mathrm{cf}(\delta)$ 满足 $A(\alpha) > \kappa$. 令 λ 为一个满足不等式 $A(\alpha) < \lambda < \delta$ 的基数. 令 $j : \mathrm{V} \prec M$ 为一个满足下述要求的同质嵌入映射：

$$j(\kappa) > \lambda > A(\alpha) > \kappa = \mathrm{Crit}(j) > \mathrm{cf}(\delta) \text{ 以及 } A \cap \mathrm{V}_\lambda = j(A) \cap \mathrm{V}_\lambda.$$

现在我们有：$j(A)(\alpha) = j(A(\alpha)) > j(\kappa) > \lambda$, 因此 $(\alpha, A(\alpha)) \in A \cap \mathrm{V}_\lambda - j(A)$. 这就是一个矛盾. □

武丁基数还可以如下定义：

定义 1.25 称一个正则基数 δ 为一个**武丁基数**当且仅当对于每一个函数 $f : \delta \to \delta$ 而言, 一定存在一个 $\kappa < \delta$ 以及存在一个同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 来见证下述事实:

(i) $\forall \gamma < \kappa \, (f(\gamma) \in \kappa)$;

(ii) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$;

(iii) $\mathrm{V}_{j(f)(\kappa)} \subset M$.

既然有两种定义, 我们就必须验证它们是对等的. 事实上它们的确对等, 诚如下述定理所示. 为了简化表述, 我们引进下述名词：设 $\kappa \leqslant \lambda$ 为两个基数, A 是任意一个集合. 称 κ 是一个**保持 A 作用的 λ-强基数**当且仅当存在一个具备下述特性的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$：

(i) $\mathrm{Crit}(j) = \kappa$, $\lambda < j(\kappa)$;

(ii) $V_\lambda \subset M$;

(iii) $A \cap \mathrm{V}_\lambda = j(A) \cap \mathrm{V}_\lambda$.

应用此名词, 我们可以说 κ 是一个 λ-强基数当且仅当它是一个保持空集作用的 λ-强基数; δ 是一个武丁基数当且仅当对于每一个 $A \subseteq \mathrm{V}_\delta$, 以及任意的 $\beta < \delta$, 都有大于 β 但小于 δ 的 κ 存在以至于无论 $\lambda < \delta$ 有多大 κ 都是保持 A 作用的 λ-强基数.

定理 1.36 设 δ 是一个不可数的正则基数. 那么下述命题对等:

(a) 对于每一个 $A \subseteq \mathrm{V}_\delta$ 而言, 一定存在一个 $\kappa < \delta$ 以至于对于任意的 $\kappa \leqslant \lambda < \delta$, κ 都是一个保持 A 作用的 λ-强基数.

(b) 如果 $A \subseteq \mathrm{V}_\delta$, 那么下述集合是 δ 的一个荟萃子集:

$$\{\kappa < \delta \mid \forall \kappa \leqslant \lambda < \delta \, (\kappa \text{ 是一个保持 } A \text{ 作用的 } \lambda\text{-强基数})\}.$$

(c) 对于任意一个函数 $f : \delta \to \delta$, 都一定有 $\kappa < \delta$ 满足下述要求:

(i) $\forall \gamma < \kappa \, (f(\gamma) \in \kappa)$;

(ii) 存在一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 以至于 $\mathrm{V}_{j(f)(\kappa)} \subset M$.

(d) 对于任意一个函数 $f:\delta\to\delta$, 都一定有 $\kappa<\delta$ 满足下述要求:

(i) $\forall\gamma<\kappa\,(f(\gamma)\in\kappa)$;

(ii) 存在一个以 κ 为临界点的长度为某个 $\lambda<\delta$ 的 (κ,λ)-张子 $\mathcal{E}\in V_\delta$ 以至于由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的超幂同质嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}:V\prec M_{\mathcal{E}}$ 满足等式 $j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa)=f(\kappa)$ 以及不等式 $V_{f(\kappa)}\subset M$.

证明　只需证明 (a)⇒(d) 以及 (c) ⇒ (b).

(a) ⇒ (d). 注意, 根据 (a), δ 一定是一个不可达基数. 设 $f:\delta\to\delta$. 考虑 $A=f$. 根据 (a), 令 $\kappa<\delta$ 满足要求: 对于任意的 $\kappa\leqslant\lambda<\delta$, κ 就 A 而言都是一个 λ-强基数. 取 $\kappa<\lambda<\delta$ 为一个满足下述要求的基数

$$\lambda>\left|V_{f(\kappa)}\right|^{+}+\sup\{f(\alpha)\mid\alpha\leqslant\kappa\},$$

以及令 $j:V\prec M$ 为一个 (κ,λ)-强嵌入映射以至于 $V_{f(\kappa)}\subset M$ 以及 $V_\lambda\cap f=j(f)\cap V_\lambda$.

首先, $\forall\alpha<\kappa\,(f(\alpha)<\kappa)$. 否则, 令 $\alpha<\kappa$ 满足 $f(\alpha)\geqslant\kappa$. 那么

$$j(f)(\alpha)=j(f)(j(\alpha))=j(f(\alpha))\geqslant j(\kappa)>\lambda>f(\alpha),$$

从而 $(\alpha,f(\alpha))\in(V_\lambda\cap f-j(f))$. 这便是一个矛盾.

其次, 因为 $\kappa<\lambda$ 以及 $V_\lambda\cap f=j(f)\cap V_\lambda$, 所以, $j(f)(\kappa)=f(\kappa)$.

最后, 令 $\mathcal{E}$ 为同质嵌入映射导出的 (κ,λ)-张子, 那么 $\mathcal{E}\in V_\delta$ 并且 $j_{\mathcal{E}}$ 满足 (d) 所提出的要求.

(c) ⇒ (b). 假设 (c) 成立.

注意此时 δ 是一个正则极限基数: 首先, δ 是不可数正则基数. 因为它下面有可测基数, 所以必不可数; 如果 $\mathrm{cf}(\delta)<\delta$, 令 $f\restriction_{\mathrm{cf}(\delta)}:\mathrm{cf}(\delta)\to\delta$ 为单调递增收敛于 δ 的序列, 并且 $f(0)>\mathrm{cf}(\delta)$; 而对于满足不等式 $\mathrm{cf}(\delta)\leqslant\alpha<\delta$ 的 α, 令 $f(\alpha)=\alpha$. 对于这个函数, 就不会有 $\kappa<\delta$ 满足要求: $\forall\gamma<\kappa\,(f(\gamma)<\kappa)$. 其次, δ 是一个极限基数. 如果不然, 令 $\alpha<\delta$ 为一个基数且满足 $\alpha^+=\delta$. 令 $f:\delta\cong(\delta-\alpha)$. 那么必不会有基数 $\kappa<\delta$ 来满足要求: $\forall\gamma<\kappa\,(f(\gamma)<\kappa)$.

设 $A\subseteq V_\delta$ 以及 $C\subseteq\delta$ 为一个无界闭子集. 我们需要在 C 中找到一个 κ 来满足要求:

$$\forall\kappa\leqslant\lambda<\delta\,(\kappa\text{就}\,A\,\text{而言是一个}\,\lambda\text{-强基数}).$$

对于 $\alpha<\delta$, 如果在 C 中有一个具有如下性质的极限序数 β:

$$\begin{aligned}&(\exists\lambda<\delta\,(\alpha\leqslant\lambda\wedge\alpha\text{就}\,A\,\text{而言不是一个}\,\lambda\text{-强基数}))\\ \Rightarrow&(\exists\lambda<\beta\,(\alpha\leqslant\lambda\wedge\alpha\text{就}\,A\,\text{而言不是一个}\,\lambda\text{-强基数})),\end{aligned}$$

则令 $f(\alpha)$ 为 C 中具有这样性质的最小的极限序数 β; 否则, 则令 $f(\alpha)=\min(C-\alpha)$. 根据 (c), 令 $\kappa<\delta$ 满足 $\forall\gamma<\kappa\ (f(\gamma)<\kappa)$ 以及令 $j:\mathrm{V}\prec M$ 以 κ 为临界点并且 $\mathrm{V}_{j(f)(\kappa)}\subset M$. 由于 κ 关于 f 是封闭的, $\mathrm{rng}(f)\subset C$, $C\cap\kappa$ 是 κ 的一个无界闭子集. 所以, $\kappa\in j(C)$.

断言 $M\models\forall\kappa\leqslant\lambda<j(\delta)\ \kappa$ 就 $j(A)$ 而言是一个 λ-强基数.

假设此断言不成立. 令 λ 为最小反例, 即

$$M\models(\kappa\leqslant\lambda<j(\delta)\ \wedge\ \kappa\text{就}\,j(A)\,\text{而言不是一个}\,\lambda\text{- 强基数}).$$

并且是最小的这样的一个. 根据 f 的定义, $\kappa\leqslant\lambda<j(f)(\kappa)$.

令 $\mathcal{E}$ 为由同质映射 j 所导出的 (κ,λ)-张子. 令 $j_{\mathcal{E}}:\mathrm{V}\prec M_{\mathcal{E}}$ 为由张子 $\mathcal{E}$ 所确定的超幂嵌入映射. 根据导出张子的性质, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{V} & \xrightarrow{j} & M\\ & \searrow j_{\mathcal{E}} & \uparrow \ell_{\mathcal{E}}\\ & & M_{\mathcal{E}}\end{array}$$

并且 $\mathrm{Crit}\,(\ell_{\mathcal{E}})\geqslant\lambda$. 于是有 $\mathrm{V}_\lambda\subset M_{\mathcal{E}}$. 又因为

$$M_{\mathcal{E}}=\{j(f)(a)\mid f:\mathrm{V}_\kappa\to\mathrm{V}\ \wedge\ a\in\mathrm{V}_\lambda\}\subset M,$$

我们得到 $\mathcal{E}\in M$. 由此, 在 M 中, $\mathcal{E}$ 是一个 (κ,λ)-张子, 并且

$$(\mathrm{V}_\lambda)^M=\mathrm{V}_\lambda\subset(M_{\mathcal{E}})^M\cong\mathrm{ult}(M,\mathcal{E}).$$

我们希望得到的矛盾由下面的等式给出:

$$j(A)\cap(\mathrm{V}_\lambda)^M=j^M_{\mathcal{E}}(j(A))\cap(\mathrm{V}_\lambda)^M.$$

为得此等式, 我们注意下面的系列等式:

$$\begin{aligned}j(A)\cap\left(\mathrm{V}_{j(\kappa)}\right)^M&=j\left(A\cap\mathrm{V}_\kappa\right)=j_{\mathcal{E}}\left(A\cap\mathrm{V}_\kappa\right)=j^M_{\mathcal{E}}\left(A\cap\mathrm{V}_\kappa\right)\\&=j^M_{\mathcal{E}}\left(j(A)\cap\mathrm{V}_\kappa\right)=j^M_{\mathcal{E}}(j(A))\cap j^M_{\mathcal{E}}\left(\mathrm{V}_\kappa\right).\end{aligned}$$

因为 $\lambda<j^M_{\mathcal{E}}(\kappa)$ 以及 $\mathrm{V}^M_\lambda=\mathrm{V}_\lambda$, 上面的系列等式就给出我们所需要的等式:

$$j(A)\cap(\mathrm{V}_\lambda)^M=j^M_{\mathcal{E}}(j(A))\cap(\mathrm{V}_\lambda)^M.$$

于是, 断言得证. 也就是说,

$$M\models\exists\kappa\in j(C)\ \forall\kappa\leqslant\lambda<j(\delta)\ \kappa\ \text{就}\,j(A)\,\text{而言是一个}\,\lambda\text{-强基数}.$$

根据映射 j 的同质嵌入特性,

$$\mathrm{V} \models \exists \kappa \in C\ \forall \kappa \leqslant \lambda < \delta\ \kappa \text{ 就 } A \text{ 而言是一个 } \lambda\text{-强基数}.$$

(b) 于是得证. □

定理 1.37 如果 κ 是一个超强基数, 那么 κ 是一个谢旯[14]基数, 即对于每一个函数 $f : \kappa \to \kappa$ 都有一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 以至于 $\mathrm{V}_{j(f)(\kappa)} \subset M$.

证明 设 $j : \mathrm{V} \prec M$ 以 κ 为临界点, 并且 $\mathrm{V}_{j(\kappa)} \subset M$.

此时对于任意的 $f : \kappa \to \kappa$, 自然都有 $j(f)(\kappa) < j(\kappa)$. 这表明 κ 是一个谢旯基数.

设 $f : \kappa \to \kappa$. 令 $Y = \mathrm{V}_{j(f)(\kappa)+\omega} \cup \mathrm{V}_{\kappa+2}$. $\kappa \in Y$ 是一个传递集合, 并且 $Y \in M$. 对于 $a \in Y^{<\omega}$, 以及 $X \subseteq \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$, 令

$$X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X).$$

再令 $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$ 为由 j 导出的以 Y 为支撑的张子. 那么, $\mathcal{E}(\kappa, Y) \in \mathrm{V}_{j(\kappa)} \subset M$. 在 M 中, 由张子 $\mathcal{E}(\kappa, Y)$ 所确定的 M 的超幂 $\mathrm{ult}(M, \mathcal{E}(\kappa, Y))$ 的同质嵌入映射 $j_{\mathcal{E}}^M$ 见证 κ 是 f-谢旯. 所以, $M \models \kappa$ 是一个谢旯基数. 从而

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个谢旯基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃子集. □

定理 1.38 如果 κ 是一个谢旯基数, 那么 κ 是一个武丁基数, 并且下述集合

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个武丁基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃子集.

证明 设 κ 是一个谢旯基数. 设 $f : \kappa \to \kappa$. 如下定义函数 $g : \kappa \to \kappa$:

$$\forall \alpha < \kappa\ (g(\alpha) = \text{最小的严格大于 } f(\alpha) + \alpha \text{ 的不可达基数}).$$

令 $j : \mathrm{V} \prec M$ 为一个 g-谢旯同质嵌入映射, 即 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, 并且 $\mathrm{V}_{j(g)(\kappa)} \subset M$.

令 $Y = \mathrm{V}_{j(f)(\kappa)+\kappa}$. 那么 $Y \in \mathrm{V}_{j(g)(\kappa)} \subset M$. 对于 $a \in Y^{<\omega}$, 以及 $X \subseteq \mathrm{V}_\kappa^{\mathrm{dom}(a)}$, 令

$$X \in E_a \leftrightarrow a \in j(X).$$

14 S. Shelah 根据有关实数子集正则性分析的需要提炼出这一大基数概念.

令 $\mathcal{E}(\kappa, Y) = \{E_a \mid a \in Y^{<\omega}\}$. 此张子 $\mathcal{E}(\kappa, Y) \in \mathrm{V}_{j(g)(\kappa)} \subset M$. 因为 $j(f)\upharpoonright_\kappa = f$, $j_{\mathcal{E}}(f)(\kappa) = j(f)(\kappa)$. 于是,

$$M \models \mathcal{E}(\kappa, Y) \in \mathrm{V}_{j(\kappa)} \text{ 见证 } j(\kappa) \text{ 是 } j(f)\text{- 武丁}.$$

根据 j 的同质特性, 在 V_κ 中存在一个张子 $\mathcal{E}$ 来见证 κ 是 f-武丁. 因此, κ 是一个武丁基数.

令 $U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$. 那么 U 是 κ 上的一个正规测度. 令 $j_U : \mathrm{V} \to N \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 为依 U 确定的超幂映射. 由于 $\mathrm{V}_{\kappa+1} \subset M$, $M \models \kappa$ 是一个武丁基数. 从而

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个武丁基数}\} \in U. \qquad \square$$

推论 1.13　如果 κ 是一个 2^κ-超紧基数, 那么集合

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个武丁基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃集合.

证明　由定理 1.35、定理 1.37 以及定理 1.38 综合而得. $\square$

事实 1.2.2　如果一个可测基数 κ 还是一个武丁基数, 那么下述集合

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 既是一个武丁基数又是一个弱紧基数}\}$$

是 κ 的一个荟萃子集.

证明　设 κ 为一个可测基数并且还是一个武丁基数. 令 U 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 $j : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 为由 U 所确定的超幂同质嵌入映射. 那么 $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $j(\kappa) > \kappa^+$, $M^\kappa \subset M$, 尤其是 $\mathrm{V}_{\kappa+1} = \mathrm{V}^M_{\kappa+1}$. 因此, 在 M 中, κ 既是一个武丁基数又是一个弱紧基数. 于是,

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 既是一个武丁基数又是一个弱紧基数}\} \in U. \qquad \square$$

注意, 最小的武丁基数一定不是弱紧基数; 如果 κ 既是武丁基数又是弱紧基数, 那么在 κ 之下会有任意大的武丁基数, 也就是说, κ 一定既是一个武丁基数, 又是武丁基数的一个极限.

1.3 练　　习

练习 1.1　设 U 是 κ 上的超滤子. 证明: U 是 σ-完全的当且仅当超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 是有秩的.

练习 1.2　证明: 如果 U 是一个超滤子, 并且超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$ 是有秩的, 那么超幂中的每一个序数都由一个从 $\bigcup U$ 到 Ord 的函数所表示.

练习 1.3　设 U 是一个非平凡的 σ-完全的超滤子. 令

$$\lambda=\max\{\alpha\mid U\text{ 是 }\alpha\text{-完全的}\}.$$

令 $j:\mathrm{V}\prec M\cong\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$. 证明: $\lambda<j(\lambda)$.

练习 1.4　设 $\kappa>\omega$ 是一个正则基数, U 是 κ 上的非平凡的正规超滤子. 验证: U 是 κ-完全的.

练习 1.5　设 D 是可测基数 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 设

$$\left\{B_s\in D\;\middle|\;s\in[\kappa]^{<\omega}\right\}$$

为一个函数. 令

$$B=\triangle_{s\in[\kappa]^{<\omega}}B_s=\left\{\alpha<\kappa\;\middle|\;\alpha\in\bigcap\{\,B_s\mid\ \max(s)<\alpha\}\right\}.$$

验证: $B\in D$.

练习 1.6　设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个同质嵌入映射, M 是传递的. 证明:

$$M=\bigcup\{\,j\left(\mathrm{V}_\alpha\right)\mid\ \alpha\in\mathrm{Ord}\}\,.$$

练习 1.7　如果 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个同质嵌入映射, $\kappa=\mathrm{Crit}(j)$ 为 j 的临界点, 那么

(1) $\forall x\in\mathrm{V}_\kappa\,(j(x)=x)$;

(2) $\forall X\subseteq\mathrm{V}_\kappa\,(X=j(X)\cap\mathrm{V}_\kappa)$;

(3) $\mathrm{V}_{\kappa+1}^M=\mathrm{V}_{\kappa+1}$.

练习 1.8　设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个非平凡的同质嵌入映射, M 是传递的, κ 是 j 的临界点. 令

$$\lambda=\sup\left\{\kappa,j(\kappa),j(j(\kappa)),\cdots,j(\overbrace{\cdots}^{n}(j(\kappa))\cdots),\cdots\right\}.$$

证明: $\exists A\subset\lambda\ (A\notin M)$.

练习 1.9　设 U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 证明: U 包含 κ 上的无界闭子集滤子当且仅当 κ 上的恒等函数是 κ^κ 中的在 $<_U$ 关系下的最小的非常值的单调函数 (f 是单调的当且仅当 $\forall\alpha<\beta<\kappa\,(f(\alpha)\leqslant f(\beta))$).

练习 1.10　设 U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 设 $h:\kappa\to\kappa$. 令

$$D=\left\{\,h^{-1}[X]\mid\ X\in U\right\}.$$

证明: D 是一个 κ-完全的超滤子; 令 $k : \text{ult}(\mathrm{V}, D) \to \text{ult}(\mathrm{V}, U)$ 为由下述等式所确定的映射:

$$\forall f \in \mathrm{V}^\kappa \ (k([f]_D) = [f \circ h]_U).$$

那么 k 是一个同质嵌入映射.

练习 1.11 设 κ 是一个可测基数. 证明: 如果 $\langle A_\alpha \subseteq \alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$, 那么必有 κ 的一个子集合 A 来见证下述事实:

$$\{\alpha < \kappa \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$$

是一个荟萃集合.

练习 1.12 设 κ 是一个可测基数, $\mathscr{U}$ 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 令 $(M, \in)$ 为与 $\mathscr{H}_{\kappa^+}$ 的超幂

$$(\mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*)$$

同构的传递集合. 令

$$\pi : (\mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*) \to (M, \in)$$

为它们的同构映射; 令 $i : \mathscr{H}_{\kappa^+} \to \mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}$ 为自然嵌入:

$$\mathscr{H}_{\kappa^+} \ni x \mapsto i(x) = [\{(\alpha, x) \mid \alpha \in \kappa\}] \in \mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U};$$

以及令 $j = \pi \circ i : \mathscr{H}_{\kappa^+} \to M$. 那么下述命题等价:

(1) $\mathscr{U}$ 是一个正规超滤子;

(2) 在超幂 $\left(\mathscr{H}_{\kappa^+}^\kappa / \mathscr{U}, \in^*\right)$ 的传递化模型 M 中, $\kappa = \pi([\text{Id}])$;

(3) 对于任意的 $A \subseteq \kappa$, 都有

$$A \in \mathscr{U} \iff \kappa \in j(A).$$

练习 1.13 κ 是一个可测基数的充分必要条件是存在一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射

$$j : \mathrm{V}_{\kappa+1} \prec N,$$

其中 N 是一个传递集合.

练习 1.14 证明: 如果 κ 是可测基数, 那么在 κ 上一定有一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子 D 以至于在超幂 $\text{ult}(\mathrm{V}, D)$ 中 κ 不是可测基数.

练习 1.15 设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个序数. 令 $D = \{E \subset \alpha \mid |E| < \omega\}$. 证明下述结论:

(1) $(D, \subset)$ 是一个定向集合: 对于任意两个 $x, y \in D$, 在 D 中存在它们的一个共同上界 $z \supset x$ 以及 $z \supset y$.

(2) $\{\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E)\,, i_{E,F} \mid E \in D \wedge F \in D \wedge E \subset F\}$ 是一个定向系统; 并且

$$\{\,\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_\alpha)\,, i_{E,\alpha} \mid E \in D\}$$

与这个定向系统的定向极限同构.

练习 1.16　设 κ 是一个不可数的正则基数. 设 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数. 验证: $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的任何精良测度都是非平凡的超滤子, 并且如果 U 是一个精良测度, 那么对于任意的 $x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$, 都有

$$\{y \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid x \subseteq y\} \in U.$$

练习 1.17　设 κ 是一个不可达基数. 证明下述命题对等:

(1) κ 是一个弱紧基数;

(2) 对于任意的 $X \in [\mathfrak{P}(\kappa)]^\kappa$, 都有一个 κ-完全的滤子 $F \subset [\kappa]^\kappa$ 来满足下述要求:

$$\forall A \in X\,(A \in F \vee (\kappa - A) \in F);$$

(3) 如果 M 是一个势为 κ 的传递集合并且 $\mathrm{V}_\kappa \subseteq M$, 那么一定存在一个传递集合 N 以及一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射 $j : M \prec N$.

练习 1.18　设 M 是 ZFC 的一个传递模型, $\mathbb{B} \in M$ 是 M 中的一个完备布尔代数, G 是 M 之上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子. 证明: 如果 $M \models 0^\#$ 不存在, 那么 $M[G] \models 0^\#$ 不存在.

练习 1.19　假设 $0^\#$ 存在. 证明: 如果 $A \subset \omega_1$ 具备下述特点:

$$\forall \alpha < \omega_1\ (A \cap \alpha \in L)\,,$$

那么 $A \in L$.

练习 1.20　设κ 是一个不可数的正则基数. 假设$0^\#$存在. 证明: 如果 $X \in \mathfrak{P}(\kappa) \cap L$, 那么或者 X 包含 κ 的一个无界闭子集, 或者 $\kappa - X$ 包含 κ 的一个无界闭子集, 二者必居其一.

练习 1.21　假设存在一个不可数的正则基数 κ 来见证如下事实: 对于任意的 $X \in \mathfrak{P}(\kappa) \cap L$, 都有或者 X 包含 κ 的一个无界闭子集, 或者 $\kappa - X$ 包含 κ 的一个无界闭子集, 二者必居其一. 证明: $0^\#$ 存在.

练习 1.22　设 κ 是一个弱紧基数. 证明: 如果 $\left|(\kappa^+)^L\right| = \kappa$, 那么 $0^\#$ 存在.

练习 1.23　假设 $\forall x \subseteq \omega\, \exists y \subset \omega\, \left(y = x^\#\right)$. 证明: 对于任何一个 $x \subset \omega$, 必有或者 $0^\# \in L[x]$, 或者 $x^\# \in L\left[0^\#, x\right]$.

练习 1.24　如果 κ 是一个强紧基数, 那么语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ 满足紧致性定理.

练习 1.25 证明: κ 是强紧基数当且仅当对于任意的 λ 都有一个具备下述特点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$:

(1) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$;

(2) M 是传递的, 并且 $M^\kappa \subset M$;

(3) $\exists X \in M\ (j[\lambda] \subseteq X \wedge M \models |X| < j(\kappa))$.

练习 1.26 设 $\kappa \leqslant \lambda$ 为不可数的正则基数. 证明下述命题对等:

(i) $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上存在一个精良测度;

(ii) 对于任何一个集合 X, X 上的任何一个由至多 λ 个子集合所生成的 κ-完全的滤子一定可以扩展成 X 上的一个 κ-完全的超滤子.

练习 1.27 如果 U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度, 那么 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 的任何一个无界闭子集都在 U 之中.

练习 1.28 设 $\kappa \leqslant \lambda$ 以及 U 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个正规测度. 证明: 超积

$$\mathrm{ult}\left(\{(\mathrm{V}_{\lambda_x}, \in) \mid x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \wedge \lambda_x = \mathrm{ot}(x)\}, U\right)$$

与 $(\mathrm{V}_\lambda, \in)$ 同构.

练习 1.29 验证第 119 页事实 1.2.1 中的结论:

(1) $\equiv$ 是 $\mathscr{C}$ 上的一个等价关系;

(2) $(a, f) \equiv (b, g) \leftrightarrow [(a, f)]_{\mathcal{E}} = [(b, g)]_{\mathcal{E}}$;

(3) $[(a, f)]_{\mathcal{E}} \,\epsilon\, [(b, g)]_{\mathcal{E}}$ 的定义与代表元的选取无关;

(4) $k_{\mathcal{E}}$ 的定义与代表元的选取无关, 并且 $k_{\mathcal{E}}$ 是一个同质嵌入映射.

练习 1.30 设 $\mathcal{E} = \{E_a \mid a \in [\lambda]^{<\omega}\}$ 是一个满足 (κ, λ)-张子定义中的前三条要求的函数 (即除了 ω-完全性之外的那些要求). 验证: 如果由 $\mathcal{E}$ 所确定的 V 的超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mathcal{E})$ 是一个有秩结构, 那么 $\mathcal{E}$ 具备 ω-完全性.

练习 1.31 设 $E \subset F$ 是两个序数的非空有限集合. 如下定义从超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E)$ 到超幂 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_F)$ 的自然嵌入映射 $i_{E,F}$:

$$i_{E,F}\left([f]_{\mathscr{V}_E}\right) = \left[f \uparrow^F\right],$$

那么, $i_{E,F} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_E) \prec \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, \mathscr{V}_F)$.

练习 1.32 如果 κ 是一个不可达基数, 那么 $\mathrm{V}_\kappa \prec_{\Sigma_1} \mathrm{V}$.

练习 1.33 如果 κ 是一个超紧基数, 那么 $\mathrm{V}_\kappa \prec_{\Sigma_2} \mathrm{V}$.

练习 1.34 如果 κ 是一个强基数, 那么 $\mathrm{V}_\kappa \prec_{\Sigma_2} \mathrm{V}$.

练习 1.35 如果存在一个强基数, 那么 $\forall A\ (\mathrm{V} \neq L[A])$.

练习 1.36 设κ是一个强基数. 证明: 存在一个具备下述特性的函数 $g : \kappa \to \mathrm{V}_\kappa$:

$$\forall x\, \exists \lambda \geqslant \kappa\, \exists (\kappa, \lambda)\text{-张子}\, \mathcal{E}\ \ (|\lambda| = \lambda \geqslant |\mathcal{TC}(x)| \wedge j_{\mathcal{E}}(g)(\kappa) = x).$$

练习 1.37　证明: 如果 κ 是一个武丁基数, $T=\{\gamma<\kappa \mid \gamma \text{是可测基数}\}$, 那么 T 是 κ 的一个荟萃子集.

练习 1.38　设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 以 κ 为临界点. 令 $\xi\geqslant\kappa$ 为一个不可达基数. 假设 $\mathrm{V}_\xi\subset M$. 令 E 为由 j 和 ξ 所确定的张子. 令 $i:\mathrm{V}\prec N\cong \mathrm{ult}(\mathrm{V},E)$ 为由 E 确定的超幂同质嵌入映射. 证明: $N^{<\kappa}\subset N$.

第 2 章　大基数上力迫扩张

当集合论论域之中存在各种各样的大基数时, 自然就为构造各种各样的力迫构思提供了可能. 在这一章里, 我们试图展示几种典型的构造, 以睹风采. 第一, 我们会看到大基数性质不会被相对势较小的力迫构思泛型扩张所改变. 这一现象表明大基数性质在泛型扩张中的顽固特点, 也表明大基数对于解决连续统假设问题的无能为力. 第二, 我们将引进将不可达基数以下的基数可数化 (或者按照需要弱化) 的莱维力迫构思. 这一泛型扩张模型对于探讨可定义实数子集合的正则性有着特别作用. 第三, 我们引进将一个可测基数化为具有可数梯度而不添加任何有界子集的力迫构思. 第四, 我们引进对可测基数添加大量子集合的力迫构思但不改变可测性的力迫构思, 从而令连续统函数在可测基数上的取值大于它的后继基数. 将这两种力迫构思迭代起来就得到奇异基数假设在可数梯度强极限基数处不成立的例子. 这与第一卷第 2 章中的银杰定理 (定理 I.2.38) 形成互补. 第五, 我们构造令奇异基数假设在 $\aleph_\omega$ 处不成立的力迫构思. 第六, 我们引进恰当力迫构思的概念并构造见证恰当力迫公理相对相容的力迫构思. 这是在超紧基数下以可数支撑迭代力迫的方式来实现的. 第七, 我们引进泛型超幂构造以及构造令第一个不可数基数上的荟萃理想具备峭壁特性, 甚至饱和特性的力迫构思. 这一基数上的理想的这种组合性质对于后面探讨可定义实数子集的正则性有用. 最后, 我们探讨恰当力迫公理的进一步强化的可能性.

2.1　小 型 扩 张

假设 κ 是一个不可达基数. 我们称任何在 V_κ 中的力迫构思 $\mathbb{P} \in V_\kappa$ 为一个(相对于 κ 来说的)**小型力迫构思**. 在这里, 我们希望展示的是: 任何小型力迫构思都难以改变大基数的本质, 即它们在小型力迫扩张模型之中依然如故; 并且 (小型) 力迫构思也不可能为基数添加任何实质上的高阶无穷性质. 下面的定理是综合了不同时期不同研究人员的工作的结果. 第一个意识到这种可能性的是莱维和索洛维[1]: 可测基数的可测性不会被弱势力迫构思所破坏.

定理 2.1　*设 κ 是一个不可数基数, $\mathbb{P} \in V_\kappa$. 设 $\varphi[\kappa]$ 为下述命题之一:*

(a) *κ 是一个不可达基数;*

1 Azriel Lévy and Robert M. Solovay, Measurable cardinals and the continuum hypothesis. Israel J. Math., 5(1967), 234-248.

(b) κ 是一个弱紧基数;

(c) κ 是一个拉姆齐基数;

(d) κ 是一个可测基数;

(e) κ 是一个强基数;

(f) κ 是一个武丁基数;

(g) κ 是一个超强基数;

(h) κ 是一个强紧基数;

(i) κ 是一个超紧基数.

如果 $\varphi[\kappa]$, 那么 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi[\check{\kappa}]$.

事实上, 上述定理的逆命题也成立: 如果 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi[\check{\kappa}]$, 那么 $\varphi[\kappa]$. 也就是说, 上述大基数性质不可能由小型力迫扩张在不具备同样性质的论域之上产生. 我们只证明前四种性质的逆命题. 对于涉及张子的部分, 由于逆命题的证明在技术细节上比较复杂, 受本《导引》篇幅所限, 我们就不在本《导引》中一一展示了.

证明 在接下来的分析论证中, 总假设: $\mathbb{P} \in V_\kappa$, 或者 $|P| < \kappa$, $\mathbb{B}$ 是由 $\mathbb{P}$ 确定的完备布尔代数, 并且 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{B}$ 的一个稠密子集, $V[G]$ 是 V 的经 $\mathbb{P}$ 的泛型超滤子 G 的扩张模型, 因而不再一一重复.

(a) 设 κ 是一个不可达基数, $\mathbb{P} \in V_\kappa$. 那么 $|\mathbb{P}| < \kappa$, 所以所有大于 $|\mathbb{P}|$ 的基数在 $\mathbb{P}$ 的力迫扩张之中依旧是基数, 如果梯度大于 $|\mathbb{P}|$, 依旧是同样的梯度, 因而在 $\mathbb{P}$ 的力迫扩张中, κ 还是一个正则基数. 另外, 如果 $\lambda < \kappa$, 那么

$$\left(2^\lambda\right)^{V[G]} \leqslant |\mathbb{B}(P)|^\lambda < \kappa,$$

所以 κ 依旧是一个强极限基数. 反之, 如果 κ 在 $V[G]$ 中是不可达基数, 它在 V 中自然是不可达基数, 这甚至与偏序集 $\mathbb{P}$ 的大小无关.

(b) 设 κ 是一个弱紧基数. 令 $f : [\kappa]^2 \to \{0, 1\}$ 为 $V[G]$ 中的一个划分. 令 $\mathbb{B}$ 为力迫构思 $\mathbb{P}$ 的完备布尔代数. 令 $\dot{f} \in V^{\mathbb{B}}$ 为 f 的一个名字, 并且

$$\left\| \dot{f} : [\check{\kappa}]^2 \to \check{2} \right\| = \mathbf{1}.$$

对于 $\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2$, 令

$$F(\{\alpha, \beta\}) = \left\| \dot{f}(\mathrm{gk}(\check{\alpha}, \check{\beta})) = \check{0} \right\|,$$

其中 gk 是计算两个名字的无序对的名字函数 (见例 II.3.4). 那么, $F : [\kappa]^2 \to \mathbb{B}$, 而 $|\mathbb{B}| < \kappa$. 因为 κ 是一个弱紧基数, 所以 F 有一个势为 κ 的整齐子集 H. 我们将验证此 H 在 $V[G]$ 中便是 f 的一个整齐子集的工作留作练习.

反过来, 设 κ 在 $V[G]$ 中是一个弱紧基数. 设 $f : [\kappa]^2 \to 2$ 为 V 中的一个函数. 它在 $V[G]$ 中依旧是一个 $[\kappa]^2$ 上的二元划分. 于是, 在 $V[G]$ 中它有一个势为 κ

的整齐子集 K. 由于 κ 在 V 中必是一个不可达基数 (根据 (a)), 而 $|P|<\kappa$, 对于 $p\in P$, 令

$$K_p=\left\{\alpha<\kappa \;\middle|\; p\Vdash\left(\check{\alpha}\in\dot{K}\right)\right\}.$$

那么必有某一个 $p\in P$ 来见证 K_p 之势为 κ(参见练习 2.1). 令 $H=K_p$. 那么 H 就是 f 的一个整齐子集.

(c) 用与 (b) 相同的分析论证. 细节留作练习.

(d) 设 κ 是一个可测基数. 我们来验证在 $\mathrm{V}[G]$ 中 κ 还是一个可测基数.

设 $j:\mathrm{V}\prec M$ 是一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射.

需要注意的是, $\mathbb{P}\in\mathrm{V}_\kappa$, $\mathbb{B}\in\mathrm{V}_\kappa$, 从而 $\mathfrak{P}(\mathbb{B})\in\mathrm{V}_\kappa\in M$. 因此, 作为 V-泛型滤子的 G 也同样是 M-泛型滤子, 因为 $\mathrm{V}_{\kappa+1}=\mathrm{V}_{\kappa+1}^M$; 另外, 对于 $M^{\mathbb{B}}$ 中的每一个布尔名字 τ 而言, 它在 G 下的解释无论是在 V 中计算, 还是在 M 中计算, 都是相等的; 还有一点, $j\restriction_{\mathrm{V}_\kappa}$ 是 V_κ 上的恒等函数.

我们需要做的是将 j 延拓成一个从 $\mathrm{V}[G]$ 到 $M[G]$ 的同质嵌入映射 (直接用超滤子扩展的方式参见练习 2.3).

设 $x\in\mathrm{V}[G]$, 令 $\dot{x}\in\mathrm{V}^{\mathbb{B}}$ 来满足等式: $x=\dot{x}/G$; 然后令

$$j^*(x)=\left(j\left(\dot{x}\right)\right)/G.$$

由于 $\dot{x}\in\mathrm{V}^{\mathbb{B}}$, $j\left(\dot{x}\right)\in M^{\mathbb{B}}$, 从而 $\left(j\left(\dot{x}\right)\right)/G\in M[G]$. 因为每一个 $x\in\mathrm{V}[G]$ 都有很多名字 τ 来满足等式 $x=\tau/G$, 所以, 我们还必须保证上面的定义与 x 的名字的选取无关. 为此, 假设 τ 是另外一个满足等式要求的名字. 令 $p\in G$ 来见证它们是同一个集合的名字:

$$p\Vdash\left(\dot{x}=\tau\right).$$

根据 j 的同质特性, 有 $M\models j(p)\Vdash\left(j\left(\dot{x}\right)=j(\tau)\right)$. 由于 $j(p)=p\in G$, 就有下述等式

$$\left(j\left(\dot{x}\right)\right)/G=\left(j(\tau)\right)/G.$$

因此, j^* 的定义的确与名字的选取独立.

当 $x\in\mathrm{V}$ 时, 根据典型名字的定义 (定义 II.3.8), $\check{x}=\{(\check{y},\mathbf{1})\mid y\in x\}$. 所以,

$$j^*(x)=\left(j\left(\check{x}\right)\right)/G=\left(\check{j(x)}\right)\Big/G=j(x).$$

这表明 j^* 是 j 的延拓. 因此, κ 也是 j^* 的临界点.

还应当注意到: $j^*(G)=G$.

剩下的是要证明 $j^*:\mathrm{V}[G]\prec M[G]$. 为此, 设 $\varphi\left(v_1,\cdots,v_n\right)$ 是集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 $\mathrm{V}[G]$ 中的元素, $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 分别是它们的

名字以至于 $x_i = \tau_i/G\,(1 \leqslant i \leqslant n)$. 进而我们假设

$$\mathrm{V}[G] \models \varphi\,[x_1, \cdots, x_n]\,.$$

令 $p \in G$ 来见证这一事实: $p \Vdash \varphi\,(\tau_1, \cdots, \tau_n)$. 对此表达式应用同质映射 j, 有

$$M \models [p \Vdash \varphi\,(j\,(\tau_1)\,, \cdots, j\,(\tau_n))]\,.$$

注意 $j(p) = p$. 因此,

$$M[G] \models \varphi\,[j^*\,(x_1)\,, \cdots, j^*\,(x_n)]\,.$$

综合起来我们有: κ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个可测基数.

现在假设 κ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个可测基数. 令 $U \in \mathrm{V}[G]$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 中的在 κ 之上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 J 为 U 的对偶素理想. 令 $\tau \in \mathrm{V}^{\mathbb{B}}$ 为 J 的一个名字. 不失一般性, 我们假设

$$\big\|\tau\text{ 是 }\kappa\text{ 之上的一个非平凡的 }\kappa\text{- 可加的素理想}\big\| = \mathbf{1}.$$

令

$$I = \big\{X \subset \kappa \;\big|\; \|\check{X} \in \tau\| = \mathbf{1}\big\}\,.$$

简单计算表明 I 是一个包括所有单点集合的 κ-可加的理想.

更重要的是, 在 I^+ 中不存在模 I 彼此几乎不相交的长度为 $|P|^+ < \kappa$ 的序列 $\langle X_\alpha \mid \alpha < |P|^+\rangle$. 这是因为, 一方面, 如果 $X \notin I$, $Y \notin I$, 可是 $X \cap Y \in I$, 那么必然有

$$\|\check{X} \notin \tau\| \cdot \|\check{Y} \notin \tau\| = \mathbf{0},$$

也就是说条件 $\|\check{X} \notin \tau\|$ 与条件 $\|\check{Y} \notin \tau\|$ 是两个相互冲突的条件; 另一方面,

$$\big((p \Vdash \check{X} \notin \tau) \,\wedge\, (p \Vdash \check{Y} \notin \tau)\big) \to \big(p \Vdash \big(\check{X} \cap \check{Y}\big) \notin \tau\big)\,,$$

因为 J 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个素理想. 综合起来, 我们知道模理想 I 彼此相互冲突的 I^+ 中的元素序列至多长度为某个小于 $|P|^+$ 的序数.

因为 I 是 $\mathfrak{P}(\kappa)$ 的一个 $|P|^+$-饱和的包括所有单点集的 κ-可加的素理想, κ 又是一个不可达基数 (根据 (a)), 根据练习 2.2, κ 是一个可测基数.

(e) 设 κ 是一个强基数, $\mathbb{P} \in \mathrm{V}_\kappa$. 我们来证明在 $\mathrm{V}[G]$ 中 κ 仍然是一个强基数.

设 $\lambda \geqslant \kappa$ 是一个基数. 令 $j : \mathrm{V} \prec M$ 为一个以 κ 为临界点并且 $\mathrm{V}_\lambda \subset M$ 的同质映射. 我们以 (d) 中的方式将 j 延拓成 $j^* : \mathrm{V}[G] \prec M[G]$. 那么 κ 还是 j^* 的临界点, $\mathrm{V}_\lambda[G] \subset M[G]$.

(f) 设 κ 是一个武丁基数, $\mathbb{P}\in V_\kappa$. 我们证明在 $V[G]$ 中 κ 仍然是一个武丁基数.

设 $f:\kappa\to\kappa$ 在 $V[G]$ 之中. 设 τ 是 f 的一个名字. 对于每一个 $\alpha<\kappa$, 令

$$A_\alpha=\{\beta<\kappa\mid \exists p\in P\ (p\Vdash(\check{\beta}=\tau(\check{\alpha})))\},$$

那么 $|A_\alpha|\leqslant|P|<\kappa$; 于是, 令 $g(\alpha)=\sup(A_\alpha)+1$. 令

$$C_g=\{\alpha<\kappa\mid \forall\beta<\alpha\ (g(\beta)<\alpha)\}.$$

那么 C_g 是 κ 的一个无界闭子集, 并且对于每一个 $\alpha\in C_g$ 而言, 在 $V[G]$ 之中都有

$$\forall\beta<\alpha\ (f(\beta)<\alpha).$$

由于 κ 是一个武丁基数, 令 $j:V\prec M$ 满足下述要求:

(i) $\alpha=\mathrm{Crit}(j)>|P|$, $\alpha\in C_g$;

(ii) $V_{j(g)(\alpha)}\subset M$.

我们以 (d) 中的方式将 j 延拓成 $j^*:V[G]\prec M[G]$. 那么 α 还是 j^* 的临界点, 以及

$$f[\alpha]\subset\alpha\ \wedge\ V_{j^*(f)(\alpha)}[G]\subset M[G].$$

(g) 的证明与 (e) 的证明完全相同.

(h) 和 (i) 设 κ 是一个强紧基数 (超紧基数), $\mathbb{P}\in V_\kappa$. 我们证明在 $V[G]$ 中 κ 仍然是一个强紧基数 (超紧基数).

令 $\lambda\geqslant\kappa$. 我们来证明在 $V[G]$ 中, 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上存在一个非平凡的 κ-完全的精良测度. 令 U 为 V 中在 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个非平凡的 κ-完全的精良测度 (正规测度), 令

$$j=j_U:V\prec M\cong \mathrm{ult}(V,U)$$

为由 U 所确定的超幂同质嵌入映射. 令 $\pi:\mathrm{ult}(V,U)\cong M$ 为传递化映射, $d:\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\to\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 为恒等映射, 以及 $\pi([d])=H\in M$. 那么对于 $X\subseteq\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$,

$$X\in U\leftrightarrow H\in j(X).$$

(练习: 验证这一事实.) 如果 U 是正规测度, 那么 $H=j[\lambda]$; 否则, $H\supset j[\lambda]$.

我们以 (d) 中的方式将 j 延拓成 $j^*:V[G]\prec M[G]$. 在 $V[G]$ 中, 我们如下定义 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的超滤子 W:

$$\forall X\subset\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)\ (X\in W\leftrightarrow H\in j^*(X)).$$

由于 j^* 是一个以 κ 为临界点的同质嵌入映射, 这样定义的 W 自然是一个非平凡的 κ-完全的超滤子. 它还是精良的: 设 $\alpha < \lambda$, 令

$$A = \{x \in \mathfrak{P}_\kappa(\lambda) \mid \alpha \in x\}.$$

因为 $j(\alpha) \in H$, 所以 $H \in j(A)$, 从而 $A \in W$. 当 $H = j[\lambda]$ 时, $H = j^*[\lambda]$, 所以此时 W 还是一个正规测度. □

2.2 莱维力迫扩张

在 2.1 节里, 定理 2.1 表明没有小型力迫构思会改变大基数的实质. 那么, 自然的问题产生了: 如果 κ 是一个不可达基数, 且 $\mathbb{P}$ 是一个势为 κ 的力迫构思, 情形将怎样? 最简单的答案自然是用有限条件将一个不可达基数化为一个可数序数. 这样的例子我们已经详细分析过了. 这里将展示另类例子: 一个不可达基数 κ 可以被一个势为 κ 的力迫构思改变成第一个不可数基数: 莱维减势[2].

下面我们引进莱维偏序集.

定义 2.1 (莱维偏序集) 设 κ 是一个不可达基数. 对于 $p \subset \kappa \times \omega \times \kappa$, 令

$$\begin{aligned}&p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \leftrightarrow \\ &|p| < \omega \wedge \mathrm{dom}(p) \subset \kappa \times \omega \wedge \mathrm{rng}(p) \subset \kappa \wedge (\forall (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha, n) \in \alpha)).\end{aligned}$$

对于 $p, q \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$, 令 $p \leqslant q \iff p \supseteq q$; 令 $\mathbf{1} = \varnothing$.

更一般地, 莱维偏序集有下述定义. 但是我们在这里的关注重点是上面的特殊情形, 因为这种特殊情形将是我们直接有用的. 我们将一般情形下的分析留给读者.

定义 2.2 设 λ 是一个正则基数. 设 κ 是一个不可达基数. 对于 $p \subset \kappa \times \lambda \times \kappa$, 令

$$\begin{aligned}&p \in \mathrm{Col}(\lambda, <\kappa) \leftrightarrow \\ &|p| < \lambda \wedge \mathrm{dom}(p) \subset \kappa \times \lambda \wedge \mathrm{rng}(p) \subset \kappa \wedge (\forall (\alpha, \xi) \in \mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha, \xi) \in \alpha)).\end{aligned}$$

对于 $p, q \in \mathrm{Col}(\lambda, <\kappa)$, 令 $p \leqslant q \iff p \supseteq q$; 令 $\mathbf{1} = \varnothing$.

引理 2.1 设 κ 是一个不可达基数. 那么 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 满足 κ-链条件.

证明 设 $\{p_\alpha \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \alpha < \kappa\}$ 为 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 中的 κ 个条件的单一列表. 我们来证明它们中间必定有两个不相等但相容的条件.

令

2 Azriel Lévy, Definability in axiom set theory. II. In "Logic, Methodology and Philosophy of Science" (Y. Bar-Hillel, ed.), Proc. 1964 Internat. Congr. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965, pp. 127-151.

$C = \{\gamma < \kappa \mid 0 < \gamma \wedge (\forall \beta < \gamma\, (\beta + 1 < \gamma)) \wedge (\forall \alpha < \gamma\, \forall (\beta, n) \in \mathrm{dom}\,(p_\alpha)\ (\beta < \gamma))\}$.

那么 C 是 κ 的一个无界闭子集.

对于每一个 $\alpha < \kappa$, 令

$$a_\alpha = \{(\beta, n) \in \mathrm{dom}\,(p_\alpha) \mid \beta < \alpha \wedge n < \omega\} \text{ 以及}$$
$$b_\alpha = \{(\beta, n) \in \mathrm{dom}\,(p_\alpha) \mid \beta \geqslant \alpha \wedge n < \omega\}.$$

对于 $\gamma \in C$, 令

$$g(\gamma) = \begin{cases} \max\{\beta \mid \exists n \in \omega\, (\beta, n) \in a_\gamma\} & \text{如果 } a_\gamma \neq \varnothing, \\ 0 & \text{如果 } a_\gamma = \varnothing. \end{cases}$$

令 $T \subseteq C$ 为一个荟萃子集以及 $\beta < \kappa$ 满足下列要求:

$$\forall \gamma \in T\, (g(\gamma) = \beta).$$

令 $\delta = \beta^+$. 那么 $\forall \gamma \in T\ \big(p_\gamma \restriction_{a_\gamma} \in \mathrm{Col}(\omega, < \delta)\big)$. 由于 $|\mathrm{Col}(\omega, < \delta)| = \delta$, 令 $p \in \mathrm{Col}(\omega, < \delta)$ 以及 $T_0 \subseteq T$ 为一个荟萃子集来见证如下事实:

$$\forall \gamma \in T_0\ \big(p_\gamma \restriction_{a_\gamma} = p\big).$$

于是, 对于 $\gamma \in T_0$ 和 $\eta \in T_0$, $(p_\gamma \cup p_\eta) \in \mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$. □

定理 2.2 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为一个可数传递模型, 并且 κ 是 M 中的一个不可达基数. 令

$$\mathbb{P} = (\mathrm{Col}(\omega, < \kappa), \leqslant, \mathbf{1})^M.$$

设 G 为 M 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 那么

(1) 在 $M[G]$ 中, κ 是第一个不可数基数;

(2) 如果 λ 是 M 中的一个满足 $\mathrm{cf}(\lambda) \geqslant \kappa$ 的基数, 那么在 $M[G]$ 中仍然有 $\mathrm{cf}(\lambda) \geqslant \kappa$.

证明 根据引理 2.1, $\mathbb{P}$ 在 M 中满足 κ-链条件, 根据引理 II.3.34, 在 M 基础上用 $\mathbb{P}$ 实施力迫扩张保持所有 $\geqslant \kappa$ 的梯度以及保持所有 $\geqslant \kappa$ 的基数.

另一方面, 如果 $\lambda < \kappa$ 是 M 中的一个不可数基数, 那么语句

$$\forall n \in \omega\, [f_\lambda(n) = \gamma \leftrightarrow \exists p \in G\, ((\lambda, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\lambda, n) = \gamma)]$$

就在 $M[G]$ 中定义了一个从 ω 到 λ 的满射 f_λ.

这是因为对于任意的 $\beta < \lambda$, 集合

$$D_\beta = \{p \in \mathrm{Col}(\omega, < \kappa) \mid \exists n \in \omega\, [(\lambda, n) \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\lambda, n) = \beta]\}$$

在 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 中是稠密的: 给定任意的 $q \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$, 不妨假设 $q \notin D_\beta$, 令

$$n = 1 + \max\{m < \omega \mid \exists \alpha < \kappa\, ((\alpha, m) \in \mathrm{dom}(q))\},$$

以及 $p = q \cup \{((\lambda, n), \beta)\}$. 那么, $p \in D_\beta$ 以及 $p \leqslant q$.

于是, 对于 $\beta < \lambda$, 令 $p \in G \cap D_\beta$, 令 $n < \omega$ 来见证 $p(\lambda, n) = \beta$, 那么 $f_\lambda(n) = \beta$. □

莱维减势力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 还有两个很重要的性质: 一个因子分解特性; 一个整齐特性. 这两个性质对这个扩张模型中的内模型 $L(\mathbb{R})$ 的分析很有用.

我们先来看看它的因子分解特性.

定理 2.3 (因子分解引理)　设 κ 是一个不可达基数, $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$. 设 G 是 V 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 如果 $X \in \mathrm{V}[G]$ 是一个可数的序数之集, 那么一定存在 $\mathrm{V}[X]$ 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子 H 来实现等式 $\mathrm{V}[X][H] = \mathrm{V}[G]$.

证明　设 $1 \leqslant \nu < \kappa$. 令

$$\begin{aligned} P_\nu &= \{p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \mathrm{dom}(p) \subset \nu \times \omega\} \wedge \\ P^\nu &= \{p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \mathrm{dom}(p) \subset (\kappa - \nu) \times \omega\}. \end{aligned}$$

那么 $P = \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 自然地分解成 $P_\nu \times P^\nu$, 因为

$$\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(p) \cap (\nu \times \omega) \cup \mathrm{dom}(p) \cap ((\kappa - \nu) \times \omega).$$

如果 $\omega \leqslant \nu$ 是一个基数, 那么

$$\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[G \cap P_{\nu+1}][G \cap P^{\nu+1}]$$

以及 $|P_{\nu+1}| = \nu$. 根据可数化唯一性引理 (引理 II.3.93),

$$\mathbb{B}\,(P_{\nu+1}) \cong \mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega, \nu)).$$

现在设 $X \in \mathrm{V}[G]$ 为一个可数的序数之集. 令 $\dot{X}$ 为 X 的一个 $\mathbb{P}$-名字. 令 $\dot{f}$ 为一个 $\mathbb{P}$-名字来见证

$$\mathbf{1} \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \xrightarrow{\text{满射}} \dot{X}.$$

对于每一个 $n \in \omega$, 取一个 $\mathbb{P}$ 的极大冲突子集 W_n 来确定 $\dot{f}$ 在 $\check{n}$ 处的取值. 根据 $\mathbb{P}$ 所满足的链条件, 不等式 $|W_n| < \kappa$ 对于所有的 $n < \omega$ 都成立. 据此, 令 $\nu < \kappa$ 为一个足够大的基数来保证所有的 $W_n \subset P_{\nu+1}$. 于是,

$$X \in \mathrm{V}\,[G \cap P_{\nu+1}]\,.$$

根据可数化完备布尔代数的自分裂引理 (推论 II.3.16), 令 $K \subset P_{\nu+1}$ 为 $\mathrm{V}[X]$ 之上的 $P_{\nu+1}$-泛型滤子来实现等式 $\mathrm{V}[G \cap P_{\nu+1}] = \mathrm{V}[X][K]$. 于是,

$$\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[X][K][G \cap P^{\nu+1}].$$

令 $H = K \times \left(G \cap P^{\nu+1}\right)$. 那么 H 是 $\mathrm{V}[X]$ 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 并且 $\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[X][H]$. □

定义 2.3 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思. P 的子集合 $E \subseteq P$ 是一个**拟稠密子集**当且仅当

$$(\forall q \in P\, \exists r \in E\, (q \not\perp r)).$$

作为例子, 每一个稠密子集都是拟稠密的; 每一个极大冲突子集也都是拟稠密的.

引理 2.2 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思, $E \subseteq P$. 那么下述三个命题等价:

(a) E 是拟稠密的;

(b) 集合 $\{q \in P \mid \exists p \in E\, (q \leqslant p)\}$ 是一个稠密子集;

(c) 集合 $\{q \in P \mid \exists p \in E\, (q \leqslant p)\}$ 是一个稠密开子集.

证明 (练习.) □

引理 2.3 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为一个可数传递模型, $\mathbb{P} \in M$ 为一个力迫构思. 设 $G \subset P$ 为一个滤子. 那么下述命题等价:

(a) G 是 M 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子;

(b) 如果 $D \in M$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密开子集, 那么 $G \cap D \neq \varnothing$;

(c) 如果 $D \in M$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个拟稠密子集, 那么 $G \cap D \neq \varnothing$;

(d) 如果 $D \in M$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个极大冲突子集, 那么 $G \cap D \neq \varnothing$.

证明 (练习.) □

定义 2.4 (弱整齐性) 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思. 令 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ 为偏序集 $\mathbb{P}$ 上的自同构群. 称 $\mathbb{P}$ 为一个**弱整齐**偏序集当且仅当对于任何一个条件 $p \in P$, 它在自同构群作用下的轨道

$$[p] = \{\sigma(p) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})\}$$

在偏序集 $\mathbb{P}$ 中是拟稠密的.

例 2.1 添加科恩实数的力迫构思 $\mathrm{Add}(\omega, \kappa)$ 是弱整齐偏序集.

我们对于弱整齐力迫构思的兴趣来源于它们所持有的黑白分明特性: 对于集合论纯语言的任何一个语句而言, 要么它在此弱整齐力迫构思的任何一个力迫扩张结构中一律为真, 要么它在此弱整齐力迫构思的任何一个力迫扩张结构中一律为假.

定理 2.4 (黑白分明律) 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为一个可数传递模型, $\mathbb{P} \in M$ 为一个力迫构思, 并且在 M 中 $\mathbb{P}$ 是弱整齐的. 设 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $(x_1, \cdots, x_n) \in M$. 那么

$$[\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]] \text{ 或者 } [\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P},M} (\neg\varphi)[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]].$$

证明 假设既非 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]$, 也非 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P},M} (\neg\varphi)[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]$. 那么根据引理 II.3.7 之 (5), 令 $p \in P$ 以及 $q \in P$ 分别满足要求:

$$[q \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]] \text{ 以及 } [p \Vdash_{\mathbb{P},M} (\neg\varphi)[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]].$$

固定一个自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ 来满足要求 $q \not\perp \sigma(p)$. 根据引理 II.3.51 之 (4) 的特殊情形, 因为 σ 是一个自同构, $\sigma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, 并且依据定义 II.3.29, 对于任何一个集合 $a \in M$ 都一定有

$$\sigma_*(\check{a}) = \left\{ \left(\sigma_*(\check{b}), \sigma(\mathbf{1})\right) \;\middle|\; b \in a \right\} = \check{a},$$

再加上 $p \Vdash (\neg\varphi)[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]$, 所以 $\sigma(p) \Vdash (\neg\varphi)[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]$. 根据引理 II.3.3 之 (2), 由此可见 $q \perp \sigma p$. 这便是一个矛盾. □

事实上, 莱维减势偏序具备更强的整齐性:

定义 2.5 (整齐性) (1) 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思. 令 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ 为偏序集 $\mathbb{P}$ 上的自同构群. 称 $\mathbb{P}$ 为一个**整齐**偏序集当且仅当对于任何两个条件 $p, q \in P$, 都存在一个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ 来满足等式 $\sigma(p) = q$.

(2) 设 $\mathbb{B}$ 是一个完备布尔代数. 令 $\mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ 为完备布尔代数 $\mathbb{B}$ 上的自同构群. 称 $\mathbb{B}$ 为一个**整齐**布尔代数当且仅当对于任何两个非零元 $u, v \in B^+$, 都存在一个 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{B})$ 来满足等式 $\sigma(u) = v$.

定理 2.5 (莱维减势延拓引理) 莱维减势力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 之完备化布尔代数 $\mathbb{B}_{<\kappa}$ 是一个整齐布尔代数. 事实上, 如果 $\mathbb{B}_0$ 和 $\mathbb{B}_1$ 是 $\mathbb{B}_{<\kappa}$ 的两个完备子代数, $|\mathbb{B}_0| = |\mathbb{B}_1| < |\mathbb{B}_{<\kappa}|$, 并且它们同构, π 是从 $\mathbb{B}_0$ 到 $\mathbb{B}_1$ 的一个同构映射, 那么 π 可以延拓成 $\mathbb{B}_{<\kappa}$ 的一个自同构映射, 即

$$\exists \sigma \in \mathrm{Aut}\left(\mathbb{B}_{<\kappa}\right) \forall b \in \mathbb{B}_0 \left(\sigma(b) = \pi(b)\right).$$

证明 同样地, 对于 $1 \leqslant \nu < \kappa$, 令

$$\begin{aligned} P_\nu &= \{p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \mathrm{dom}(p) \subset \nu \times \omega\} \wedge \\ P^\nu &= \{p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \mathrm{dom}(p) \subset (\kappa - \nu) \times \omega\}, \end{aligned}$$

以及令 $B_\nu = \mathbb{B}\left(P_\nu\right)$ 以及 $B^\nu = \mathbb{B}\left(P^\nu\right)$.

给定 $\pi_0 : B_0 \cong B_1$. 令 $A_0 = B_0$, $A_0' = B_1$. 令 $\nu_1 < \kappa$ 为一个足够大的基数以至于 $A_0' \subset B_{\nu_1}$. 令 $A_1' = B_{\nu_1}$. 根据协调性引理 (引理 II.3.94), 将完备嵌入映射 $\pi_0^{-1} : A_0' \to B = B_{<\kappa}$ 延拓成完备嵌入映射

$$\pi_1^{-1} : A_1' \to B.$$

令 $A_1 = \pi_1^{-1}[A_1']$. 取 $\nu_1 < \nu_2 < \kappa$ 足够大以至于 $A_1 \subset B_{\nu_2}$. 令 $A_2 = B_{\nu_2}$. 再根据协调性引理 (引理 II.3.94), 将完备嵌入映射 $\pi_1 : A_1 \to B$ 延拓成完备嵌入映射

$$\pi_2 : A_2 \to B,$$

并且令 $A_2' = \pi_2[A_2]$; 递归地, 当 $n = 2k$ 时, 令 $\nu_{n-1} < \nu_n < \kappa$ 为足够大的基数以至于

$$A_n' = \pi_n[A_n] \subset B_{\nu_n},$$

以及 $A_{n+1}' = B_{\nu_n}$, $\pi_n^{-1} \subset \pi_{n+1}^{-1} : A_{n+1}' \to B$; 当 $n = 2k+1$ 时, 令 $\nu_{n-1} < \nu_n < \kappa$ 为足够大的基数以至于

$$A_n = \pi_n[A_n'] \subset B_{\nu_n},$$

以及 $A_{n+1} = B_{\nu_n}$, $\pi_n \subset \pi_{n+1} : A_{n+1} \to B$. 如此往返推进, 我们就得到一个严格单调递增的完备布尔子代数以及完备嵌入序列

$$\langle (A_n, A_n', \pi_n, \nu_n, B_{\nu_n}) \mid \nu_0 = 0 \wedge n < \omega \rangle,$$

其中

$$B_{\nu_n} = \begin{cases} A_n \supset A_{n-1} & \text{如果 } \exists k\,(n = 2k), \\ A_n' \supset A_{n-1}' & \text{如果 } \exists k\,(n = 2k+1), \end{cases}$$

以及 $\pi_n \subset \pi_{n+1}$; $\pi_n : A_n \cong A_n'$.

令 $\nu = \sup\{\nu_n \mid n < \omega\}$, 以及

$$B_\nu' = \bigcup\{B_{\nu_n} \mid n < \omega\} = \bigcup\{A_n \mid n < \omega\} = \{A_n' \mid n < \omega\},$$

以及

$$\pi_\omega' = \bigcup\{\pi_n \mid n < \omega\}.$$

那么 π_ω' 是 B_ν' 的一个自同构. 这个自同构唯一地延拓成 B_ν 的自同构 π_ω.

此时, $B = B_\nu \oplus B^\nu$. B_ν 上的自同构 π_ω 由下述等式延拓成 B 的自同构 π:

$$\pi(u, v) = (\pi_\omega(u), v). \qquad \square$$

推论 2.1 (莱维减势之整齐性)　设 κ 是一个不可达基数. 如果 u, v 是 $\mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega, <\kappa))$ 中的两个既非 **0** 又非 **1** 的元素, 那么一定存在 $\mathbb{B}$ 的一个将 u 映射到 v 的自同构映射.

证明　给定 u 和 v. 令 A_0 和 A_0' 分别为由 $\{u\}$ 与 $\{v\}$ 所生成的完备布尔子代数, 以及 $\pi_0 : A_0 \cong A_0'$ 为由 $u \mapsto v$ 所诱导出来的同构映射. 再应用延拓引理 (定理 2.5) 就得到所要的推论. □

推论 2.2 (黑白分明律)　设 κ 是一个不可达基数. 设 $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega, <\kappa))$. 如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 个集合, 那么语句 $\varphi[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]$ 的布尔值 $\|\varphi[\check{x}_1, \cdots, \check{x}_n]\|_{\mathbb{B}}$ 或者为 **1**, 或者为 **0**.

证明　由上述推论 2.1 以及黑白分明律定理 (定理 2.4) 即得. □

2.3　普利克瑞力迫扩张

在力迫方法刚刚开始用于解决集合论和数学其他分支中的某些问题的独立性问题时, 常常是将保持基数与保持梯度统一起来讨论的. 一个自然的问题便是: 可否有保持所有的基数但改变某些梯度的力迫构思? 这个问题自然与奇异基数假设紧密关联, 因而也便相当有趣. 根据鄢森的覆盖引理, 要想实现这样一种可能, 集合论域中必然有 $0^\#$ 或者更强的大基数特性. 普利克瑞 (Karel Prikry) 找到了实现这种可能性的途径[3]. 我们这就来展示普利克瑞的力迫构思.

普利克瑞的力迫构思建筑在可测基数的正规超滤子之上. 因此, 我们需要假设可测基数存在. 设 κ 是一个可测基数, D 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子.

称 $s, t \in [\kappa]^{<\omega}$ **相冲突** $(s \perp t)$ 当且仅当 $\forall \alpha < \kappa\, (t \neq s \cap \alpha \wedge s \neq t \cap \alpha)$; s 与 t **可比较** $(s \leqslant t \vee t \leqslant s)$ 当且仅当 $\exists \alpha < \kappa\, (t = s \cap \alpha \vee s = t \cap \alpha)$.

定义 2.6　令 $P = \{(s, A) \mid s \in [\kappa]^{<\omega} \wedge A \in D\} = [\kappa]^{<\omega} \times D$. 定义 P 上的偏序 $\leqslant$ 如下: 对于 $(s, A) \in P$ 以及 $(t, B) \in P$, 令

$$(s, A) \leqslant (t, B) \leftrightarrow [(\exists \alpha < \kappa\, (t = s \cap \alpha)) \wedge A \subset B \wedge (s - t) \subset B].$$

关于普利克瑞力迫构思的链条件由下述简单事实给出.

事实 2.3.1　对于 $A, B \in D$, 以及 $s \in [\kappa]^{<\omega}$, 总有 $(s, A \cap B) \leqslant (s, A)$ 以及 $(s, A \cap B) \leqslant (s, B)$; 如果 $(s, A) \perp (t, B)$, 那一定是 s 与 t 相冲突. 因此, 力迫构思 $(P, <)$ 满足 κ^+-链条件.

普利克瑞力迫构思的核心内涵是下述判定引理:

3 Karel Prikry, Changing measurable into accessible cardinals. Dissertations Math. Rozprawy Mat., 68(1970), 55.

引理 2.4 设 σ 是力迫语言的一个语句. 那么一定存在一个 $A \in D$ 来判定此语句 σ, 即或者 $(\varnothing, A) \Vdash \sigma$, 或者 $(\varnothing, A) \Vdash (\neg\sigma)$.

证明 给定语句 σ, 令

$$T^{+} = \left\{ s \in [\kappa]^{<\omega} \;\middle|\; \exists B \in D\, ((s, B) \Vdash \sigma) \right\},$$

以及

$$T^{-} = \left\{ s \in [\kappa]^{<\omega} \;\middle|\; \exists B \in D\, ((s, B) \Vdash (\neg\sigma)) \right\},$$

再令 $T_0 = [\kappa]^{<\omega} - (T^{+} \cup T^{-})$. 这样, 我们得到一个划分, 将 $[\kappa]^{<\omega}$ 划分成三个互不相交的子集合. 根据定理 1.6, 令 $A \in D$ 为这一划分的整齐子集. 也就是说, 对于每一个自然数 n, 都有或者 $[A]^n \subset T^{+}$, 或者 $[A]^n \subset T^{-}$, 或者 $[A]^n \subset T_0$.

我们来验证: $(\varnothing, A) \Vdash \sigma$ 或者 $(\varnothing, A) \Vdash (\neg\sigma)$.

假设不然, 令 $(s, X) \Vdash \sigma$, $(t, Y) \Vdash (\neg\sigma)$, 并且 $(s, X) \leqslant (\varnothing, A)$, $(t, Y) \leqslant (\varnothing, A)$. 不失一般性, 可以假设 $|s| = |t| = n$. 因此, $s \in [A]^n, t \in [A]^n$. 由此, $s \in T^{+}$ 以及 $t \in T^{-}$. 这与 A 是整齐子集相矛盾. □

上述引理更一般的形式为:

引理 2.5 设 σ 是力迫语言的一个语句. 设 $(s_0, A_0) \in P$. 那么一定存在 A_0 的一个 $A \in D$ 来与 s_0 一起判定此语句 σ, 即或者 $(s_0, A) \Vdash \sigma$, 或者 $(s_0, A) \Vdash (\neg\sigma)$.

证明 令 $A_1 \subset A_0$ 满足 $A_1 \in D$, 并且 $\min(A_1) > \max(s_0)$. 然后用 $[A_1]^{<\omega}$ 在上面引理 2.4 的证明中取代 $[\kappa]^{<\omega}$, 用 s_0 取代 $\varnothing$, 再沿着整个证明的思路完成证明. □

在完成上面的判定引理之准备后, 我们可以来证明下述普利克瑞定理:

定理 2.6 设 κ 是一个可测基数. 设 D 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 为依据 D 由定义 2.6 所确定的偏序集合. 令 G 为 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 那么

(1) 如果 $\lambda > \kappa$ 在 V 中是一个基数, 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中它还是一个基数; 如果在 V 中 $\gamma = \mathrm{cf}\lambda > \kappa$, 那么 $\gamma = \mathrm{cf}^{\mathrm{V}[G]}(\lambda)$.

(2) $\mathrm{cf}^{\mathrm{V}[G]}(\kappa) = \omega$.

(3) 如果 $X \subset \alpha < \kappa$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 中的一个集合, 那么 $X \in \mathrm{V}_\kappa$.

证明 (1) 由 $\mathbb{P}$ 的 κ^{+}-链条件给出.

(2) 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 $X = \bigcup\{s \mid \exists A \in D\, [(s, A) \in G]\}$. 对于 $\alpha < \kappa$, 令

$$W_\alpha = \{(s, A) \in P \mid \alpha < \min A\}.$$

那么, W_α 在 $(P, \leqslant)$ 中是稠密的. 由此可知 $X \subset \kappa$ 是 κ 的一个无界子集. 对于 $(s, A) \in G$ 以及 $(t, B) \in G$, 我们总有 s 与 t 是可比较的. 从而, $\mathrm{ot}(X) = \omega$.

(3) 设 $\gamma < \kappa$. 令 $X \subseteq \gamma$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 中的一个集合. 我们来证明 $X \in \mathrm{V}$. 为此, 令 τ 为 X 的一个名字, 即 $X = \tau/G$. 令 $p_0 \in G$ 来见证不等式: $p_0 \Vdash \tau \subseteq \check{\gamma}$.

断言 $\forall p \leqslant p_0 \, \exists q \leqslant p \, \exists Z \subseteq \gamma \, (q \Vdash \tau = \check{Z})$.

设 $p \leqslant p_0$. 令 $p = (s, A)$. 对于每一个 $\alpha < \gamma$, 根据判定引理 (引理 2.5), 令 $A \supset A_\alpha \in D$ 与 s 一起判定语句 $\check{\alpha} \in \tau$. 令 $B = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} A_\alpha$. 那么 $B \in D$. 令 $q = (s, B)$. 那么 $q \leqslant p$, 并且对于每一个 $\alpha < \gamma$, q 都判定语句 $\check{\alpha} \in \tau$. 令

$$Z = \{\alpha < \gamma \mid (s, B) \Vdash \check{\alpha} \in \tau\}.$$

那么 $q \Vdash \check{Z} = \tau$. 断言于是得证.

根据断言, 令 $q \in G$ 以及 $Z \in \mathrm{V}_\kappa$ 来见证事实: $q \Vdash \check{Z} = \tau$. 我们得到: $X = \tau/G = Z$. □

设 κ 是一个可测基数. 设 D 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 为依据 D 由定义 2.6 所确定的偏序集合. 令 G 为 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令

$$X = \bigcup \{s \mid \exists A \in D \, [(s, A) \in G]\}.$$

那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, X 是一个序型为 ω 的在 κ 中无界的序列; 并且

$$\forall A \in D \, (|X - A| < \omega).$$

这是因为任给 $B \in D$, 任给 $(s, A) \in G$, 下述集合在 $(P, \leqslant)$ 中在 (s, A) 之下是稠密的:

$$\{(t, C) \in P \mid (t, C) \leqslant (s, A) \wedge C \subset B\}.$$

(对于 $(t, T) \leqslant (s, A)$, 令 $C = T \cap B$, (t, C) 就是上述集合中的元素.) 所以, 当 $\alpha \in X - (\max(s) + 1)$ 时,

$$(s, A) \Vdash \left(\check{\alpha} \in \check{B}\right).$$

基于 X 这样的性质, 称 X 为 κ 的一个**普利克瑞序列**. 事实上, X 的这种性质反过来确定 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子: 在 $\mathrm{V}[X]$ 中, 令

$$H = \{(s, A) \in P \mid ((\exists \alpha < \kappa \, (s = X \cap \alpha)) \wedge (X - s) \subset A)\}.$$

那么 H 是 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 这个结论由下述马萨斯 (Adrian R. D. Mathias) 定理给出.

定理 2.7 (Mathias) 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为一个传递内模型. 设 $D \in M$ 是 M 中 κ 上的非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令 $\mathbb{P} \in M$ 为依定义 2.6 在 M 中由 D 所定义的普利克瑞偏序集. 设 $X \subset \kappa$ 为一个序型为 ω 的子集合. 令

$$G(X) = \{(s, A) \in P \mid ((\exists \alpha < \kappa \, (s = X \cap \alpha)) \wedge (X - s) \subset A)\}.$$

那么 $G(X)$ 是 M 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子当且仅当 $\forall A \in D\,(|X - A| < \omega)$.

证明　设 $G(X)$ 是 M 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 设 $B \in D$. 在 M 中, 令

$$W(B) = \{(s, C) \in P \mid C \subset B\}.$$

那么 $W(B)$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密子集: 任给 $(t, A) \in P$, 必有 $(t, A \cap B) \in W(B)$. 因此, $G(X) \cap W(B) \neq \varnothing$. 令 $(s, C) \in G(X) \cap W(B)$. 那么 $(X - s) \subset C \subset B$. 因为 $X = (X - s) \cup s$, 所以, $X - B \subset s$.

现在假设 $\forall A \in D\,(|X - A| < \omega)$. 我们来证 $G(X)$ 是 M 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子.

设 $W \in M$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密开子集. 我们需要证明 $W \cap G(X) \neq \varnothing$.

在 M 中工作: 对于 $s \in [\kappa]^{<\omega}$, 以及 $t \in [\kappa]^{<\omega}$, 令

$$f_s(t) = 1 \leftrightarrow \max(s) < \min(t) \ \wedge\ \exists A \in D\,((s \cup t, A) \in W).$$

这样定义了一个函数 $f_s : [\kappa]^{<\omega} \to \{0, 1\}$; 根据定理 1.6, 令 $H_s \in D$ 为 f_s 的一个整齐子集; 如果

$$\exists B \in D\ ((s, B) \in W),$$

那么取一个这样的 B, 并且令 $B_s = B \cap H_s$; 如果 $\forall B \in D\ ((s, B) \notin W)$, 那么令 $B_s = H_s$. 令

$$A = \triangle_{s \in [\kappa]^{<\omega}} B_s = \left\{\alpha < \kappa \;\middle|\; \alpha \in \bigcap \{\, B_s \mid \max(s) < \alpha\}\right\}.$$

根据练习 1.5, $A \in D$. 由于 W 是一个稠密开子集, 我们有: 对于任意的 $s \in [\kappa]^{<\omega}$,

$$((\exists B \in D\ ((s, B) \in W)) \to (s, A - (\max(s) + 1)) \in W)\,.$$

根据对 X 的假设以及 $A \in D$, 令 $\alpha < \kappa$ 满足下述要求:

$$|X \cap \alpha| < \omega \ \wedge\ X - \alpha \subset A.$$

固定这样的最小的序数 α. 令 $s = X \cap \alpha$. 那么 $(X - s) \subset A$. 令 $A_1 = A - (\max(s) + 1)$. 考虑 (s, A_1). 因为 W 是稠密的, 令 $(t, C) \in W$ 满足 $(t, C) \leqslant (s, A_1)$. 那么 $(t - s) \in [A_1]^{<\omega}$, 并且 $\min(t - s) > \max(s)$. 令 $u \subset X - s$ 满足等式 $|u| = |t - s|$. 因为 $A_1 \subset H_s$, H_s 是 f_s 的整齐子集, 所以 $\exists T \in D\,((s \cup u, T) \in W)$. 于是,

$$(s \cup u, A - (\max(u) + 1)) \in W.$$

根据 $G(X)$ 的定义, $(s \cup u, A - (\max(u) + 1)) \in G(X)$. 这就表明: $G(X) \cap W \neq \varnothing$. □

应用上述普利克瑞序列的特性, 我们来看看迭代超幂所产生的由临界点所组成的无差别元序列 $\{\kappa_n \mid n < \omega\}$ 在第 ω 次迭代超幂上的作用.

回顾一下迭代超幂的基本内容: 设 M_0 是 ZFC 的传递模型, $\kappa_0 \in M_0$ 是 M_0 中的一个可测基数, U_0 是 M_0 中的在 κ_0 上的非平凡的 κ_0-完全的正规超滤子. 递归地, 我们定义 (M_0, U_0) 的迭代超幂: 给定 (M_α, U_α) 以及对于 $\beta < \alpha$, $j_{\beta,\alpha} : M_\beta \prec M_\alpha$, 在 M_α 上应用 U_α 计算 $\mathrm{ult}\,(M_\alpha, U_\alpha)$; 它是有秩的, 令 $M_{\alpha+1} \cong \mathrm{ult}\,(M_\alpha, U_\alpha)$ 以及 $j_{\alpha,\alpha+1} : M_\alpha \prec M_{\alpha+1}, j_{\beta,\alpha+1} = j_{\alpha,\alpha+1} \circ j_{\beta,\alpha}, \kappa_{\alpha+1} = j_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha), U_{\alpha+1} = j_{\alpha,\alpha+1}(U_\alpha)$. 当 α 是一个极限序数时, $\langle M_\alpha, j_{\beta,\alpha} \mid \beta < \alpha \rangle$ 是已有的定向系统序列

$$\langle M_\beta, j_{\beta,\gamma} \mid \beta < \gamma < \alpha \rangle$$

的定向极限. 超幂迭代模型序列

$$\langle M_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \rangle$$

是一个严格 $\supset$-单调递减的序列; 临界点序列

$$\langle \kappa_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Ord} \rangle$$

则是一个严格单调递增的连续序列. 我们在此关注 M_ω 以及 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$. 我们希望展示的是这个临界点序列恰恰是在 M_ω 中用 U_ω 所定义的普利克瑞力迫构思在 M_ω 之上的一个普利克瑞序列.

定理 2.8 令 $M = M_\omega$, $N = \bigcap_{n<\omega} M_n$. 令 $\mathbb{P} \in M$ 为在 M 中依 κ_ω 上的正规超滤子 U_ω 定义的普利克瑞力迫概念. 令 $X = \{\kappa_n \mid n < \omega\}$. 令

$$G(X) = \{(s, A) \in P \mid ((\exists \alpha < \kappa_\omega\ (s = X \cap \alpha)) \wedge (X - s) \subset A)\}.$$

那么, $G(X)$ 是 M 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 并且 $N = M[G(X)]$.

证明 根据引理 1.38, 我们有对于 $A \subseteq \kappa_\omega$, 如果 $A \in M = M_\omega$, 那么

$$A \in U_\omega \leftrightarrow \exists n < \omega\ (\kappa_n \in A).$$

根据定理 2.7, $G(X)$ 是 M 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子.

剩下的我们需要证明 $N = M[G(X)]$.

首先, 注意到 $N \models \mathrm{ZF}$; 其次, 对于 $n < \omega$, $M[G(X)] \subset M_n$, 因此, $M[G(X)] \subset N$.

为了证明 $N \subseteq M[G(X)]$, 我们证明 N 中的所有序数的集合都在 $M[G(X)]$ 之中. 根据练习 2.8, 这就足够了.

断言 $\forall \xi \in \mathrm{Ord}\, \exists m < \omega\, \forall n < \omega\ (m < n \to j_{n,\omega}(\xi) = j_{\omega,\omega+\omega}(\xi))$.

设 $\xi \in \mathrm{Ord}$. 因为 $\xi \in M_\omega$, 令 $n < \omega$ 满足要求: $\exists \xi_n \in M_n\ (\xi = j_{n,\omega}(\xi_n))$. 对于这样的 $n < \omega$,

$$M_n \models \xi\,\text{是}\,\xi_n\,\text{的从}\,M_n\,\text{到}\,M_\omega\,\text{迭代同质嵌入映射的像}.$$

应用同质嵌入映射 $j_{n,\omega}$, 我们有

$j_{n,\omega}(M_n)\models j_{n,\omega}(\xi)$ 是 $j_{n,\omega}(\xi_n)$ 的从 $j_{n,\omega}(M_n)$ 到 $j_{n,\omega}(M_\omega)$ 的迭代同质嵌入映射的像.

由于 $j_{n,\omega}(M_n)=M_\omega$, $j_{n,\omega}(M_\omega)=M_{\omega+\omega}$, 我们就得到

$$j_{n,\omega}(\xi) \text{ 是 } \xi \text{ 在映射 } j_{\omega,\omega+\omega} \text{ 下的像.}$$

断言得证.

设 $x\in N$ 是序数的一个集合. 于是, $\forall n<\omega\ (x\in M_n)$. 根据迭代超幂的表示定理, 对于每一个 $n<\omega$, 存在一个定义在 $[\kappa_0]^n$ 的函数 f_n 以至于

$$x=j_{0,n}(f_n)(\kappa_0,\cdots,\kappa_{n-1}).$$

因为对于 $i<n$, $j_{n,\omega}(\kappa_i)=\kappa_i$, 所以,

$$j_{n,\omega}(x)=j_{0,\omega}(f_n)(\kappa_0,\cdots,\kappa_{n-1}).$$

注意, 序列

$$\langle j_{0,\omega}(f_n)\mid n<\omega\rangle=j_{0,\omega}(\langle f_n\mid n<\omega\rangle)\in M_\omega.$$

因此

$$\langle j_{n,\omega}(x)\mid n<\omega\rangle\in M_\omega[\langle\kappa_n\mid n<\omega\rangle]=M[G(X)].$$

如果 ξ 是一个序数, 那么 $\xi\in x$ 当且仅当 $\forall n<\omega, j_{n,\omega}(\xi)\in j_{n,\omega}(x)$; 根据上面的断言,

$$\exists m<\omega\,\forall n<\omega\ (m<n\to j_{n,\omega}(\xi)=j_{\omega,\omega+\omega}(\xi)\in j_{n,\omega}(x)).$$

因为 $j_{\omega,\omega+\omega}$ 在 M 中是可定义的, 所以, x 在 $M[G(X)]$ 中是由序列

$$\langle j_{n,\omega}(x)\mid n<\omega\rangle$$

可定义的. 因此, $x\in M[G(X)]$. 这就表明 $N\subset M[G(X)]$. □

2.4　银杰力迫构思

从康托尔提出连续统假设开始, 明晰连续统函数的状态就一直是集合论的一大中心任务. 从康托尔不等式 (定理 I.1.4) 开始到柯尼希不等式 (定理 I.2.10) 结束, 在集合理论 ZFC 中能够确定的连续统函数的状态图就被完全勾画出来了. 借助于可构造集概念, 哥德尔建立了一般连续统假设的相对相容性 (定理); 应用力迫方法, 科恩建立了连续统假设的相对独立性; 进而伊斯顿表明在正则基数上除了遵守柯尼

希不等式之外没有任何其他规则可以约束连续统函数的任性; 这些之后连续统函数状态问题就只能局限到奇异基数之上. 关于奇异基数假设, 银杰首先明确持有不可数梯度的奇异基数不可能是第一个否定奇异基数假设的例子 (定理 I.2.38); 受此激励, 鄢森证明了他的覆盖引理 (定理), 从此奇异基数假设之否定就与大基数的存在性密切关联起来. 在这一节里, 我们将展示怎样从超紧基数出发, 获取持有可数梯度的奇异基数否定奇异基数假设的可能性. 建立这种可能性的过程将分为两个步骤: 第一部分是建立起连续统函数在可测基数之上跳过第一个可能的取值; 第二部分则是我们已经熟悉的普利克瑞力迫扩张, 将违背一般连续统假设的可测基数化为违背奇异基数假设的奇异基数. 因此, 这里我们的侧重点是第一步骤: 银杰力迫扩张.

银杰力迫扩张是一种类似于伊斯顿乘积的迭代力迫扩张. 因为要想在一个可测基数上破坏一般连续统假设, 就必须先在它的下面许多正则基数之上破坏一般连续统假设 (这是源自银杰定理 (定理 I.2.38) 的自然启示). 因此, 我们需要重新在技术上解决迭代力迫构造方法的实施问题. 此前, 在建立马丁公理的相对相容性时, 我们明确过有限支撑的迭代力迫构造, 也就是说, 我们在每一个极限步都采用 “正向极限” [4]技术. 现在我们将要使用的是正向极限技术与 “反向极限” [5]技术的混合. 实现这种混合技术的方法就是采用伊斯顿支撑, 如同构造伊斯顿乘积所采用的支撑那样.

迭代力迫

我们从迭代力迫构造的一般定义开始. 这是前面有限支撑迭代力迫构造的一般化.

定义 2.7 设 $\alpha \geqslant 1$ 为一个序数. 一个力迫构思 P_α 是一个**长度为 α 的迭代力迫构思**当且仅当 P_α 是一个具备下述特性的长度为 α 的序列的集合:

(a) 如果 $\alpha = 1$, 那么一定存在一个力迫构思 Q_0 以至于下述命题成立:

(i) $P_1 = \{\langle p(0)\rangle \mid p(0) \in Q_0\}$;

(ii) $\langle p(0)\rangle \leqslant_1 \langle q(0)\rangle \iff p(0) \leqslant_{Q_0} q(0)$.

(b) 如果 $\alpha = \beta + 1$, 那么

$$P_\beta = P_\alpha \restriction_\beta = \{p \restriction_\beta \mid p \in P_\alpha\}$$

是一个**长度为 β 的迭代力迫构思**, 并且存在一个用以标识力迫构思的 P_β-名字 $\dot{Q}_\beta \in V^{P_\beta}$ 以至于下述命题成立:

(i) $p \in P_\alpha \iff \left(p \restriction_\beta \in P_\beta \wedge \mathbf{1} \Vdash_{P_\beta} p(\beta) \in \dot{Q}_\beta\right)$;

4 Direct Limit.

5 Inverse Limit.

(ii) $p \leqslant_\alpha q \iff \big(p\restriction_\beta \leqslant_\beta q\restriction_\beta \wedge p\restriction_\beta \Vdash_{P_\beta} p(\beta) \leqslant q(\beta)\big)$.

(c) 如果 α 是一个极限序数, 那么对于每一个 $\beta < \alpha$ 都有

$$P_\beta = P_\alpha\restriction_\beta = \{p\restriction_\beta \mid p \in P_\alpha\}$$

是一个**长度为 β 的迭代力迫构思**, 并且

(i) 长度为 α 的常值序列 $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \cdots, \mathbf{1}, \cdots\rangle$ 在 P_α 之中;

(ii) 若 $p \in P_\alpha$, $\beta < \alpha$, 并且 $q \in P_\beta$ 满足不等式 $q \leqslant_\beta p\restriction_\beta$, 那么它们的**融合** $r = r(p, q)$ 一定在 P_α 之中, 其中它们的融合 $r = r(p, q)$ 定义如下: 对于 $\xi < \alpha$,

$$r(\xi) = \begin{cases} q(\xi) & \text{如果 } \xi < \beta, \\ p(\xi) & \text{如果 } \beta \leqslant \xi < \alpha; \end{cases}$$

(iii) $p \leqslant_\alpha q \iff \forall \beta < \alpha\ (p\restriction_\beta \leqslant_\beta q\restriction_\beta)$.

一如既往, 我们称 P_α 为依据序列 $\left\langle \dot{Q}_\beta \,\middle|\, \beta < \alpha \right\rangle$ 按照某种特定的求取极限的方式所确定的迭代力迫构思.

上述定义 (c) 中的 (ii) 是为了保障当 $P_\beta = P_\alpha\restriction_\beta$ 时必有 $\mathrm{V}^{P_\beta} \subset \mathrm{V}^{P_\alpha}$. 这个事实的验证我们留作练习 (见练习 2.9).

一般而言, 迭代力迫构思不仅依赖于每一个后继步上所采用的力迫构思, 还依赖于在极限步时所采用的求得极限的方式. 我们比较关注的是下述两种求极限的方式: 正向极限与反向极限.

定义 2.8 设 P_α 是一个长度为极限序数 α 的迭代力迫.

(1) P_α 是一个**正向极限**迭代力迫当且仅当对于任意一个长度为 α 的序列 p 一定有

$$p \in P_\alpha \iff \exists \beta < \alpha\ (p\restriction_\beta \in P_\beta \wedge (\forall \xi < \alpha\, (\beta \leqslant \xi \to p(\xi) = \mathbf{1})))\,.$$

(2) P_α 是一个**反向极限**迭代力迫当且仅当对于任意一个长度为 α 的序列 p 一定有

$$p \in P_\alpha \iff \forall \beta < \alpha\ (p\restriction_\beta \in P_\beta)\,.$$

由定义可见, 正向极限事实上是一种 “平坦极限”, 任何元素都在某一点之后变得平坦起来; 反向极限则是一种 “极端极限”, 囊括所有可能的序列, 或者说直取整个无穷乘积.

在实际迭代力迫构造的运用之中, 常常是将这两种求取极限的方式以某种确定一致的方式混合起来. 区分这些混合方式的一种作法就是采用不同的 “支撑” 集合. 前面我们见过的有限支撑迭代事实上就是在所有的极限步都采用单一的正向极限方式. 一般而言, 何谓支撑?

定义 2.9　设 I 是 α 上的一个理想, 并且 $[\alpha]^{<\omega} \subset I$. 对于一个迭代力迫 P_α 而言,

(1) 它的元素 $p \in P_\alpha$ 的**支撑**, 记成 $\mathrm{spt}(p)$, 就定义为

$$\mathrm{spt}(p) = \{\beta < \alpha \mid (\mathbf{1} \nVdash_\beta p(\beta) = \mathbf{1})\}.$$

(2) P_α 是一个**以 I-支撑的迭代力迫**当且仅当

$$\forall\gamma \leqslant \alpha\ (\gamma\text{是极限序数} \to \forall p\ (p \in P_\gamma \iff (\mathrm{spt}(p) \in I \wedge \forall\beta < \gamma\, p\restriction_\beta \in P_\beta))).$$

(3) P_α 是一个**可数支撑迭代力迫**当且仅当 P_α 是一个以 $[\alpha]^{<\aleph_1}$-为支撑的迭代力迫.

事实 2.4.1　(1) 迭代力迫 P_α 是一个有限支撑迭代力迫当且仅当 P_α 是一个以 $[\alpha]^{<\omega}$-支撑的迭代力迫, 当且仅当对于每一个极限序数 $\gamma \leqslant \alpha$ 而言, P_γ 都是一个正向极限.

(2) 迭代力迫 P_α 是一个可数支撑迭代力迫当且仅当对于每一个极限序数 $\gamma \leqslant \alpha$ 而言, 如果 $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$, 那么 P_γ 是一个正向极限; 如果 $\mathrm{cf}(\gamma) = \omega$, 那么 P_γ 是一个反向极限.

我们将在下一节应用可数支撑迭代力迫. 但是在这一节, 我们所应用的是伊斯顿支撑迭代力迫.

定义 2.10　设 $\alpha \geqslant 1$ 为一个序数, P_α 是一个长度为 α 的迭代力迫. P_α 是一个**伊斯顿支撑力迫**当且仅当对于每一个 $p \in P_\alpha$ 和每一个小于等于 α 的正则基数 γ 而言, 都有 $|\mathrm{spt}(p) \cap \gamma| < \gamma$.

注意, 对于序数 α, 令

$$I_{est} = \{X \subset \alpha \mid \forall\gamma \leqslant \alpha\, (\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma \to |X \cap \gamma| < \gamma)\}.$$

那么 I 是 α 上的理想, 并且 $[\alpha]^{<\omega} \subset I$. 于是, 伊斯顿支撑就是 I_{est}-支撑.

事实 2.4.2　P_α 是一个伊斯顿支撑力迫当且仅当对于每一个极限序数 $\gamma \leqslant \alpha$ 来说, 如果 $\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$, 那么 P_γ 是正向极限; 如果 $\mathrm{cf}(\gamma) < \gamma$, 那么 P_γ 是反向极限.

当两种极限方式混合运用时, 我们有下述链条件定理:

定理 2.9　设 κ 是一个不可数的正则基数. 设 α 是一个极限序数. 设 P_α 是一个长度为 α 的迭代力迫构思. 假设 P_α 是一个正向极限, 并且假设

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa \to (\{\beta < \alpha \mid P_\beta\text{是正向极限}\}\text{在}\,\alpha\,\text{是一荟萃子集}).$$

如果对于每一个 $\beta < \alpha$ 而言, $P_\beta = P_\alpha\restriction_\beta$ 都满足 κ-链条件, 那么 P_α 也满足 κ-链条件.

证明 (练习. 可参照有限支撑迭代力迫的链条件定理的证明. 唯一的差别是当 $\mathrm{cf}(\alpha)=\kappa$ 时该怎样处理.) □

我们后面的应用中需要一种更强的封闭性:

定义 2.11 设 $(P,<)$ 是一个力迫构思. 称 $(P,<)$ 为 λ-**定向完全**的当且仅当对于任意一个 $D\subset P$, 如果

$$|D|\leqslant\lambda\ \wedge\ \forall p_1\in D\,\forall p_2\in D\,\exists q\in D\ (q\leqslant p_1\ \wedge\ q\leqslant p_2)$$

(此时称 D 是**一定向子集**), 那么 $\exists p\in P\ \forall d\in D\ (p\leqslant d)$ (此时称 D **有下界**). 所以定向封闭就是指每一个定向子集都有一个下界.

引理 2.6 (a) 如果 P 是 λ-定向完全的, $\mathbf{1}\Vdash_P\dot{Q}$ 是 $\check{\lambda}$-定向完全的, 那么 $P*\dot{Q}$ 也是 λ-定向完全的.

(b) 设 $\mathrm{cf}(\alpha)>\lambda$, P_α 是一个正向极限, 并且对于每一个 $\beta<\alpha$, P_β 都是 λ-定向完全的. 那么 P_α 也是 λ-定向完全的.

(c) 设 P_α 是序列 $\left\langle\dot{Q}_\beta\ \middle|\ \beta<\alpha\right\rangle$ 的迭代结果, 并且对于每一个极限序数 $\beta\leqslant\alpha$, P_β 或者是正向极限, 或者是反向极限. 假设对于 $\beta<\alpha$ 而言, $\dot{Q}_\beta$ 在 V^{P_β} 中是 λ-定向封闭的. 如果对于任何梯度不超过 λ 的极限序数 $\beta\leqslant\alpha$ 而言, P_β 都是反向极限, 那么 P_α 一定也是 λ-定向封闭的.

证明 (a) 设 $D=\{(p_\alpha,\dot{q}_\alpha)\mid\alpha<\lambda\}$ 为 $P*\dot{Q}$ 的一个定向子集合. 令

$$D_1=\{p_\alpha\mid\alpha<\lambda\}.$$

那么 D_1 在 P 中是一个定向子集. 根据 P 的定向完全性, D_1 有一个下界 $p\in P$. 由于 D 是定向的, 对于任意的 $\alpha,\beta<\lambda$, 都有 $\gamma<\lambda$ 来见证不等式:

$$(p_\gamma,\dot{q}_\gamma)\leqslant(p_\alpha,\dot{q}_\alpha)\ \wedge\ (p_\gamma,\dot{q}_\gamma)\leqslant(p_\beta,\dot{q}_\beta).$$

于是, $p\Vdash_P(\dot{q}_\gamma\leqslant\dot{q}_\alpha\ \wedge\ \dot{q}_\gamma\leqslant\dot{q}_\beta)$. 由此,

$$p\Vdash_P\{\dot{q}_\alpha\mid\alpha<\lambda\}\text{ 是 }\dot{Q}\text{ 的一个定向子集.}$$

根据假设, $p\Vdash_P\exists q\in\dot{Q}\,\forall\alpha<\check{\lambda}\ (q\leqslant\dot{q}_\alpha)$. 取一个名字 $\dot{q}\in\mathrm{V}^{\mathbb{B}P}$ 来满足下述等式与关系式:

$$\left\|\dot{q}\in\dot{Q}\right\|=\mathbf{1}\ \wedge\ p\Vdash_P\forall\alpha<\check{\lambda}\ (q\leqslant\dot{q}_\alpha).$$

因此, $\forall\alpha<\lambda\ ((p,\dot{q})\leqslant(p_\alpha,\dot{q}_\alpha))$.

(b) 设 $D\subset P$ 为一个势不超过 λ 的定向子集. 对于 $d\in D$, 令 $\gamma_d<\alpha$ 见证 d 从 γ_d 开始的末端平坦, 即

$$\forall\xi<\alpha\ (\gamma_d\leqslant\xi\to d(\xi)=\mathbf{1}).$$

由于 $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$, 存在 D 中所有元素的一个公共平坦末端起点 $\gamma < \alpha$:

$$\forall d \in D\, \forall \xi < \alpha\, (\gamma \leqslant \xi \to d(\xi) = \mathbf{1}).$$

固定这样一个 $\gamma < \alpha$. 令

$$D_\gamma = \{ d \restriction_\gamma \mid d \in D \}.$$

那么 D_γ 是 P_γ 的一个势不超过 λ 的定向子集, 从而 D_γ 在 P_γ 中有一个下界 $p \in P_\gamma$. 将此 p 从 γ 开始的平坦末端延伸到长度为 α, 得到一 $p^* \in P_\alpha$. 此 p^* 就是 D 的一个下界.

(c) 对 α 施归纳. 由 (a) 和 (b), 当 α 是一个后继序数, 或者当 P_α 是一个正向极限时, 结论成立. 因此, 我们假设 α 是一个极限序数, 并且 P_α 是一个反向极限.

设 $D = \{p^\nu \mid \nu < \lambda\}$ 为 P_α 的一个定向子集; 并且对于每一个 $\nu < \alpha$,

$$p^\nu = \left\langle p^\nu_\beta \mid \beta < \alpha \right\rangle.$$

我们递归地定义 p_β 来构造 D 的一个下界函数 $p = \langle p_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in P_\alpha$. 我们需要的是对于每一个 $\beta < \alpha$, $p \restriction_\beta \in P_\beta$ 并且它是 $\langle p^\nu \restriction_\beta \mid \nu < \lambda\rangle$ 的下界.

给定 $p \restriction_\beta$, 令 p_β 满足下述要求:

$$p \restriction_\beta \Vdash_\beta \forall \nu < \check{\lambda}\ \left(p_\beta \leqslant p^\nu_\beta\right),$$

并且, 如果 $\forall \nu < \lambda\ \left(p^\nu_\beta = \mathbf{1}\right)$, 我们也令 $p_\beta = \mathbf{1}$.

设 $\gamma \leqslant \alpha$ 是一个极限序数. 我们需要验证序列 $\langle p_\beta \mid \beta < \gamma\rangle \in P_\gamma$. 如果 P_γ 是反向极限, 自然成立. 故假设 P_γ 是正向极限. 根据给定条件, $\mathrm{cf}(\gamma) > \lambda$. 于是,

$$\exists \delta < \gamma\, \forall \beta < \gamma\, \forall \nu < \lambda\ \left(\beta \geqslant \delta \to p^\nu_\beta = \mathbf{1}\right).$$

取这样一个 $\delta < \gamma$. 我们便有: $\forall \beta < \gamma\ (\beta \geqslant \delta \to p_\beta = \mathbf{1})$. 因此,

$$\langle p_\beta \mid \beta < \gamma\rangle \in P_\gamma.$$

这样, $p = \langle p_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in P_\alpha$.

依据我们的构造就有: $\forall \nu < \lambda\ (p \leqslant p^\nu)$. □

迭代力迫构思很多时候也具备因式分解律, 或者是结合律, 就如同迭代超幂具有结合律那样. 下面的引理对伊斯顿支撑迭代力迫构思适用.

引理 2.7 (分解引理) 设 $P_{\alpha+\beta}$ 为依据序列 $\left\langle \dot{Q}_\xi \,\middle|\, \xi < \alpha + \beta \right\rangle$ 所得到的迭代力迫构思, 并且对于每一个极限序数 $\xi \leqslant \alpha + \beta$, P_ξ 或者是正向极限, 或者是反向极限. 在 V^{P_α} 中, 设 $\dot{P}^{(\alpha)}_\beta$ 为依据序列 $\left\langle \dot{Q}_{\alpha+\xi} \,\middle|\, \xi < \beta \right\rangle$ 所得到的迭代力迫构思, 并且

对于每一个极限序数 $\xi \leqslant \beta$, $P_{\xi}^{(\alpha)}$ 或者是正向极限, 或者是反向极限, 并且所取极限性质与 $P_{\alpha+\xi}$ 完全一致. 如果对于每一个满足不等式 $\xi \leqslant \beta$ 和 $\mathrm{cf}(\xi) \leqslant |P_{\alpha}|$ 的极限序数 ξ 都有 $P_{\alpha+\xi}$ 就是反向极限, 那么

$$P_{\alpha+\beta} \cong P_{\alpha} * \dot{P}_{\beta}^{(\alpha)}.$$

适当修改引理的表述是必要的: 名字 $\dot{Q}_{\alpha+\xi}$ 是 $\mathrm{V}^{P_{\alpha+\xi}}$ 中的元素, 而 $P_{\xi}^{(\alpha)}$ 是 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 中的迭代力迫概念, 从而, 在第 ξ 步时, 用到的应当是一个在 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 中的对于 $\dot{Q}_{\xi}^{(\alpha)} \in \mathrm{V}^{P_{\xi}^{(\alpha)}}$ 的命名. 但是, 分解引理正好为我们实现一种等同的理由: 对于每一个 ξ, 分解引理为我们提供了一个在 $\mathrm{V}^{P_{\alpha+\xi}}$ 与 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 中的布尔值模型 $\mathrm{V}^{\dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}}$ 之间的同构; 因此, 我们可以将 $\dot{Q}_{\alpha+\xi}$ 与对某个 $\dot{Q}_{\xi}^{(\alpha)} \in \mathrm{V}^{\dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}}$ 命名的 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$-名字等同起来.

证明 对 β 施归纳. 设 β 是一个序数. 我们将构造 $P_{\alpha+\beta}$ 与 $P_{\alpha} * \dot{P}_{\beta}^{(\alpha)}$ 之间的同构 π.

当 $\beta = 0$ 时, $P_{\alpha} * \dot{P}_{0}^{(\alpha)} = \{(p, \mathbf{1}) \mid p \in P_{\alpha}\}$. 定义 $\pi(p, \mathbf{1}) = p$.

设 $\beta > 0$. 迭代力迫 $P_{\alpha} * \dot{P}_{\beta}^{(\alpha)}$ 中的元素通常都具备如下形式: $(p, \dot{q})$, 其中, $p \in P$, $\dot{q}$ 是 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 中的元素, 并且在 $\mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 中, $\dot{q}$ 是一个 β-序列, 以及满足迭代力迫构思的其他要求, 其中之一表明: 对于 $\xi < \beta$, $\dot{q} \upharpoonright_{\xi}$ 在 $\dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}$ 之中, 以及 $\dot{q}$ 的第 ξ 项在 $\dot{Q}_{\alpha+\xi}$ 之中.

我们来定义一个长度为 β 的序列 $\langle p_{\alpha+\xi} \mid \xi < \beta \rangle$, 以及令

$$\pi(p, \dot{q}) = p + \langle p_{\alpha}, p_{\alpha+1}, \cdots, p_{\alpha+\xi}, \cdots \rangle,$$

以至于这样确定的映射 π 将是从 $P_{\alpha} * \dot{P}_{\beta}^{(\alpha)}$ 到 $P_{\alpha+\beta}$ 的同构映射.

对于 $\xi < \beta$, 令 $\dot{q}_{\xi} \in \mathrm{V}^{P_{\alpha}}$ 以至于 $\dot{q}_{\xi}$ 是 $\dot{q}$ 的第 ξ 项. 从而

$$\mathbf{1} \Vdash_{P_{\alpha}} \left(\mathbf{1} \Vdash_{\dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}} \dot{q}_{\xi} \in \dot{Q}_{\alpha+\xi} \right).$$

根据归纳假设, $P_{\alpha+\xi} \cong P_{\alpha} * \dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}$. 令

$$\pi_{\xi} : \left(\mathrm{V}^{P_{\alpha}}\right)^{\dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}} = \mathrm{V}^{P_{\alpha} * \dot{P}_{\xi}^{(\alpha)}} \cong \mathrm{V}^{P_{\alpha+\xi}}.$$

令 $\mathrm{V}^{P_{\alpha+\xi}} \ni p_{\alpha+\xi} = \pi_{\xi}(\dot{q}_{\xi})$.

然后, 令 $\pi(p, \dot{q}) = p + \langle p_{\alpha}, p_{\alpha+1}, \cdots, p_{\alpha+\xi}, \cdots \rangle$.

我们来验证 $\pi : P_{\alpha} * \dot{P}_{\beta}^{(\alpha)} \cong P_{\alpha+\beta}$.

首先, $\pi(p, \dot{q}) \in P_{\alpha+\beta}$. 为此, 我们验证:

$$\forall \gamma \leqslant \beta \; (p + \langle p_{\alpha+\xi} \mid \xi < \gamma \rangle \in P_{\alpha+\gamma}).$$

设 $\gamma \leqslant \beta$ 是一个极限序数, 并且 $P_{\alpha+\gamma}$ 是正向极限. 在 V^{P_α} 中, $\dot{p}_\gamma^{(\alpha)}$ 是一个正向极限. 因此,

$$\mathbf{1} \Vdash_{P_\alpha} \exists \xi_0 < \gamma \text{ 自 } \xi_0 \text{ 起 } \dot{q} \text{ 是末端平坦的.}$$

根据我们的假设, 此时必有 $\mathrm{cf}(\gamma) > |P_\alpha|$. 这样, 根据链条件以及可能取值的范围考量, 可以找到一个 $\xi_0 < \gamma$ 以至于

$$\forall \xi \geqslant \xi_0 \ \mathbf{1} \Vdash_{P_\alpha} \text{ 自 } \xi_0 \text{ 起 } \dot{q} \text{ 是末端平坦的.}$$

由此, $\forall \xi \geqslant \xi_0 \ \mathbf{1} \Vdash_{P_{\alpha+\xi}} p_{\alpha+\xi} = \mathbf{1}$. 于是, 自 ξ_0 起, $p_{\alpha+\xi} = \mathbf{1}$. 这就表明:

$$\pi(p, \dot{q}) \in P_{\alpha+\beta}.$$

其次,

$$(p, \dot{q}) \leqslant (p', \dot{q}') \iff \pi(p, \dot{q}) \leqslant \pi(p', \dot{q}').$$

我们将这个事实的验证留给读者. □

在完成上述技术准备之后, 我们可以来证明银杰定理: 对一个超紧基数添加足够多的子集, 但保持其可测基数特性.

定理 2.10 (Silver) *如果 κ 是一个 κ^{++}-超紧基数, 那么存在一个力迫构思 $\mathbb{P}$ 来实现下述愿望: 令 G 为 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 在 $V[G]$ 中, κ 是一个可测基数, 并且 $2^\kappa = \kappa^{++}$.*

证明 设 κ 是一个超紧基数, 并且假设 $2^\kappa = \kappa^+$.

从这里出发, 我们应用伊斯顿支撑迭代力迫, 逐步对不超过 κ 的每一个不可达基数 α 添加 α^{++} 个子集合, 从而迫使不等式 $2^\alpha \geqslant \alpha^{++}$ 在力迫扩张中成立.

整个迭代力迫构思的构造过程是一个递归构造过程: 对于每一个序数 $\alpha \leqslant \kappa + 1$, 如果 α 是一个极限序数, 当它是正则基数时, 在已有的基础之上, 我们以求正向极限的方式确定 P_α; 否则, 我们则以求反向极限的方式确定 P_α; 如果 $\alpha = \beta + 1$ 是一个后继序数, 那么在第 β 步的基础之上, 利用 P_β 和 $V^{\mathbb{B}(P_\beta)}$ 中的 $\dot{Q}_\beta$, 计算出 $P_\alpha = P_\beta * \dot{Q}_\beta$; 在完成第 α 个力迫构思 P_α 之定义后, 我们利用与它相应的力迫关系 $\Vdash_\alpha$、它的完备化布尔代数 $\mathbb{B}_\alpha = \mathbb{B}(P_\alpha)$, 以及 α 的特性, 来确定一个 $\mathbb{B}_\alpha$-值力迫概念 $\dot{Q}_\alpha$.

具体而言, 我们遵循下述构造规则:

(a) P_α 是按照下述筛选方式所确定的长度为 α 的序列 $p = \langle p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ 的集合:

(i) $\forall \gamma < \alpha \left(p \restriction_\gamma \in P_\gamma \wedge \mathbf{1} \Vdash_\gamma p_\gamma \in \dot{Q}_\gamma \right)$;

(ii) 若 α 是一个正则基数, 则 $\exists \xi_0 \forall \xi < \alpha \ (\xi_0 \leqslant \xi \to p_\xi = \mathbf{1})$.

(b) 对于 $p, q \in P_\alpha$, 令 $p \leqslant_\alpha q$ 当且仅当

$$\forall \gamma < \alpha \left(p\restriction_\gamma \leqslant_\gamma q\restriction_\gamma \wedge p\restriction_\gamma \Vdash_\gamma (p_\gamma \leqslant_\gamma q_\gamma) \right).$$

(c) 如果 α 不是一个不可达基数, 那么令 $\dot{Q}_\alpha = \{\mathbf{1}\}$; 如果 α 是一个不可达基数, 令 $\dot{Q}_\alpha$ 为 V^{P_α} 中的以下述方式给 α 添加 α^{++} 个子集的力迫构思, 即在 V^{P_α} 中, $\dot{Q}_\alpha$ 是下述偏序集合的名字:

$$Q_\alpha = \left\{ f : \mathrm{dom}(f) \to \{0,1\} \;\middle|\; \mathrm{dom}(f) \in \left[\alpha \times \alpha^{++}\right]^{<\alpha} \right\},$$

以及

$$\forall f \in Q_\alpha \, \forall g \in Q_\alpha \, (f \leqslant_\alpha g \leftrightarrow f \supset g).$$

最后, 令 $P = P_{\kappa+1}$ 以及 $\mathbb{B} = \mathbb{B}(P)$.

由上述递归定义, 欲得非平凡的力迫构思 $P_{\kappa+1}$, 我们只需要 κ 是第 κ 个不可达基数. 可见求得所要结果的关键是证明这样得到的 $P_{\kappa+1}$ 能够实现我们的愿望.

现在应用 κ 是一个超紧基数的假设来证明以上述方式确定的迭代力迫构思 $P = P_{\kappa+1}$ 成功实现我们的既定目标.

设 G 是 V 之上的 P-泛型滤子. 设 $\mathrm{V}[G]$ 为 V 的经 G 所确定的力迫扩张. 我们现在的任务是证明在 $\mathrm{V}[G]$ 之中, κ 仍旧是一个可测基数, 并且 $2^\kappa = \kappa^{++}$.

由于 $P = P_{\kappa+1} \cong P_\kappa * \dot{Q}_\kappa$, 令 G_κ 为 V 之上的 P_κ-泛型滤子, 以及令 H_κ 为 $\mathrm{V}[G_\kappa]$ 之上的 Q_κ-泛型滤子, 其中, $Q_\kappa = \dot{Q}_\kappa / G_\kappa$, 我们就有

$$\mathrm{V}[G] = \mathrm{V}[G_\kappa][H_\kappa].$$

令 $T = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ 是一个不可达基数}\}$. 那么 T 是 κ 的一个荟萃子集. 于是, 对每一个 $\alpha \in T \cup \{\kappa\}$, P_α 都是 $\langle P_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ 的正向极限. 因此,

$$\forall \alpha < \kappa \, (|P_\alpha| < \kappa).$$

根据这些基本事实, 应用定理 2.9, P_κ 满足 κ-链条件. 由此, κ 在 $\mathrm{V}[G_\kappa]$ 中仍然是一个正则基数. 由等式 $|P_\kappa| = \kappa$, 我们知道

$$\mathrm{V}[G_\kappa] \models \forall \alpha < \kappa \left(2^{|\alpha|} \leqslant \kappa \right).$$

由于在 $\mathrm{V}[G_\kappa]$ 中, Q_κ 是一个为 κ 添加 κ^{++} 个子集合的标准偏序集, 并且这个偏序集还保持所有的基数, 我们得到

$$\mathrm{V}[G_\kappa][H_\kappa] \models \left(\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa \wedge 2^\kappa = \kappa^{++} \right).$$

(注意, 到此为止, 我们仅仅知道在 $\mathrm{V}[G]$ 中 κ 是一个正则基数, 甚至不知道它是否还是一个极限基数.)

剩下的工作是证明在 $\mathrm{V}[G]$ 中, κ 是一个可测基数. 为此, 我们将先以某种方式得到一个 $\mathrm{V}[G]$ 的同质嵌入映射, 然后利用它得到一个 κ 上的在 $\mathrm{V}[G]$ 中的正规测度.

令 $\lambda = \kappa^{++}$. 根据给定条件, κ 是一个 λ-超紧基数. 令 $j : \mathrm{V} \prec M$ 为一个具备下述特点的同质嵌入映射:

(a) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $j(\kappa) > \lambda$;

(b) $M^{\lambda} \subset M$.

根据等式 $|P| = \lambda$ 以及条件 $M^{\lambda} \subset M$, 我们知道 $P \in M$, 并且在 M 中 P 是以同样方式定义出来的. 不仅如此, 由于 $\mathfrak{P}(P)^{\mathrm{V}} = \mathfrak{P}(P)^{M}$, G 也是 M 之上的 P-泛型滤子. 于是, 我们自然可以考虑 $M[G]$.

我们来看看 $j(P) \in M$. 在 M 中, $j(P)$ 是一个和 P 的定义完全一样的迭代力迫构思, 只不过长度是 $j(\kappa)+1$. 对于 $\gamma<\kappa$, 我们自然有 $j(P)_{\gamma} = P_{\gamma}$. 因为 $j(P)_{\kappa}$ 是 $j(P)\restriction_{\kappa}$ 的正向极限, 所以 $j(P)_{\kappa} = P_{\kappa}$. 又因为 $\dot{Q}_{\kappa}$ 在 $\mathrm{V}^{P_{\kappa}}$ 与 $M^{P_{\kappa}}$ 中是同一的, 所以, $j(P)_{\kappa+1} = P_{\kappa+1} = P$. 在 M 中, 在 $j(P)$ 的定义中, 在 κ 之后的第一个正向极限是在 (M 中的) 比 κ 大的第一个不可达基数 (从而远远大于 $\lambda = |P_{\kappa+1}|$) 那里, 并且自那开始, 所有的求正向极限之事都只在 M 中的不可达基数之处才发生. 因此, 对于 $j(P)$ 而言, 当 $\alpha = \kappa+1$, 以及 β 满足等式 $j(\kappa)+1 = \alpha+\beta$ 时, 迭代力迫的分解引理 (引理 2.7) 中的条件在 M 中成立. 于是, 可以在 M 中在 $\alpha = \kappa+1$ 这个节骨眼上应用该分解引理. 根据迭代力迫的分解引理 (引理 2.7), 我们得到

$$j(P) = j(P)_{\kappa+1} * (j(P))_{\beta}^{(\kappa+1)} = P * \dot{Q},$$

其中, $\dot{Q} = (j(P))_{\beta}^{(\kappa+1)}$. 根据分解引理的结论, $\dot{Q} \in M^{P}$ 是依伊斯顿支撑的长度为 β 的 (从 $\kappa+1$ 到 $j(\kappa)+1$ 的) 迭代力迫构思的. 对于 $\kappa+1 \leqslant \xi < j(\kappa)+1$, 在 ξ 处, 所使用的力迫构思是 $M^{P_{\xi}}$ 中的偏序集, 它或者是平凡偏序集, 或者是当 ξ 是 M 的一个不可达基数时它是对 ξ 添加 ξ^{++} 个子集的标准偏序集. 无论如何, 在 $M^{P_{\xi}}$ 中, 它是 λ-定向完全的. 根据引理 2.6, 在 M^{P} 中, $\dot{Q}$ 是一个 λ-定向完全的力迫构思. 于是, $Q = \dot{Q}/G$ 在 $M[G]$ 中是一个 λ-定向完全的力迫构思.

设 $p \in P$. 因为 $j(p) \in j(P) = P * \dot{Q}$, 所以, $j(p) = (r, \dot{q})$, 其中 $r \in P$, $\dot{q} \in M^{P}$, 满足要求: $r \Vdash_{P} \dot{q} \in \dot{Q}$. 根据 P 的定义, $p = \langle p_{\xi} \mid \xi \leqslant \kappa\rangle$, 并且 p 自某个 $\xi_0 < \kappa$ 开始就有一个平坦末端, 即对于 $\xi_0 \leqslant \xi < \kappa$, $p_{\xi} = \mathbf{1}$. 由此可见,

$$j(p) = \left\langle p'_{\xi} \;\middle|\; \xi \leqslant j(\kappa)\right\rangle$$

也就自 $j(\xi_0) = \xi_0$ 开始为平坦末端. 于是, $p'_{\kappa} = \mathbf{1}$, 以及 $\forall \xi < \kappa \left(p'_{\xi} = p_{\xi}\right)$. 由于

$r = j(p)\restriction_{\kappa+1}$, 我们的计算表明: $r = (p\restriction_{\kappa}) + \langle \mathbf{1} \rangle$. 根据这些事实, 我们得到

$$(p \in G \wedge j(p) = (r, \dot{q})) \rightarrow r \in G.$$

现在令

$$D = \{q \in Q \mid \exists p \in G \, \exists r \in G \, \exists \, \dot{q} \ (j(p) = (r, \dot{q}) \wedge q = \dot{q}/G)\}.$$

由于 $|P| = \lambda$, $j\restriction_P \in M$, 所以, D 在 $M[G]$ 中可以用上式定义出来, 从而 $D \in M[G]$. 有趣的是, D 在 $M[G]$ 中是 Q 的一个定向子集: 设 $q_1, q_2 \in D$, 令 $\{p_1, p_2, r_1, r_2\} \subset G, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ 来见证

$$q_i = \dot{q}_i/G \wedge j\,(p_i) = (r_i, \dot{q}_i) \quad (i = 1, 2).$$

令 $p \in G$ 满足 $p \leqslant p_i, r_i \,(i = 1, 2)$. 令 $j(p) = (r, \dot{q})$. 那么 $q = \dot{q}/G \in D$, 并且 $q \leqslant q_i \,(i = 1, 2)$. 在 $M[G]$ 中, $|D| \leqslant |G| \leqslant |P| = \lambda$; 因为 Q 是 λ-定向完全的, 所以 D 在 Q 中有一个下界 $a \in Q$ (称这样的 a 为一个**大拿**).

接下来我们考虑 Q 在 $\mathrm{V}[G]$ 上的力迫扩张. 令 H 为 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q-泛型滤子, 并且大拿 $a \in H$. 此时, H 也是 $M[G]$ 上的 Q-泛型滤子. 所以 $M[G][H]$ 就是 M 经 $P * \dot{Q}$ 的一个力迫扩张. 根据迭代力迫的基本性质, 可以找到 M 之上的一个 $j(P)$-泛型滤子 K 来实现下述等式:

$$M[K] = M[G][H].$$

事实上, 可以很具体地写出 K 的定义来:

$$K = \{(r, \dot{q}) \mid r \in G \wedge \dot{q}/G \in H\}.$$

利用 G 和 K, 我们现在来定义 j 的自然延拓: 对于每一个 $x \in \mathrm{V}[G]$, 令

$$j^*(x) = (j\,(\dot{x}))\,/K,$$

其中, $\dot{x}$ 是 x 的一个 P-名字.

我们需要保证上述定义不依赖于 x 的名字 $\dot{x}$ 的选择. 只要保证了这一点, 剩下的便是我们所熟悉的验证: j^* 的确是 j 的延拓, 并且是一个同质映射

$$j^* : \mathrm{V}[G] \prec M[G][H] = M[K].$$

名字选择的独立性源于 H 中有一个 D 的下界, 一个大拿 $a \in Q$. 这里的关键在于大拿 $a \in H$ 保证了下述关系式成立:

$$p \in G \rightarrow j(p) \in K.$$

设 $p \in G$, 令 $j(p) = (r, \dot{q})$. 因为 $r \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$, $r \in G$, 令 $q = \dot{q}/G$, 那么 $q \in D$, 从而 $a \leqslant q$, 所以, $q \in H$. 于是, $j(p) = (r, \dot{q}) \in K$. 据此, 我们得到: $j[G] \subset K$. 于是, 如果 $p \in G$ 见证 $p \Vdash_P \dot{x} = \dot{y}$, 那么

$$j(p) \Vdash_{j(P)} j(\dot{x}) = j(\dot{y}).$$

而 $j(p) \in K$, 所以, $(j(\dot{x}))/K = (j(\dot{y}))/K$. 这就证明了上述定义与名字的选择无关.

这样一来, 在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中, 我们实现了将 $j : \mathrm{V} \prec M$ 延拓到 $j^* : \mathrm{V}[G] \prec M[K]$ 的目标. 应用 j^*, 我们如下定义

$$U = \left\{ X \in (\mathfrak{P}(\kappa))^{\mathrm{V}[G]} \;\middle|\; \kappa \in j^*(X) \right\}.$$

如此定义的 U 是一个 κ 上的 $\mathrm{V}[G]$-超滤子, 并且是非平凡的以及相对于 $\mathrm{V}[G]$ 而言是 κ-完全的.

唯一的问题是: U 是否在 $\mathrm{V}[G]$ 之中? 下面我们来看这个问题的答案如何.

断言　$(M[G])^{\lambda} \cap \mathrm{V}[G] \subset M[G]$.

为证此断言, 只需证明后述事实: 如果 $f \in \mathrm{V}[G]$ 是一个定义在 λ 之上的序数函数, 那么 $f \in M[G]$.

设 τ 是一个这样函数 f 的名字, 即在 $\mathrm{V}[G]$ 中有 $f = \tau/G$. 令 $p_0 \in G$ 满足要求: $p_0 \Vdash \tau$ 是一个定义在 $\check{\lambda}$ 的序数函数.

对于 $\alpha < \lambda$, 令

$$A_\alpha = \{p \leqslant p_0 \mid \exists \beta \in \mathrm{Ord}\ [p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \beta]\}.$$

每一个这样的 A_α 都在 p_0 之下是稠密的, 从而 $A_\alpha \cap G \neq \varnothing$. 对 $\alpha < \lambda$, $p \in A_\alpha$, 令 $g(\alpha, p)$ 为方程

$$p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \beta$$

的那个唯一的解序数 β. 因为 $|P| = \lambda$, 所以 $|g| = \lambda$, 从而 $g \in M$. 于是, 在 $M[G]$ 中,

$$\forall \alpha < \lambda\ (f(\alpha) = (\tau/G)(\alpha) = \min\{\beta \mid \exists p \in G\,(g(\alpha, p) = \beta)\}).$$

所以, $f \in M[G]$. 断言由此得证.

根据这个断言, $M[G]$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是 λ-封闭的: $M[G]^{\lambda} \subset M[G]$. 所以力迫构思 Q 不仅在 $M[G]$ 中是 λ-封闭的, 而且它在 $\mathrm{V}[G]$ 中也是 λ-封闭的. 这就表明在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中没有相对于 $\mathrm{V}[G]$ 而言的任何新的 λ-序列. 因为上面定义的 U 的势恰好是 λ, 所以, $U \in \mathrm{V}[G]$.

于是, $V[G] \models \kappa$ 是一个可测基数. □

将银杰定理 (定理 2.10) 以及前面的普利克瑞定理 (定理 2.6) 结合起来, 我们就得到下面关于奇异基数假设在一个梯度为 ω 的强极限基数之处不成立的模型:

定理 2.11 设 κ 是一个 κ^{++}-超紧基数. 那么存在一个力迫构思 $\mathbb{P}$ 来实现下述可能性: 令 G 为 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 在 $V[G]$ 中下述命题成立:

(1) κ 是一个梯度为 ω 的强极限基数, 并且 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$;

(2) $2^\kappa = \kappa^{++}$.

证明 假设 κ 是 κ^{++}-超紧基数. 如果必要, 应用一个小型力迫扩张来强迫连续统假设成立. 此时 κ 在这个小型力迫扩张之后依旧是 κ^{++}-超紧的. 因此, 不妨假设在 V 中连续统假设成立.

应用银杰定理 (定理 2.10) 或者它的证明, 得到银杰力迫构思 $\mathbb{P}$. 在它的力迫扩张中, 连续统假设依旧被保持. 令 G 为 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 在 $V[G]$ 中, 连续统假设成立, κ 是一个可测基数, $2^\kappa = \kappa^{++}$. 在 $V[G]$ 中, 用一个 κ 上的正规测度 D 来定义普利克瑞偏序集 Q. 令 H 为 $V[G]$ 上的 Q-泛型滤子, 那么在 $V[G][H]$ 中, 连续统假设依旧成立, κ 是一个梯度为 ω 的强极限基数, 并且 $2^\kappa = \kappa^{++}$.

令 $\dot{Q}$ 为上述 $V[G]$ 中的普利克瑞力迫构思的 $\mathbb{P}$-名字, 那么 $\mathbb{P} * \dot{Q}$ 就是所要的力迫构思. □

2.5 力迫 SCH 最小反例

根据银杰定理 (定理 I.2.38), 奇异基数假设的第一个反例的梯度不可能不可数. 综合前面 2.4 小节的银杰力迫扩张构造以及 2.3 小节的普瑞克利力迫扩张构造, 我们见到了从超紧基数出发, 可以得到一个这样的模型: 在其中, 奇异基数假设的确可以在梯度为 ω 的强极限基数上第一个被否定. 自然的问题便是: 最自然的奇异基数 $\aleph_\omega$ 是否可以成为奇异基数假设的第一个反例? 梅格铎第一个构造出了这样的模型[6]. 这项突破性的工作之后, 武丁将梅格铎使用的超紧基数大大减弱到强基数. 在武丁工作的基础上, Gitik 得到了进一步的改善. 下面我们展示这种综合起来的结果. 由于篇幅所限, 有些详细的计算将会被省略, 或者留给读者自己练习和体会. 省略适当的技术性细节计算还有一个重要的理由: 我们希望尽可能清晰地展示这些构造的基本思想和方法, 而不被细致的技术所淹没, 并且我们也相信, 如果读者愿意, 完全可以自己填补那些被省略的细节.

下面就让我们开始证明本节末尾的定理的漫长历程.

设 $V \models$ ZFC+ GCH.

6 Manahem Magidor, On the singular cardinal problem. II. Ann. of Math., 1977, 106(2), No. 3: 514-547.

设 κ 是 $V_{\kappa+2}$-强基数.

令 E 为 κ 上的一个张子以至于由 E 所确定的超幂映射 $j : V \prec M \cong \mathrm{ult}(V, E)$ 具备下述特点:

(1) κ 是 j 的临界点, $j(\kappa) > \kappa^{++}$;

(2) $V_{\kappa+2} \subset M$; 从而 $V_{\kappa+2}^{\kappa^+} \subset M$ (因为 GCH 在 V 中成立.)

对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 定义 κ 上的一个 κ-完全的超滤子如下: 对于 $X \subset \kappa$, 令

$$X \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in j(X),$$

那么 U_α 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子, 并且 U_κ 是正规超滤子. 这样, 我们得到 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子序列

$$\mathscr{U} = \left\langle U_\alpha \mid \kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++} \right\rangle.$$

对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 令 $\mathrm{ult}\,(V, U_\alpha)$ 为由 U_α 所确定的 V 的超幂; 令

$$\pi_\alpha : \mathrm{ult}\,(V, U_\alpha) \cong N_\alpha$$

为超幂 $\mathrm{ult}\,(V, U_\alpha)$ 的典型传递化映射; 令 $i_\alpha : V \prec N_\alpha \cong \mathrm{ult}(V, U_\alpha)$ 为映射

$$V \ni x \mapsto \pi_\alpha \left([c_x]_{U_\alpha}\right) \in N_\alpha,$$

其中, $\forall \nu \in \kappa\ (c_x(\nu) = x)$; 对于任意的 $f : \kappa \to V$, 令 $k_\alpha\left(\pi_\alpha\left([f]_{U_\alpha}\right)\right) = j(f)(\alpha)$, 那么 $k_\alpha : N_\alpha \prec M$ 并且满足等式: $j = k_\alpha \circ i_\alpha$.

当然, 对于 $\alpha < \kappa$, 同样也可以定义 U_α: 对于 $X \subseteq \kappa$,

$$X \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in j(X).$$

此时我们得到由 $\{\alpha\}$ 所生成的平凡超滤子. 对于这些超滤子, 我们将忽略掉. 因此, 我们将注意力集中在那些满足不等式 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^+$ 的序数 α 上.

事实 2.5.1　设 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$.

(1) 令 $\mathrm{Id} : \kappa \to \kappa$ 为 κ 上的恒等函数, 那么 $k_\alpha\left(\pi_\alpha\left([\mathrm{Id}]_{U_\alpha}\right)\right) = \alpha$.

(2) $N_\alpha = \{i_\alpha(f)\left(\pi_\alpha\left([\mathrm{Id}]_{U_\alpha}\right)\right) \mid f : \kappa \to V\}$.

令 $A = \kappa^{++} - \kappa$; 令 $B = \left\{\nu < \kappa \mid \exists \mu\left(\mu \leqslant \nu < \mu^{++} \wedge \mu \text{是不可达基数}\right)\right\}$.

事实 2.5.2　如果 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 那么 $B \in U_\alpha$.

证明　因为 $M \models \kappa$ 是不可达基数, 对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++} = \left(\kappa^{++}\right)^M$,

$$M \models \alpha \in j(B).$$

□

事实 2.5.3　$\left(\kappa^{++}\right)^{N_\alpha} = \mathrm{Crit}\,(k_\alpha)$.

证明 因为 $N_\alpha^\kappa \subset N_\alpha$, 所以 $(\kappa^+)^{N_\alpha} = \kappa^+ = (\kappa^+)^M$. 于是, $k_\alpha\left((\kappa^+)^{N_\alpha}\right) = \kappa^+$. 由于 $2^\kappa = \kappa^+$, $(\kappa^{++})^{N_\alpha} < \kappa^{++} = (\kappa^{++})^M$, 因此, $k_\alpha\left((\kappa^{++})^{N_\alpha}\right) = \kappa^{++}$.

剩下的需要验证 $k_\alpha(\kappa) = \kappa$.

令 $\lambda = \kappa^{++}$. 令 $f_\lambda : \kappa \ni \alpha \mapsto |\alpha|^{++} \in \kappa$. 于是 $k_\alpha(i_\alpha(f_\lambda)) = j(f_\lambda)$. 因为 $i_\alpha(f_\lambda) : i_\alpha(\kappa) \to i_\alpha(\kappa)$, $i_\alpha(f_\lambda) \restriction_\kappa = f_\lambda$, 所以 $N_\alpha \models \forall \xi < \kappa\ (i_\alpha(f_\lambda)(\xi) < \kappa)$. 又因为 $k_\alpha : N_\alpha \prec M$, 所以 $M \models \forall \xi < k_\alpha(\kappa)\ (j(f_\lambda)(\xi) < k_\alpha(\kappa))$.

这样, 根据不等式 $k_\alpha(\kappa) \leqslant k_\alpha\left(\pi_\alpha\left([\mathrm{Id}]_{U_\alpha}\right)\right) = \alpha < \kappa^{++}$, 我们就有

$$M \models \forall \xi < k_\alpha(\kappa)\ \left(j(f_\lambda)(\xi) < \kappa^{++}\right).$$

又由于 $k_\alpha(\kappa) \geqslant \kappa$ 以及 $j(f_\lambda)(\kappa) = \kappa^{++}$, 上述表明我们必须有 $k_\alpha(\kappa) = \kappa$.

综合起来得到 $(\kappa^{++})^{N_\alpha}$ 是被 k_α 放大的最小的序数, 也就是 k_α 的临界点. □

定义 A 上的二元关系 $\leqslant_E$ 如下: 对于 $(\alpha, \beta) \in A \times A$, 令

$$\alpha \leqslant_E \beta \leftrightarrow \alpha \leqslant \beta \wedge \exists f \in \kappa^\kappa\ (j(f)(\beta) = \alpha).$$

事实 2.5.4 设 $\kappa \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \kappa^{++}$.

(1) 如果 $f, g : \kappa \to \kappa$, 并且 $j(f)(\alpha) = \beta = j(g)(\alpha)$, 那么

$$\{\nu < \kappa \mid f(\nu) = g(\nu)\} \in U_\alpha.$$

(2) 如果 $\gamma \leqslant_E \beta \leqslant_E \leqslant \alpha$, 那么 $\gamma \leqslant_E \alpha$.

证明 (1) 令 $X = \{\nu < \kappa \mid f(\nu) = g(\nu)\}$. 那么

$$X \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in j(X) \leftrightarrow j(f)(\alpha) = j(g)(\alpha).$$

(2) 令 $f : \kappa \to \kappa$ 和 $g : \kappa \to \kappa$ 分别满足

$$j(f)(\alpha) = \beta \wedge j(g)(\beta) = \gamma.$$

那么 $(j(g) \circ j(f))(\alpha) = \gamma$. 因为 $j(g \circ f) = j(g) \circ j(f)$, 所以 $j(g \circ f)(\alpha) = \gamma$. □

下面我们引进超滤子之间的一种偏序: 汝丁-柯斯乐偏序[7].

定义 2.12 $U_\beta \leqslant_{RK} U_\alpha \leftrightarrow \exists f : \kappa \to \kappa \forall X \subseteq \kappa \left(X \in U_\beta \leftrightarrow f^{-1}[X] \in U_\alpha\right)$.

事实 2.5.5 如果 $(\alpha, \beta) \in A \times A$, 并且 $\beta \leqslant_E \alpha$, 那么 $U_\beta \leqslant_{RK} U_\alpha$.

证明 令 $f : \kappa \to \kappa$ 满足 $j(f)(\alpha) = \beta$.

设 $X \subset \kappa$, 以及 $X \in U_\alpha$. 那么 $\alpha \in j(X)$. 因此

$$\beta = j(f)(\alpha) \in j(f)[j(X)] = j(f[X]).$$

7 Rudin-Keisler Order.

所以 $f[X] \in U_\beta$.

设 $Y \in U_\beta$. 那么 $\beta \in j(Y)$. 令 $X = f^{-1}[Y]$. 于是,

$$\forall \nu < \kappa \, (f(\nu) \in Y \to \nu \in X).$$

因此,

$$M \models \forall \nu < j(\kappa) \, (j(f)(\nu) \in j(Y) \to \nu \in j(X)).$$

这样一来, 由 $j(f)(\alpha) = \beta \in j(Y)$ 就得到 $\alpha \in j(X)$. 从而, $X \in U_\alpha$. □

事实 2.5.6　如果 $\alpha \in A$, 那么 $\kappa \leqslant_E \alpha$.

证明　依据事实 2.5.3, $k_\alpha(\kappa) = \kappa$. 令 $g : \kappa \to \kappa$ 在 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, U_\alpha)$ 中表示 κ. 那么 $k_\alpha\left(\pi_\alpha\left([g]_{U_\alpha}\right)\right) = \kappa$. 因此, $j(g)(\alpha) = k_\alpha\left(\pi_\alpha\left([g]_{U_\alpha}\right)\right) = \kappa$. 由此, g 将 U_α 投影到 U_κ. □

为了适合后面的需要, 对于 $\kappa \leqslant \beta < \alpha < \kappa^{++}$, 我们有必要系统性地对满足不等式 $\beta <_E \alpha$ 的序对 (β, α) 选择满足等式 $j(f)(\alpha) = \beta$ 的投影函数 f.

为此, 固定 $[\kappa]^{<\kappa}$ 的一个满足下述要求的列表 $\langle a_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$: 如果 $\mu < \kappa$ 是一个正则基数, 那么这个列表在 μ 处的截断 $\langle a_\alpha \mid \alpha < \mu \rangle$ 就是 $[\mu]^{<\mu}$ 的列表, 并且 $[\mu]^{<\mu}$ 中的每一个元素都会在列表中出现 μ 次. (因为有 GCH, 所以这是可能的.)

令 $j\left(\langle a_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle\right) = \langle a_\alpha \mid \alpha < j(\kappa) \rangle$. 它在 λ 处的截断便是 $[\lambda]^{<\lambda}$ 的一个列表, 并且 $[\lambda]^{<\lambda}$ 中的每一个元素都在列表中重复 λ 次.

定义 2.13　(1) 令 $g : B \to \kappa$ 由下式所定义:

$$\forall \nu \in B \; \left(g(\nu) = \max\left\{\gamma \in \kappa \mid \gamma \leqslant \nu \wedge \gamma \text{ 是不可达基数}\right\}\right).$$

对于 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$, 对于 $\xi < \kappa$, 令

$$\pi_{\alpha\kappa}(\xi) = \begin{cases} g(\xi) & \text{如果 } \xi \in B, \\ 0 & \text{如果 } \xi \notin B. \end{cases}$$

对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 令 $\pi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}_\kappa$.

(2) 设 $\langle \alpha_\nu < \kappa^{++} \mid \nu < \kappa^+ \rangle$. 令

$$C = \left\{\alpha \in \left(\kappa^{++} - \bigcup\left\{\alpha_\nu + 1 \mid \nu < \kappa^+\right\}\right) \,\middle|\, a_\alpha = \left\{\alpha_\nu \mid \nu < \kappa^+\right\}\right\}.$$

对于 $\nu < \kappa^+$, 对于 $\alpha \in C$, 我们按照下述方式选择 $\pi_{\alpha\alpha_\nu}$:

(a) 令 $\alpha_\nu^* \in N_\alpha$ 满足等式 $(k_\alpha(\alpha_\nu^*) = \alpha_\nu)$; 令 $h_{\alpha\alpha_\nu} : \kappa \to \kappa$ 为满足等式

$$\pi_\alpha\left([h_{\alpha\alpha_\nu}]_{U\alpha}\right) = \alpha_\nu^*$$

的函数, 并且如果 $\alpha_\nu < \kappa$, 则令 $h_{\alpha\alpha_\nu}$ = 取常值 α_ν 的函数.

(b) 如果 $\alpha_\nu < \kappa$, 则令 $\pi_{\alpha\alpha_\nu} = h_{\alpha\alpha_\nu}$; 如果 $\kappa < \alpha_\nu$, 则如下定义 $\pi_{\alpha\alpha_\nu}$: 对于 $\xi < \kappa$,

$$\pi_{\alpha\alpha_\nu}(\xi) = \begin{cases} h_{\alpha\alpha_\nu}(\xi) & \text{如果 } \xi \in B \wedge h_{\alpha\alpha_\nu}(\xi) \geqslant \pi_{\alpha\kappa}(\xi), \\ \xi & \text{如果 } \xi \in B \wedge h_{\alpha\alpha_\nu}(\xi) < \pi_{\alpha\kappa}(\xi), \\ 0 & \text{如果 } \xi \notin B. \end{cases}$$

(3) 如果 $\kappa \leqslant \beta < \alpha < \kappa^{++}$, $\beta <_E \alpha$, 并且 $\pi_{\alpha\beta}$ 在经过上述过程之后还没有定义, 那么就任取一个见证等式 $j(h)(\alpha) = \beta$ 的函数 h 为 $h_{\alpha\beta} : \kappa \to \kappa$, 然后如下定义 $\pi_{\alpha\beta}$: 对于 $\xi < \kappa$,

$$\pi_{\alpha\beta}(\xi) = \begin{cases} h_{\alpha\beta}(\xi) & \text{如果 } \xi \in B \wedge h_{\alpha\beta}(\xi) \geqslant \pi_{\alpha\kappa}(\xi), \\ \xi & \text{如果 } \xi \in B \wedge h_{\alpha\beta}(\xi) < \pi_{\alpha\kappa}(\xi), \\ 0 & \text{如果 } \xi \notin B. \end{cases}$$

我们来验证对 $\kappa \leqslant \beta \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 若 $\beta <_E \alpha$, 则 $j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) = \beta$.

事实 2.5.7 对于 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$, $j(\pi_{\alpha\kappa})(\alpha) = \kappa$.

证明 根据事实 2.5.2, $B \in U_\alpha$. 所以, $i_\alpha(g)(\alpha) = \kappa$. 在 N_α 中,

$$\kappa < \alpha < \left(\kappa^{++}\right)^{N_\alpha}.$$

根据事实 2.5.3, $k_\alpha(\alpha) = \alpha$. 因此

$$\kappa = k_\alpha(\kappa) = k_\alpha\left(i_\alpha(g)(\alpha)\right) = k_\alpha\left(i_\alpha(g)\right)\left(k_\alpha(\alpha)\right) = j(g)(\alpha).$$

从而, $j(\pi_{\alpha\kappa})(\alpha) = \kappa$. □

事实 2.5.8 设 $\langle \kappa \leqslant \alpha_\nu < \kappa^{++} \mid \nu < \kappa^+ \rangle$. 令

$$\alpha \in \left(\kappa^{++} - \bigcup \left\{\alpha_\nu + 1 \mid \nu < \kappa^+\right\}\right)$$

满足下述要求: $a_\alpha = \{\alpha_\nu \mid \nu < \kappa^+\}$. 那么

$$\forall \nu < \kappa^+ \left(\kappa < \alpha_\nu \to \left(\alpha_\nu <_E \alpha \wedge j\left(\pi_{\alpha\alpha_\nu}(\alpha) = \alpha_\nu\right)\right)\right).$$

证明 令 $\nu < \kappa^+$. 考虑 $j = k_\alpha \circ i_\alpha = k_{\alpha_\nu} \circ i_{\alpha_\nu}$. 我们有

$$j\left(\langle a_\beta \mid \beta < \kappa \rangle\right) = k_\alpha\left(i_\alpha\left(\langle a_\beta \mid \beta < \kappa \rangle\right)\right).$$

令 $\alpha^* = \pi_\alpha\left([\mathrm{Id}]_{U_\alpha}\right)$. 那么 $k_\alpha(\alpha^*) = \alpha$. 令

$$a^*_{\alpha^*} = \left(i_\alpha\left(\langle a_\beta \mid \beta < \kappa \rangle\right)\right)(\alpha^*).$$

那么, $a_\alpha = k_\alpha\left(a^*_{\alpha^*}\right)$. 由于 $a_\alpha = \{\alpha_\mu \mid \mu < \kappa^+\}$, 以及 $k_\alpha\left(\kappa^+\right) = \kappa^+$, 我们就有

$$a^*_{\alpha^*} = \left\{\alpha^*_\mu \mid \mu < \kappa^+\right\},$$

其中, $\forall \mu < \kappa^+ \left(k_\alpha\left(\alpha^*_\mu\right) = \alpha_\mu\right)$.

定义 $k_{\alpha_\nu,\alpha} : N_{\alpha_\nu} \prec N_\alpha$ 如下: 对于 $f : \kappa \to \mathrm{V}$, 令

$$k_{\alpha_\nu,\alpha}\left(\pi_{\alpha_\nu}\left([f]_{U_{\alpha_\nu}}\right)\right) = i_\alpha(f)\left(\alpha^*_\nu\right).$$

那么 $k_\alpha \circ k_{\alpha_\nu,\alpha} = k_{\alpha_\nu}$. 从而 $\pi_{\alpha\alpha_\nu} : \kappa \to \kappa$ 在 $\mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, U_{\alpha_\nu}\right)$ 中表示 α^*_ν, 并且

$$j\left(\pi_{\alpha\alpha_\nu}\right)(\alpha) = \alpha_\nu.$$

□

事实 2.5.9　$\leqslant_E$ 是一个 κ^{++}-共顶的偏序. 事实上, 设 $\langle \kappa \leqslant \alpha_\nu < \kappa^{++} \mid \nu < \kappa^+\rangle$. 令

$$\alpha \in \left(\kappa^{++} - \bigcup\left\{\alpha_\nu + 1 \mid \nu < \kappa^+\right\}\right)$$

满足下述要求: $a_\alpha = \{\alpha_\nu \mid \nu < \kappa^+\}$. 那么 $\forall \nu < \kappa^+ \ (\alpha_\nu <_E \alpha)$.

证明　这是上述事实 2.5.8 的一个推论. □

引理 2.8　设 $\kappa \leqslant \gamma < \beta \leqslant \alpha < \kappa^{++}$. 如果 $\beta \leqslant_E \alpha$ 并且 $\gamma \leqslant_E \alpha$, 那么

$$\{\nu < \kappa \mid \pi_{\alpha\beta}(\nu) > \pi_{\alpha\gamma}(\nu)\} \in U_\alpha.$$

证明　我们有 $j\left(\pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha) = \beta$, 以及 $j\left(\pi_{\alpha\gamma}\right)(\alpha) = \gamma$. 那么

$$j\left(\pi_{\alpha\gamma}\right)(\alpha) < j\left(\pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha).$$

令 $X = \{\nu < \kappa \mid \pi_{\alpha\beta}(\nu) > \pi_{\alpha\gamma}(\nu)\}$. 那么 $\alpha \in j(X)$. 所以 $X \in U_\alpha$. □

引理 2.9　设 $\kappa \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \kappa^{++}$. 如果 $\gamma \leqslant_E \beta \leqslant_E \alpha$, 那么

$$\{\nu < \kappa \mid \pi_{\alpha\gamma}(\nu) = \pi_{\beta\gamma}\left(\pi_{\alpha\beta}(\nu)\right)\} \in U_\alpha.$$

证明　我们有 $j\left(\pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha) = \beta$, $j\left(\pi_{\beta\gamma}\right)(\beta) = \gamma$, 以及 $j\left(\pi_{\alpha\gamma}\right)(\alpha) = \gamma$. 于是,

$$j\left(\pi_{\alpha\gamma}\right)(\alpha) = j\left(\pi_{\beta\gamma}\right)(\beta) = j\left(\pi_{\beta\gamma}\right)\left(j\left(\pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha)\right) = j\left(\pi_{\beta\gamma} \circ \pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha).$$

令 $X = \{\nu < \kappa \mid \pi_{\alpha\gamma}(\nu) = \pi_{\beta\gamma}\left(\pi_{\alpha\beta}(\nu)\right)\}$. 根据上面的等式, 我们就有 $\alpha \in j(X)$. 因此, $X \in U_\alpha$. □

引理 2.10　设 $\kappa < \beta < \alpha < \kappa^{++}$.

(1) 如果 $\beta <_E \alpha$, 那么 $\forall \xi < \kappa \left(\pi_{\alpha\kappa}(\xi) = \pi_{\beta\kappa}\left(\pi_{\alpha\beta}(\xi)\right)\right)$.

(2) $\forall \xi < \kappa \ (\pi_{\alpha\kappa}(\xi) = \pi_{\beta\kappa}(\xi))$.

证明 (1) 设 $\beta <_E \alpha$. 对于 $\xi \in (\kappa - B)$,

$$\pi_{\alpha\kappa}(\xi) = 0 = \pi_{\beta\kappa}(0) = \pi_{\alpha\beta}(\xi).$$

对于 $\xi \in B$, $\xi \geqslant \pi_{\alpha\beta}(\xi) \geqslant \pi_{\alpha\kappa}(\xi)$, 所以,

$$\pi_{\beta\kappa}\left(\pi_{\alpha\beta}(\xi)\right) = \pi_{\alpha\kappa}(\xi).$$

(2) 由定义直接得到, 因为 $\pi_{\alpha\kappa}$ 和 $\pi_{\beta\kappa}$ 的定义都只依赖函数 g 与集合 B, 而不依赖别的. □

引理 2.11 设 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$. 设 $f \in \kappa^\kappa$. 如果 $\forall \xi < \kappa\ (\{\nu \in \kappa \mid f(\nu) = \xi\} \notin U_\alpha)$, 那么

$$\exists Y \in U_\alpha\, \forall \xi < \kappa\ (|\{\nu \in Y \mid f(\nu) = \xi\}| < \kappa).$$

证明 设 $\forall \xi < \kappa\ (\{\nu \in \kappa \mid f(\nu) = \xi\} \notin U_\alpha)$. 那么 $\forall \xi < \kappa\, (j(f)(\alpha) \neq \xi)$. 因此, $j(f)(\alpha) \geqslant \kappa$. 由于 $j\left(\pi_{\alpha\kappa}\right)(\alpha) = \kappa$, 我们就有

$$\{\nu \in B \mid f(\nu) \geqslant \pi_{\alpha\kappa}(\nu)\} \in U_\alpha.$$

令 $Y = \{\nu \in B \mid f(\nu) \geqslant \pi_{\alpha\kappa}(\nu)\}$. 此 Y 就是所求的集合. □

综合起来, 我们有

(1) 同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 满足

(a) $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$; $j(\kappa) > \kappa^{++}$;

(b) $\mathrm{V}_{\kappa+2} = \mathrm{V}_{\kappa+2}^M \subset M$.

(2) 同质嵌入映射 j 诱导出来的 κ 上的超滤子序列: $\langle U_\alpha \mid \kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}\rangle$, 其中, 对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$,

(a) 对于 $X \subseteq \kappa$, $X \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in j(X)$;

(b) $B \in U_\alpha$;

(c) 对于任意的 $f \in \kappa^\kappa$, 如果 $\forall \xi < \kappa\ \left(f^{-1}[\{\xi\}] \notin U_\alpha\right)$, 那么

$$\exists Y \in U_\alpha\, \forall \nu < \kappa\ (|\{\xi \in Y \mid f(\xi) = \nu\}| < \kappa).$$

(3) 一个 $A = (\kappa^{++} - \kappa)$ 上的由 j 按照下述方式确定的偏序 $\leqslant_E$:

$$\kappa \leqslant \alpha, \beta < \kappa^{++} \rightarrow \left(\beta \leqslant_E \alpha \leftrightarrow \beta \leqslant \alpha \wedge \exists f \in \kappa^\kappa\left(j(f)(\alpha) = \beta\right)\right).$$

(4) 偏序集 $(A, \leqslant_E)$ 是 κ^{++}-共顶的偏序集, 并且 $\forall \alpha \in A\ (\kappa \leqslant_E \alpha)$.

(5) 对于 $\kappa \leqslant \beta \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, $\pi_{\alpha\beta} \in \kappa^\kappa$ 当且仅当

$$\beta \leqslant_E \alpha \wedge j\left(\pi_{\alpha\beta}\right)(\alpha) = \beta,$$

并且, $\forall\alpha\in A\ (\pi_{\alpha\alpha}=\mathrm{Id}_\kappa)$; 以及对于 $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$, 总有

$$\pi_{\alpha\kappa}[\kappa-B]=\{0\}\wedge\forall\xi\in B\ \left(\pi_{\alpha\kappa}(\xi)=\text{不超过 }\xi\text{ 的最大不可达基数}\right).$$

(6) 函数序列 $\langle\pi_{\alpha\beta}\mid\beta\leqslant_E\alpha\rangle$ 与超滤子序列 $\langle U_\alpha\mid\alpha\in A\rangle$ 以如下方式关联:

(a) 如果 $\beta<_E\alpha$, 那么 $\forall X\subseteq\kappa\ \left(X\in U_\beta\leftrightarrow\pi_{\alpha\beta}^{-1}[X]\in U_\alpha\right)$;

(b) 如果 $\gamma\leqslant_E\beta\leqslant\alpha$, 那么 $\{\xi\in\kappa\mid\pi_{\alpha\gamma}(\xi)=\pi_{\beta\gamma}(\pi_{\alpha\beta}(\xi))\}\in U_\alpha$;

(c) 如果 $\kappa\leqslant\beta<\alpha\leqslant\gamma<\kappa^{++}$, 并且 $\alpha\leqslant_E\gamma$, $\beta<_E\gamma$, 那么

$$\{\xi<\kappa\mid\pi_{\gamma\alpha}(\xi)>\pi_{\gamma\beta}(\xi)\}\in U_\gamma.$$

(7) 如果 $\beta\leqslant_E\alpha$, 那么 $\forall\xi\in\kappa\ (\pi_{\alpha\kappa}(\xi)=\pi_{\beta\kappa}(\pi_{\alpha\beta}(\xi)))$.

(8) 如果 $\kappa\leqslant\alpha,\beta<\kappa^{++}$, 那么 $\forall\xi\in\kappa\ (\pi_{\alpha\kappa}(\xi)=\pi_{\beta\kappa}(\xi))$.

事实 2.5.10　设 $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$. 设 $X\in U_\alpha$, 并且 $X\subseteq B$. 对于 $\nu\in X$ 以及 $\xi\in X$, 如果 $\pi_{\alpha\kappa}(\nu)<\pi_{\alpha\kappa}(\xi)$, 那么 $|\{\gamma\in X\mid\pi_{\alpha\kappa}(\gamma)=\pi_{\alpha\kappa}(\nu)\}|<\pi_{\alpha\kappa}(\xi)$.

证明　由 $\pi_{\alpha\kappa}$ 的选取以及 B 的定义直接得到. □

令 $C_0=\{\gamma<\kappa\mid\gamma\text{是不可达基数}\}\cup\{0\}$. 那么对 $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$, $C_0=\mathrm{rng}(\pi_{\alpha\kappa})$. 令 $C=C_0-\{0\}$.

对于 $\nu\in\kappa$, 令 $\nu^0=\pi_{\kappa^+\kappa}(\nu)$. 那么根据引理 2.10, $\forall\nu\in B\ (\nu^0\text{ 是不可达基数})$,

$$\forall\alpha<\kappa^{++}\,\forall\nu\in\kappa\ \left(\kappa<\alpha\to\nu^0=\pi_{\alpha\kappa}(\nu)\right).$$

事实 2.5.11　设 $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$. 设 $\langle X_\beta\in U_\alpha\mid\beta<\kappa\wedge X_\beta\subseteq B\rangle$. 那么

$$X=\Delta^*_{\beta<\kappa}X_\beta=\left\{\nu\in\kappa\;\middle|\;\forall\beta<\nu^0\ (\nu\in X_\beta)\right\}\in U_\alpha.$$

证明　因为 $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$, $M\models\alpha^0=\kappa$, 所以, $M\models\forall\beta<\alpha^0\ (\alpha\in j(X_\beta))$. 因此, $\alpha\in j(X)$, 即 $X\in U_\alpha$.

也可以应用引理 (引理 2.11) 得到. □

令 $\mathcal{D}=\{\varnothing\}\cup\left\{\langle\nu_1,\cdots,\nu_n\rangle\in\kappa^{<\omega}\mid1\leqslant n<\omega\wedge0<\nu_1^0<\cdots<\nu_n^0\right\}$.

定义 2.14　设 $s\in\mathcal{D}$, $\kappa\leqslant\alpha<\kappa^{++}$. 树 $(\mathcal{D},\leqslant)$ 是一个子树, T 是一棵 (α,s)-树当且仅当

(1) $s\in T$, 并且 $\forall t\in T\ (t\leqslant s\vee s\leqslant t)$;

(2) 如果 $t\in T$, 并且 $s\leqslant t$, 那么

$$\mathrm{HJ}_T(t)=\{\nu\in B\mid(t+\langle\nu\rangle)\in T\}\in U_\alpha;$$

(3) 如果 $t_1\in T$, $t_2\in T$, 并且 $s\leqslant t_1\leqslant t_2$, 那么

$$\mathrm{HJ}_T(t_2)\subset\mathrm{HJ}(t_1).$$

比如, $(\mathcal{D},\leqslant)$ 是一棵 $(\alpha,\varnothing)$-树 $(\kappa\leqslant\alpha<\kappa^{++})$.

引理 2.12 设 $s\in\mathcal{D}$, $\kappa\leqslant\alpha<\kappa^{++}$. 设 $\tau<\kappa$ 以及 $\langle T_i\mid i<\tau\rangle$ 是 (α,s)-树的一个序列. 令 $T=\bigcap\{T_i\mid i<\tau\}$. 那么 T 也是一棵 (α,s)-树.

证明 首先, 如果 $t\leqslant s$, 那么 $t\in T$; 其次, 如果 $t\in T$, 并且 $s\leqslant t$, 那么

$$\mathrm{HJ}_T(t)=\bigcap\{\mathrm{HJ}_{T_i}(t)\mid i<\tau\}\in U_\alpha,$$

因为 U_α 是 κ-完全的; 最后, 如果 $t_1\in T$, $t_2\in T$, 并且 $s\leqslant t_1\leqslant t_2$, 那么

$$\mathrm{HJ}_T(t_2)=\bigcap\{\mathrm{HJ}_{T_i}(t_2)\mid i<\tau\}\subset\mathrm{HJ}_T(t_1)=\bigcap\{\mathrm{HJ}_{T_i}(t_1)\mid i<\tau\}.$$ □

定义 2.15 设 $s\in\mathcal{D}$, $\kappa<\alpha<\kappa^{++}$. 设 T 是一棵 (α,s)-树. 令

$$T_s=\{t\in T\mid s\leqslant t\}.$$

T_s 在 $\pi_{\alpha\kappa}$ 下的投影是如下集合:

$$\eta_\alpha(T_s)=\left\{\left\langle\nu_1^0,\cdots,\nu_n^0\right\rangle\,\middle|\,\langle\nu_1,\cdots,\nu_n\rangle\in T_s\right\}.$$

比如,

$$\eta_\alpha(\mathcal{D},\leqslant)=\{\langle\xi_0,\cdots,\xi_m\rangle\mid m\in\omega\wedge,\xi_0<\cdots<\xi_m<\kappa\text{都是不可达基数}\}.$$

令 $(C)^{<\omega}$ 为 C 中元素单调递增的有限序列的集合. 于是,

$$\eta_\alpha(\mathcal{D},\leqslant)=(C)^{<\omega}\ \wedge\ \eta_\alpha(T_s)\subset(C)^{<\omega}.$$

令 $\mathcal{F}=\left\{X\in[A]^{<\kappa^+}\,\middle|\,\kappa\in X\wedge X\text{有一个在偏序}\leqslant_E\text{之下的最大元}\right\}$.
为了叙述简便, 称 $\nu<\kappa$ **高于**序列 $\langle\nu_1,\cdots,\nu_n\rangle\in\kappa^{<\omega}$ 当且仅当

$$\nu^0>\max\left\{\nu_i^0\,\middle|\,1\leqslant i\leqslant n\right\}.$$

定义 2.16 设 f 是一个函数, 并且 $\mathrm{dom}(f)\in\mathcal{F}$, 以及 $\mathrm{rng}f\subset\mathcal{D}$. 令

$$m(f)=\max(\mathrm{dom}(f))\ \wedge\ n(f)=\mathrm{dom}(f(\kappa)).$$

称 f 为一个**控制函数**当且仅当

(1) f 是一个函数, $\mathrm{dom}(f)\in\mathcal{F}$;

(2) $\forall\gamma\in\mathrm{dom}(f)\ (f(\gamma)\in\mathcal{D})$;

(3) $\forall\gamma\in\mathrm{dom}(f)\,\pi_{m(f)\,\gamma}(\max(f(m(f))))$ 不高于 $f(\gamma)$;

(4) $\pi_{m(f)\,\kappa}$ 将 $f(m(f))$ 投影到 $f(\kappa)$ 之上, 即

$$\forall i<\mathrm{dom}(f(\kappa))\ \big(f(\kappa)(i)=\pi_{m(f)\,\kappa}(f(m(f))(i))\big)$$

(于是这两个序列的长度相等, 并且 $f(\kappa)$ 是不可达基数的递增序列).

令 $\mathcal{KF}$ 为由全体控制函数所组成的集合.

现在我们来定义对 κ 添加 κ^{++} 个 ω-序列并且将 κ 转化成强极限基数 $\aleph_\omega$ 的力迫构思.

定义 2.17 P 是所有满足下述要求的条件 $p=(f,T,\sigma,H)$ 的集合:

(1) $f\in\mathcal{KF}$;

(2) T 是一棵 $(m(f),f(m(f)))$-树;

(3) $\forall\nu\in \mathrm{HJ}_T(f(m(f)))\ \left(|\{\gamma\in\mathrm{dom}(f)\ \mid \nu \text{ 高于 } f(\gamma)\}|\leqslant \nu^0\right)$;

(4) σ 是一个有限序列, $\mathrm{dom}(\sigma)=n(f)+1$, 并且

$$\sigma(0)\in\mathrm{Col}\,(\omega,<f(\kappa)(0))\ \wedge\ \sigma(n(f))\in\mathrm{Col}\left((f(\kappa)(n(f)-1))^{+++},<\kappa\right)\wedge$$
$$\forall 0<i<n(f)\ \left(\sigma(i)\in\mathrm{Col}\left((f(\kappa)(i-1))^{+++},<f(\kappa)(i)\right)\right);$$

(5) H 是定义在投影集 $\eta_{m(f)}\left(T_{f(m(f))}\right)$ 上的满足下述要求的函数:

$$H\left(\langle\nu_0,\cdots,\nu_k\rangle\right)\in\mathrm{Col}\left(\nu_k^{+++},<\kappa\right),$$

其中, 对于正则基数 μ 以及不可达基数 $\gamma>\mu$, $\mathrm{Col}(\mu,<\gamma)$ 是莱维力迫构思.

对比 κ 小的不可达基数的一个单调递增的有限序列 τ, 令 $H_0(\tau)=\varnothing$. 那么

$$\mathbf{1}=(\{(\kappa,\varnothing)\},(\mathcal{D},\leqslant),\{(0,\varnothing)\},H_0)$$

就是一个条件.

定义 2.18 设 $p=(f,T,\sigma,H)\in P$ 和 $q=(g,S,\tau,K)\in P$ 为两个条件. 称 p **延展** q, 记成 $p\leqslant q$, 当且仅当

(1) $\mathrm{dom}(g)\subseteq\mathrm{dom}(f)$;

(2) $\forall\gamma\in\mathrm{dom}(g)\,\exists\ell\ (g(\gamma)=f(\gamma)\restriction_\ell)$;

(3) $f(m(g))\in S$;

(4) $\forall\gamma\in\mathrm{dom}(g)\ \left(f(\gamma)\backslash g(\gamma)=\pi_{m(g)\gamma}\left[(f(m(g))\backslash g(m(g))\restriction_{(n(f)-(i+1))})\right]\right)$, 其中, $i\in\mathrm{dom}(f(m(g)))$ 是满足要求 $f(m(g))(i)$ 不高于序列 $g(\gamma)$ 的最大的 i;

(5) $\pi_{m(f)\,m(g)}$ 将树 $T_{f(m(f))}$ 投影到树 $S_{g(m(g))}$;

(6) 对于 $\gamma\in\mathrm{dom}(g)$, 对于 $\nu\in\mathrm{HJ}_T(f(m(f)))$, 如果 ν 高于 $f(\gamma)$, 那么

$$\pi_{m(f)\,\gamma}(\nu)=\pi_{m(g)\,\gamma}\left(\pi_{m(f)\,m(g)}(\nu)\right);$$

(7) $\forall i<n(g)\ (\sigma(i)\leqslant\tau(i))$;

(8) $\forall s\in\eta_{m(f)}\left[T_{f(m(f))}\right]\ (K(s)\subset H(s))$;

(9) $\forall i<\omega\ \left(n(g)\leqslant i<n(f)\to K\left((f(\kappa)\backslash g(\kappa))\restriction_{(i+1)}\right)\subset\sigma(i)\right)$;

(10) $\min(f(\kappa)\backslash g(\kappa))>\sup\left(\mathrm{rng}\left(\sigma(n(g))\right)\right)$.

定义 2.19 设 $p=(f,T,\sigma,H)\in P$ 和 $q=(g,S,\tau,K)\in P$ 为两个条件. 称 p **直接延展** q, 记成 $p\leqslant^* q$, 当且仅当

(1) $p\leqslant q$;

(2) $\forall\gamma\in\mathrm{dom}(g)\ (f(\gamma)=g(\gamma))$.

引理 2.13 定义 2.18 所给出的延展关系是一个偏序关系.

证明 让我们来验证传递性.

设 $p=(f,T,\sigma,H)$, $q=(g,S,\tau,K)$ 以及 $r=(h,R,\delta,J)$ 为三个条件, 并且 $q\leqslant r$ 以及 $p\leqslant q$. 我们来验证 $p\leqslant r$.

定义 2.18 之 (1): $\mathrm{dom}(h)\subset\mathrm{dom}(g)\subset\mathrm{dom}(f)$.

定义 2.18 之 (2): 设 $\gamma\in\mathrm{dom}(h)$. 令 $\ell=\mathrm{dom}(h(\gamma))$, 以及 $k=\mathrm{dom}(g(\gamma))$. 那么 $\ell<k$ 并且 $g(\gamma)\restriction_\ell=h(\gamma)$ 以及 $f(\gamma)\restriction_k=g(\gamma)$. 于是 $f(\gamma)\restriction_\ell=h(\gamma)$.

定义 2.18 之 (3): 我们需要 $f(m(h))\in R$. 因为 $p\leqslant q\leqslant r$,

$$m(h)=\max(\mathrm{dom}(h))\in\mathrm{dom}(g)\ \wedge\ g(m(h))\in R\ \wedge\ f(m(g))\in S,$$

并且

$$f(m(h))\backslash g(m(h))=\pi_{m(g)\,m(h)}\left[f(m(g))\backslash g(m(g))\right].$$

由 $q\leqslant r$, 根据 $\leqslant$ 之定义 2.18 之 (5), 树 $S_{g(m(g))}$ 在 $\pi_{m(g)\,m(h)}$ 下的投影是树 $R_{g(m(h))}$ 的子树. 因此, $f(m(h))\in R$.

定义 2.18 之 (4): 设 $\gamma\in\mathrm{dom}(h)$. 为了简化记号, 不妨假设 $f(m(h))\backslash h(m(h))$ 中的每一个元素都高于序列 $h(m(h))$. 这样, 我们需要验证

$$f(\gamma)\backslash h(\gamma)=\pi_{m(h)\,\gamma}\left[f(m(h))\backslash h(m(h))\right].$$

由于 $q\leqslant r$, $g(\gamma)\backslash h(\gamma)=\pi_{m(h)\,\gamma}\left[g(m(h))\backslash h(m(h))\right]$, 只需要验证

$$f(\gamma)\backslash g(\gamma)=\pi_{m(h)\,\gamma}\left[f(m(h))\backslash g(m(h))\right].$$

因为 $p\leqslant q$, 所以 $f(m(g))\in S$ 并且 $f(\gamma)\backslash g(\gamma)=\pi_{m(g)\,\gamma}\left[f(m(g))\backslash g(m(g))\right]$. 因 $q\leqslant r$, 应用定义 2.18 之 (6) 到 $f(m(g))\backslash g(m(g))$ 中的元素, 我们得到

$$\begin{aligned}f(\gamma)\backslash g(\gamma)&=\pi_{m(g)\,\gamma}\left[f(m(g))\backslash g(m(g))\right]\\&=\pi_{m(h)\,\gamma}\left[\pi_{m(g)\,\gamma}\left[f(m(g))\backslash g(m(g))\right]\right]\\&=\pi_{m(h)\,\gamma}\left[f(m(h))\backslash g(m(h))\right].\end{aligned}$$

上述最后的等式成立的理由在于定义 2.18 之 (4) 适用于 $p\leqslant q$.

定义 2.18 之 (5): 我们需要树 $T_{f(m(f))}$ 在映射 $\pi_{m(f)\,m(h)}$ 的作用下的投影是 $R_{f(m(h))}$ 的子树. 因为 $p\leqslant q$, 所以 $T_{f(m(f))}$ 在 $\pi_{m(f)\,m(g)}$ 作用下投影到 $S_{g(m(g))}$; 又

由于 $q \leqslant r$, $S_{g(m(g))}$ 在 $\pi_{m(g)\,m(h)}$ 作用下投影到 $R_{g(m(h))}$. 令 $\gamma = m(h)$. 应用 $p \leqslant q$ 的条件 (6), 我们就得到 $p \leqslant r$ 的条件 (5).

定义 2.18 之 (6): 设 $\gamma \in \mathrm{dom}(h)$, $\nu \in \mathrm{HJ}_T(f(m(f)))$, 并且 ν 高于 $f(\gamma)$. 我们来验证等式

$$\pi_{m(f)\,\gamma}(\nu) = \pi_{m(h)\,\gamma}\left(\pi_{m(f)\,m(h)}(\nu)\right).$$

根据 $p \leqslant q$ 之条件 (5), 有 $\pi_{m(f)\,m(g)}(\nu) \in \mathrm{HJ}_S(g(m(g)))$. 令 $\xi = \pi_{m(f)\,m(g)}(\nu)$. 根据 $q \leqslant r$ 的条件 (6),

$$\pi_{m(g)\,\gamma}(\xi) = \pi_{m(h)\,\gamma}\left(\pi_{m(g)\,m(h)}(\xi)\right).$$

应用 $p \leqslant q$ 的条件 (6), 得到

$$\begin{aligned}\pi_{m(f)\,\gamma}(\nu) &= \pi_{m(g)\,\gamma}\left(\pi_{m(f)\,m(g)}(\nu)\right)\\ &= \pi_{m(g)\,\gamma}(\xi)\\ &= \pi_{m(h)\,\gamma}\left(\pi_{m(g)\,m(h)}(\xi)\right).\end{aligned}$$

再次应用 $p \leqslant q$ 的条件 (6), 得到

$$\pi_{m(g)\,m(h)}(\xi) = \pi_{m(g)\,m(h)}\left(\pi_{m(f)\,m(g)}(\nu)\right) = \pi_{m(f)\,m(h)}(\nu).$$

综合起来, 就得到 $\pi_{m(f)\,\gamma}(\nu) = \pi_{m(h)\,\gamma}\left(\pi_{m(f)\,m(h)}(\nu)\right)$.

定义 2.18 之 (7): 设 $i < n(h)$. 那么 $i < n(g)$, 从而 $\sigma(i) \leqslant \tau(i) \leqslant \delta(i)$.

定义 2.18 之 (8): 应用 $q \leqslant r$ 以及 $p \leqslant q$ 之条件 (5), 以及条件 (8), 我们就得到所要的

$$\forall s \in \eta_{m(f)}\left[T_{f(m(f))}\right]\,(J(s) \subset H(s)).$$

定义 2.18 之 (9) 和 (10) 直接由 $q \leqslant r$ 以及 $p \leqslant q$ 之条件 (9) 和 (10) 以及条件 (2) 得到.

这些就验证了 $\leqslant$ 的传递性. □

引理 2.14　设 $q = (g, S, \tau, K) \in P$ 以及 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$. 那么

$$\exists p = (f, T, \sigma, H) \in P\,(p \leqslant^* q \wedge \alpha \in \mathrm{dom}(f)).$$

证明　设 $q = (g, S, \tau, K) \in P$ 以及 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$.

如果 $\alpha \leqslant_E m(g)$, 那么, 当 $\alpha \in \mathrm{dom}(g)$ 时, 则令 $p = q$; 当 $\alpha \notin \mathrm{dom}(g)$ 时, 令 $t \in \mathcal{D}$ 满足 $\max(g(m(g)))$ 不高于 t 这样一个要求, 然后令 $f = g \cup \{(\alpha, t)\}$, 则 $p = (f, S, \tau, K) \in P$, 并且 $p \leqslant^* q$.

设 $\alpha \not\leqslant_E m(g)$. 取一个 $\beta \in A$ 满足要求: $\alpha <_E \beta$, 并且 $m(g) <_E \beta$. 不失一般性, 可以假设 $m(g) <_E \alpha$. 于是, 取 $\beta = \alpha$.

令 $t \in \mathcal{D}$ 满足要求: $\pi_{\alpha\kappa}[t] = g(\kappa)$. 令 $f = g \cup \{(\alpha, t)\}$. 此时 $m(f) = \alpha$.

令 $T_0 = \{ s \mid s \leqslant t \} \cup \pi^{-1}_{\alpha\, m(g)} \left[S_{g(m(g))} \right]$. 令 $p_0 = (f, T_0, \tau, K) \in P$. 我们需要将 T_0 瘦身.

令 $X = \mathrm{HJ}_{T_0}(t)$. 对于 $\nu \in X$, 令

$$Y_\nu = \left\{ \gamma \in \mathrm{dom}(g) \;\middle|\; \gamma \neq m(g) \wedge \nu \text{ 高于 } g(\gamma) \right\}.$$

那么 $|Y_\nu| \leqslant \nu^0$, 因为

$$\pi_{\alpha\, m(g)}(\nu) \in \mathrm{HJ}_S(g(m(g))) \wedge \nu^0 = \pi_{\alpha\kappa}(\nu) = \pi_{m(g)\,\kappa}\left(\pi_{\alpha\, m(g)}(\nu)\right).$$

$q \in P$, 定义 2.17 之 (5) 保证这个不等式成立.

对于 $\nu \in X$ 以及 $\mu \in X$, 如果 $\nu^0 = \mu^0$, 那么 $Y_\nu = Y_\mu$; 如果 $\nu^0 > \mu^0$, 那么 $Y_\mu \subset Y_\nu$. 另外, 如果 $\nu \in X$ 并且

$$\nu^0 = \sup \left\{ \mu^0 \;\middle|\; \mu \in X \cap \nu \right\},$$

那么 $Y_\nu = \bigcup \left\{ Y_\mu \mid \mu \in X \wedge \mu^0 < \nu^0 \right\}$. 这样一来,

$$(\mathrm{dom}(g) - \{m(g)\}) = \bigcup \{ Y_\nu \mid \nu \in X \}.$$

令 $\langle \xi_i \mid i < \kappa \rangle$ 为 $\mathrm{dom}(g) - \{m(g)\}$ 的一个满足下述要求的列表:

$$\forall \nu \in X \left(B_\nu \subset \left\{ \xi_i \;\middle|\; i < \nu^0 \right\} \right).$$

现在对于 $i \in \kappa$, 在 U_α 中取出一个具备下述特点的 C_i:

$$C_i \subset X \wedge \forall \nu \in C_i \left(\pi_{\alpha\xi_i}(\nu) = \pi_{m(g)\,\xi_i}\left(\pi_{\alpha\, m(g)}(\nu)\right)\right).$$

令 $C = X \cap \Delta^*_{i \in X} C_i = \left\{ \nu \in X \;\middle|\; \forall i < \nu^0 \, (\nu \in C_i) \right\}$. 根据事实 2.5.11, U_α 具有弱正规性. 因此, $C \in U_\alpha$.

利用 C 来将 T_0 瘦身: 从 t 开始, 递归地将 T_0 的每一个分裂层都用 C 来相交而得到 T 的相应的分裂层, 比如

$$\{ t + \langle \nu \rangle \in T_0 \mid \nu \in C \}$$

就是 T 中 t 的直接后继节点层.

在经过这样一个瘦身过程后, 我们来验证 $p = (f, T, \tau, K) \leqslant^* q = (g, S, \tau, K)$. 所需要验证的是定义 2.18 中的条件 (6).

设 $\gamma \in \mathrm{dom}(g)$. 如果 $\gamma = m(g)$, 没有什么需要验证的. 故设 $\gamma <_E m(g)$. 令 $i_0 < \kappa$ 来满足等式 $\gamma = \xi_{i_0}$. 假设 $\nu \in C$ 高于 $g(\gamma)$. 那么 $\xi_{i_0} = \gamma \in Y_\nu$. 因为 $Y_\nu \subset \left\{\xi_i \mid i < \nu^0\right\}$, $i_0 < \nu^0$, 所以 $\nu \in C_{i_0}$. 因此

$$\pi_{\alpha\,\xi_{i_0}}(\nu) = \pi_{m(g)\,\xi_{i_0}}\left(\pi_{\alpha\,m(g)}(\nu)\right).$$

条件 (6) 就验证了. 所以 $p \leqslant q$, 从而 $p \leqslant^* q$, 并且 $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$. □

引理 2.15　偏序集 $(P, \leqslant)$ 满足 κ^{++}-链条件.

证明　设 $\{p_\alpha = (f_\alpha, T_\alpha, \tau_\alpha, H_\alpha) \mid \alpha < \kappa^{++}\} \subset P$.

对于 $\alpha < \kappa^{++}$, 令 $g(\alpha) = m(f_\alpha) + 1$; 令

$$X = \left\{\beta < \kappa^{++} \;\middle|\; \forall \alpha < \beta\ (g(\alpha) < \beta)\right\}.$$

那么 X 是 κ^{++} 的一个无界闭子集. 令 $Y = \{\beta \in X \mid \mathrm{cf}(\beta) = \kappa^+\}$. 那么 Y 是 κ^{++} 的一个荟萃子集. 对于 $\alpha \in Y$, 令 $h(\alpha) = \sup(\mathrm{dom}(f_\alpha) \cap \alpha)$. 那么 h 是 Y 上的一个选择函数. 令 $Z \subset Y$ 为一个荟萃子集以至于 h 在 Z 上是一个常值函数. 由于 $(\kappa^+)^\kappa = \kappa^+$, 令 $W \subset Z$ 为一个荟萃子集以至于

$$\exists s\, \forall \alpha \in W\ (\mathrm{dom}(f_\alpha) \cap \alpha = s).$$

由于对每一个 $\alpha \in W$, $(f_\alpha)\restriction_s : s \to \mathcal{D}$, 我们可以不失一般性地假设这些限制函数事实上是同一个函数 f, 即

$$\forall \alpha \in W\ ((f_\alpha) \restriction \alpha = f).$$

进一步地, 再度利用鸽笼原理, 我们可以不失一般性地假设:

$$\forall \alpha \in W\ (f_\alpha(m(f_\alpha)) = t \wedge T_\alpha = T).$$

这样, W 之势为 κ^{++}, 所有以 W 中的元素为下标的 (f_α, T_α) 都有如下共同点: 当它们限制在自己的下标之下的定义域范围上时, 它们是同一个函数 f; 它们在自己定义域的最大元处的取值都为 t; 所有这些下标的树 T_α 事实上是同一棵树 T.

现在来考虑 $\{(\tau_\alpha, H_\alpha) \mid \alpha \in W\}$.

断言一　$|\{(\tau_\alpha, H_\alpha) \mid \alpha \in W\}| \leqslant \kappa^+$.

首先注意到 $|\{\tau_\alpha \mid \alpha \in W\}| \leqslant \kappa$, 于是关键在于 H_α 最大会有什么样的可能性. 由于每一个 H_α 只依赖正规超滤子 U_κ, 因此每一个 H_α 可以看成超幂 $N_\kappa \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U_\kappa)$ 中的 $\mathrm{Col}(\kappa, i_\kappa(\kappa))$ 中的元素. 而在 V 中, $|\mathrm{Col}(\kappa, i_\kappa(\kappa))| = \kappa^+$. 因此, 断言一成立.

根据断言一, 我们可不失一般性地假设: $\forall \alpha \in W\ (\tau_\alpha = \tau \wedge H_\alpha = H)$.

断言二 对于 $\alpha, \beta \in W$, 条件 $p_\alpha = (f_\alpha, T, \tau, H)$ 与 $p_\beta = (f_\beta, T, \tau, H)$ 具有共同的延展条件.

固定 $\alpha, \beta \in W$. 自然可以考虑 $f_\alpha \cup f_\beta$. 这是一个函数. 问题在于

$$\operatorname{dom}(f_\alpha) \cup \operatorname{dom}(f_\beta)$$

之中可能没有 $<_E$ 下的最大元. 取一个 γ 满足 $m(f_\alpha) <_E \gamma$ 以及 $m(f_\beta) <_E \gamma$. 按照前面引理 2.14 证明中的方式将 p_α 延展成 $p_\alpha^* = (f_\alpha^*, S, \tau, H)$, 从而 $\gamma = m(f_\alpha^*)$. 这样 $(f_\alpha^* \cup f_\beta, S, \tau, H) \in P$. 我们需要进一步加工的是将 T_1 瘦身以期满足偏序 $\leqslant$ 定义 (定义 2.18) 中的条件 (5) 和 (6).

先满足条件 (5): 将两棵树 $S_{f_\alpha^*(\gamma)}$ 与 $\pi^{-1}_{\gamma\, m(f_\beta)}[T_t]$ 相交即可, 其中 $t = f_\beta(m(f_\beta))$.

然后在此基础上, 应用前面引理 2.14 证明中的方式进一步瘦身以至于条件 (6) 得到满足. 详细的讨论就留作练习.

这样我们就得到断言二. 因此, 引理得证. □

记号约定 设 $p = (f, T, \sigma, H) \in P$, $\xi = f(\kappa)(i)$.

$$P/p = \{ q \in P \mid q \leqslant p \} \cong (P/p)^{\geqslant \xi} \times (P/p)^{<\xi} .$$

引理 2.16 设 $p = (h, R, \sigma, H) \in P$, $\xi = h(\kappa)(k)$. 那么 $\left((P/p)^{\geqslant\xi}, \leqslant^*\right)$ 是 ξ^{+++}-完备的.

证明 设 $p = (h, R, \sigma, H) \in P$, $\xi = h(\kappa)(k)$. 设 $\mu < \xi^{+++}$ 以及 $\langle p_i \mid i < \mu \rangle$ 为 $(P/p)^{\geqslant\xi}$ 的 $\leqslant^*$-单调递减序列. 对于 $i < \mu$, 令 $p_i = (f_i, T_i, \tau_i, H_i)$. 取 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$ 满足 $\forall i < \mu\ (m(f_i) <_E \alpha)$. 令 $S = \bigcap \left\{ \pi^{-1}_{\alpha\, m(f_i)}[T_i] \;\middle|\; i < \mu \right\}$. 令 $t \in S$ 满足

$$\pi_{\alpha\kappa}[t] = f_0(\kappa) .$$

令 $T = \{ s \mid s \leqslant t \} \cup \left\{ \sigma \in S \;\middle|\; t \leqslant \sigma \wedge \sigma_0^0 > \xi \right\}$. 那么 T 是一棵 (α, t)-树. 令

$$f = \{(\alpha, t)\} \cup \bigcup \{ f_i \mid i < \mu \} .$$

对于每一个 $i < \mu$, 用引理 2.14 证明中的方式对 T 瘦身得到 S_i 以至于有序对 (f, S_i) 与 (f_i, T_i) 满足定义 2.18 的条件 (3),(5) 和 (6). 再令 $T^* = \bigcap \{ S_i \mid i < \mu \}$. 这依旧是一棵 (α, t)-树. 然后再令 $\forall \ell \leqslant n(f)\ (\tau(\ell) = \bigcup \{ \tau_i(\ell) \mid i < \mu \})$, 以及对于 $s \in \eta_\alpha(T^*)$, 令 $H(s) = \bigcup \{ H_i(s) \mid i < \mu \}$. 那么, $q = (f, T^*, \tau, H) \in (P/p)^{\geqslant\xi}$, 并且

$$\forall i < \mu\ (q \leqslant^* p_i) .$$

□

引理 2.17 $(P, \leqslant, \leqslant^*)$ 满足普利克瑞条件, 即对于力迫语言中的任何一个语句 φ, 对于 P 中的任何一个条件 q, 一定有 P 中的一个具备下述特点的条件 p 存在:

(1) $p \leqslant^* q$;

(2) 或者 $p \Vdash \varphi$, 或者 $p \Vdash (\neg\varphi)$.

证明 为了避免使用复杂的记号, 我们不失一般性地假设

$$q = \mathbf{1} = (\{(\kappa, \varnothing)\}, (\mathcal{D}, \leqslant), \{(0, \varnothing)\}, H_0),$$

其中对于 $t \in (C)^{<\omega}$, $H_0(t) = \varnothing$.

设 θ 是一个满足 $\theta^{\kappa^+} = \theta$ 的充分大的正则基数. 令 $N \prec V_\theta$ 为一个势为 κ^+, 并且满足 $N^\kappa \subset N$, 包括所有我们感兴趣的对象集合的同质子模型. 令 $\alpha < \kappa^{++}$ 为满足下述要求的序数:

$$\forall \beta \in A \cap N \ (\beta <_E \alpha).$$

根据事实 2.5.9, $(A, <_E)$ 是 κ^{++}-共顶的, 所以这样的 α 一定存在.

设 T 是一棵 $(\alpha, \varnothing)$-树, 并且 $(\{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, T, \{(0, \varnothing)\}, H_0) \in P$.

如果 N 中有 g, S, τ, H 来满足要求:

(1) $f = \{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\} \cup g$ 是一个控制函数, 并且 $\kappa <_E \mathrm{dom}(g) <_E \alpha$;

(2) $S \subset T$ 是一棵 $(\alpha, \varnothing)$-树;

(3) $p = (f, S, \tau, H) \in P$, 并且或者 $p \Vdash \varphi$, 或者 $p \Vdash (\neg\varphi)$,

那么我们就得到所需要的.

现在假设 N 并无满足上述要求的四元组.

断言一 N 中有满足下述要求的三元组 (g, S, H):

(1) $f = \{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\} \cup g$ 是一个控制函数, 并且 $\kappa <_E \mathrm{dom}(g) <_E \alpha$.

(2) $(f, S, \{(0, \varnothing)\}, H) \leqslant^* (\{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, T, \{(0, \varnothing)\}, H_0)$.

(3) 如果 $N \cap P$ 中有一个满足下述要求的条件 $r = (h, T', \tau, H')$:

$$\alpha = m(h) \wedge r \leqslant (f, S, \{(0, \varnothing)\}, H) \wedge r \Vdash \varphi\, [r \Vdash (\neg\varphi)],$$

那么下述嫁接条件 r^* 也具有同样功能:

(a) 对于 $\gamma \in \mathrm{dom}(g)$, 令 t^γ 为 $\pi_{\alpha\gamma}[h(\alpha)]$ 中高于 $g(\gamma)$ 的最长末端;

(b) 对于 $\gamma \in \mathrm{dom}(f)$, 令

$$f'(\gamma) = \begin{cases} h(\kappa) & \text{如果 } \gamma = \kappa, \\ g(\gamma) + t^\gamma & \text{如果 } \gamma \in \mathrm{dom}(g), \\ h(\alpha) & \text{如果 } \gamma = \alpha; \end{cases}$$

(c) 令 $\tau' = \tau \restriction_{\mathrm{dom}(h(\kappa))} \cup \{(\mathrm{dom}(h(\kappa)), H(h(\kappa)))\}$;

(d) 令 $r^* = \big(f', S_{h(\alpha)}, \tau', H\big)$.

记号约定 称一个函数 g 为一个**中间段**当且仅当 $\forall\beta\in\mathrm{dom}(g)$ $(\kappa<_E\beta<_E\alpha)$, 即 $\kappa<_E\mathrm{dom}(g)<_E\alpha$; 对于一个中间段函数 g, 对于一个 $\mathcal{D}$ 中的元素 b, 记号 $(g)_b$ 表示如下的中间段函数:

(a) 对于 $\gamma\in\mathrm{dom}(g)$, 令 t^γ 为 $\pi_{\alpha\gamma}[b]$ 中高于 $g(\gamma)$ 的最长末端;

(b) 对于 $\gamma\in\mathrm{dom}(g)$, 令 $(g)_b(\gamma)=g(\gamma)+t^\gamma$.

为证断言一, 令 $X=\{\nu\in B\mid\langle\nu\rangle\in\mathrm{HJ}_T(\varnothing)\}$, 并且假设

$$\forall\nu\in X\,\forall\mu\in X\,\left(\nu<\mu\to\nu^0<\mu^0\right).$$

进一步假设 $T\subset(X)^{<\omega}=[X]^{\leqslant\omega}_{<}$.

令 $(a,t,b)\in\Gamma$ 当且仅当 $b\in T$, $a=\pi_{\alpha\kappa}[b]$, $\mathrm{dom}(t)=\mathrm{dom}(a)+1$, 并且, 如果 $a=\langle\tau_0,\cdots,\tau_{n-1}\rangle$, 那么

$$t(0)\in\mathrm{Col}\,(\omega,<\tau_0)\wedge\forall k<n-1\,\left(t(k+1)\in\mathrm{Col}\left(\tau_k^{+++},<\tau_{k+1}\right)\right).$$

那么 $|\Gamma|=\kappa$. 令

$$\{(a_i,t_i,b_i)\mid i<\kappa\}=\Gamma.$$

因为 $\forall\nu\in X\left(\left|\left\{\mu\in X\mid\mu^0=\nu^0\right\}\right|\leqslant\left(\nu^0\right)^{++}\right)$, 所以, 对于 $\nu\in X$,

$$\left|\left\{(a,t,b)\in\Gamma\;\middle|\;\forall k<\mathrm{dom}(a)\;\left(a(k)\leqslant\nu^0\right)\right\}\right|\leqslant\left(\nu^0\right)^{++}.$$

据此, 我们可以假设我们的列表具备下述额外特点: 对于 $\nu\in X$, 总有下述等式

$$\left\{(a_i,t_i,b_i)\;\middle|\;i<\left(\nu^0\right)^{++}\right\}=\left\{(a,t,b)\in\Gamma\;\middle|\;\forall k<\mathrm{dom}(a)\;\left(a(k)\leqslant\nu^0\right)\right\}.$$

在完成这些准备工作之后, 我们来递归地定义四个序列:

$$\left\langle\left(g_i,T^i,f^i,H^i\right)\;\middle|\;i<\kappa\right\rangle.$$

令 $g_0=\varnothing$, $T^0=T$, $f^0=\varnothing$, $H^0=\varnothing$.

假设序列 $\left\langle\left(g_\ell,T^\ell,f^\ell,H^\ell\right)\;\middle|\;\ell<i\right\rangle$ 已经定义好. 我们来定义 $\left(g_i,T^i,f^i,H^i\right)$.

令 $d_i=\bigcup\{g_\ell\mid\ell<i\}$. 对于 $\gamma\in\mathrm{dom}\,(d_i)$, 令

$$e_i(\gamma)=\begin{cases}d_i(\gamma)+t_i^\gamma & \text{若}\left(\begin{array}{l}\exists k\in\mathrm{dom}\,(b_i)\;\left(b_i(k)\,\text{高于}\,d_i(\gamma)\right)\wedge\\ t_i^\gamma\,\text{是}\,\pi_{\alpha\gamma}\,[b_i]\,\text{中高于}\,d_i(\gamma)\,\text{的最长末端}\end{array}\right),\\ d_i(\gamma) & \text{若}\;\forall k\in\mathrm{dom}\,(b_i)\;\left(b_i(k)\,\text{不高于}\,d_i(\gamma)\right).\end{cases}$$

令 $a_i+\eta_\alpha\left(T_{b_i}\right)=\{a_i+t\mid t\in\eta_\alpha\left(T_{b_i}\right)\}$, 其中 $\eta_\alpha\left(T_{b_i}\right)$ 是树 T_{b_i} 在 $\pi_{\alpha\kappa}$ 下的投影 $\pi_{\alpha\kappa}\left[T_{b_i}\right]$. 对于 $\ell<i$, 令

$$a_\ell+\eta_\alpha\left(T^\ell\right)=\left\{a_\ell+t\;\middle|\;t\in\eta_\alpha\left(T^\ell\right)\right\}.$$

对于 $t \in T^0_{b_i}$, 令 $Y = \left\{\ell < i \;\middle|\; a_\ell \leqslant (a_i + t) \wedge (a_i + t) \in \left(a_\ell + \eta_\alpha\left(T^\ell\right)\right)\right\}$.

对于 $\ell \in Y$, 我们有: $a_\ell\left(\operatorname{dom}(a_\ell) - 1\right) \leqslant (a_i + t)\left(\operatorname{dom}(a_i + t) - 1\right)$. 依据列表的性质, 我们有: 对于 $\ell \in Y$, $\ell < \left((a_i + t)\left(\operatorname{dom}(a_i + t) - 1\right)\right)^{++}$. 于是,

$$Y \subset \left((a_i + t)\left(\operatorname{dom}(a_i + t) - 1\right)\right)^{++}.$$

这样, 对于 $a_i + t$, 我们定义

$$H'(a_i + t) = \bigcup\left\{H^\ell(a_i + t) \;\middle|\; \ell \in Y\right\}.$$

从而,

$$H'(a_i + t) \in \operatorname{Col}\left(\left((a_i + t)\left(\operatorname{dom}(a_i + t) - 1\right)\right)^{+++}, < \kappa\right).$$

令 $g'_i(\kappa) = a_i$, $g'(\alpha) = b_i$; 对于 $\gamma \in \operatorname{dom}(e_i)$, 令 $g'(\gamma) = e_i(\gamma)$. 令 $f^i = t_i + H'(a_i)$. 定义 $r^i = \left(g'_i, T_{b_i}, f^i, H'\right)$.

如果 $r^i \notin P$, 或者 $r^i \in P$ 但是 N 中并没有 (h, T', s, H) 满足下述要求:

(i) $\kappa <_E \operatorname{dom}(h) <_E \alpha$;

(ii) $r = \left(\{(\kappa, a_i), (\alpha, b_i)\} \cup h, T', t_i + s, H\right) \leqslant r^i$;

(iii) 或者 $r \Vdash \varphi$, 或者 $r \Vdash (\neg\varphi)$,

那么就令 $g_i = d_i, T^i = T_{b_i}, f^i = H'(a_i)$ 以及 $H^i = H'$. 其他情形下, 则令 (h, T', s, H) 见证上述事实, 并且令

$$g_i = d_i \cup (h - e_i) \wedge T^i = T' \wedge H^i = H \wedge f^i = s.$$

这就完成了递归定义.

令 $g = \bigcup\{g_i \mid i < \kappa\}$.

现在我们利用 $\left\langle T^i \;\middle|\; i < \kappa\right\rangle$ 来定义 T 的一棵子树 S: 设 t 已经被选入 S, 其长度为 n. 令

$$\mathrm{HJ}_S(t) = \left\{\nu \in X \;\middle|\; \forall i < \nu^0 \begin{pmatrix} \nu \in \mathrm{HJ}_{T^i}(\varnothing) \wedge \\ \left(t \in T^i \to \nu \in \mathrm{HJ}_{T^i}(t)\right) \end{pmatrix}\right\}.$$

这样, $\mathrm{HJ}_S(t) \in U_\alpha$.

接下来我们将 H^i 联合起来定义在树 $\eta_\alpha(S)$ 上的函数 H.

设 $t \in \eta_\alpha(S)$. 令 $Y = \left\{\ell < \kappa \;\middle|\; a_\ell \subset tin\left(a_\ell + \eta_\alpha\left(T^\ell\right)\right)\right\}$. 令 $k = \operatorname{dom}(t) - 1$. 那么

$$\forall \ell \in Y\ \left(a_\ell\left(\operatorname{dom}(a_\ell) - 1\right) \leqslant t(k)\right).$$

根据列表的性质, 就有: $\forall \ell \in Y\ \left(\ell < (t(k))^{++}\right)$. 也就是说, $Y \subset (t(k))^{++}$. 据此, 定义 $H(t) = \bigcup\left\{H^\ell(t) \;\middle|\; \ell \in Y\right\}$. 于是, $H(t) \in \operatorname{Col}\left((t(k))^{+++}, < \kappa\right)$.

事实 2.5.12 $\kappa <_E \mathrm{dom}(g) <_E \alpha$, 并且 $(\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\}\cup g, S, \{(0,\varnothing)\}, H)\in P$.

第一个结论是自然的, 因为 $\mathrm{dom}(g)$ 中的每一个 β 都来自某个 $\mathrm{dom}\,(g_i)$, 从而 $\kappa <_E \beta <_E \alpha$.

令 $f=\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\}\cup g$. 我们来证明 $(f,S,\{(0,\varnothing)\},F)\in P$.

关键点是验证: $\forall\nu\in \mathrm{HJ}_S(\varnothing)\ \left|\left\{\gamma\in\mathrm{dom}(g)\ \middle|\ \nu \text{ 高于 } g(\gamma)\right\}\right|\leqslant \nu^0$. 其他的都不是问题.

为此, 设 $\nu\in\mathrm{HJ}_S(\varnothing)$ 以及 $i<\kappa$. 如果 $(a_i,t_i,b_i)\in\Gamma$ 满足条件 $\max\,(a_i)<\nu^0$, 那么 $i<\max\,(a_i)^{++}<\nu^0$. 因此, 对于每一个 $\nu^0\leqslant i<\kappa$ 而言, ν 都不高于 a_i. 这样, 在经过 ν^0 步之后, 我们便不会添加新的满足条件 "ν 高于 $g_i(\gamma)$" 的序数 γ 进 $\mathrm{dom}(g)$. 于是,

$$\left\{\gamma\in\mathrm{dom}(g)\ \middle|\ \nu \text{ 高于 } g(\gamma)\right\}=\bigcup_{i<\nu^0}\left\{\gamma\in\mathrm{dom}\,(g_i)\mid \nu \text{ 高于 } g(\gamma)\right\}.$$

这就证明了我们所要的不等式.

事实由此得证.

用 p^* 来记条件 $(f,S,\{(0,\varnothing)\},H)$, 其中 $f=\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\}\cup g$.

由于 $N^\kappa\subset N$, $(g,S,H)\in N$. 现在我们来证明这个三元组 (g,S,H) 满足断言一的要求.

(1) 已知: $f=\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\}\cup g$ 是一个控制函数, 并且 $\kappa <_E \mathrm{dom}(g) <_E \alpha$.

(2) 自然得到满足: $(f,S,\{(0,\varnothing)\},H)\leqslant^* (\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\},T,\{(0,\varnothing)\},H_0)$.

我们需要验证 (3). 设条件 $r=(h,T',\tau,H')\in N\cap P$ 满足下述要求:

$$\alpha=m(h)\ \wedge\ r\leqslant(f,S,\{(0,\varnothing)\},H)\ \wedge\ r\Vdash\varphi\,[r\Vdash(\neg\varphi)].$$

设 $h(\kappa)=\langle\xi_1,\cdots,\xi_n\rangle$ 以及 $\tau=\langle t_0,t_1,\cdots,t_n\rangle$. 此时我们一定有 $n>0$, 如若不然, 我们便有 $r\leqslant *p^*$, 因而 $r\leqslant^* (\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\},T,\{(0,\varnothing)\},H_0)$, 并且 r 确定了 φ 在泛型扩张中的真假, 这不符合我们的假设.

让我们考虑对 r 与 p^* 的嫁接所得到的 r^*.

令 $i<\xi_n^{++}$ 来实现等式: $a_i=h(\kappa)$, $b_i=h(\alpha)$, $t_i=\langle t_0,t_1,\cdots,t_{n-1}\rangle$. 考虑在第 i 步定义的条件

$$r^i=\left(e_i\cup\{(\kappa,a_i),(\alpha,b_i)\},T_{b_i},(t_i+H'(a_i)),H'\right),$$

有 $r=(h,T',\tau,H')\leqslant^* r^i$. 根据在第 i 步的结论,

$$\left(\{(\kappa,a_i),(\alpha,b_i)\}\cup(g_i)_{b_i},T_{b_i},t_i+f^i,H^i\right)\Vdash\varphi\,[\vee(\neg\varphi)].$$

于是

$$\left(\{(\kappa,h(\kappa)),(\alpha,h(\alpha))\}\cup(g)_{h(\alpha)},S_{h(\alpha)},\langle t_0,\cdots,t_{n-1},H(h(\kappa))\rangle,H\right)\Vdash\varphi\;[\vee(\neg\varphi)].$$

因此按照断言中的方式嫁接所得到的 r^* 满足要求.

这就证明了断言一.

令 $p^*=(f,S,\{(0,\varnothing)\},H)$, 其中 $f=\{(\kappa,\varnothing),(\alpha,\varnothing)\}\cup g$, 由断言一所提供.

断言二　存在一个具备下述特点的 $p^{**}=\left(f,T^*,\{(0,\varnothing)\},H\restriction_{\eta_\alpha(T^*)}\right)\leqslant^* p^*$:

$$\neg\left(\exists(h,a,b,T',t,H')\in N\ (r=(h\cup\{(\kappa,a),(\alpha,b)\},T',t,H')\leqslant p^{**}\ \wedge\ r\|\varphi)\right),$$

其中,

$$(h,T',t,H')\,\|\varphi\leftrightarrow((h,T',t,H')\Vdash\varphi\ \vee\ (h,T',t,H')\Vdash(\neg\varphi)).$$

我们递归地构造 p^* 的直接延展的 $\leqslant^*$-单调递减序列 $\langle p(\ell)\mid\ell\leqslant\omega\rangle$ 来实现下述愿望: 对于每一个 $\ell\leqslant\omega$, 都有下述命题 δ_ℓ 成立:

$$\neg\left(\exists(h,a,b,T',t,H')\in N\left(\begin{array}{l}r'=(h\cup\{(\kappa,a),(\alpha,b)\},T',t,H')\leqslant p(\ell)\wedge\\ \mathrm{dom}(a)\leqslant\ell\ \wedge\ r'\|\varphi\end{array}\right)\right).$$

在完成这样的递归构造之后, $p(\omega)$ 就是所要的 p^{**}.

$p(0)=p^*$. $p(1)$ 将是 $\left(f,T_1,\{(0,\varnothing)\},H\restriction_{\eta_\alpha(T_1)}\right)$, 其中 T_1 定义如下:

考虑下面的三个集合: 对于 $\nu\in\mathrm{HJ}_S(\varnothing)$,

$$\begin{array}{l}\nu\in Y_0\leftrightarrow\\ \exists f_0^\nu\in\mathrm{Col}(\omega,<\nu^0)\ \left((g)_{\langle\nu\rangle}\cup\left\{\left(\kappa,\left\langle\nu^0\right\rangle\right),(\alpha,\langle\nu\rangle)\right\},S_{\langle\nu\rangle},f_0^\nu+H\left(\left\langle\nu^0\right\rangle\right),H\right)\Vdash\varphi,\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\nu\in Y_1\leftrightarrow\\ \exists f_0^\nu\in\mathrm{Col}(\omega,<\nu^0)\ \left((g)_{\langle\nu\rangle}\cup\left\{\left(\kappa,\left\langle\nu^0\right\rangle\right),(\alpha,\langle\nu\rangle)\right\},S_{\langle\nu\rangle},f_0^\nu+H\left(\left\langle\nu^0\right\rangle\right),H\right)\Vdash\neg\varphi,\end{array}$$

以及 $\nu\in Y_2\leftrightarrow\nu\notin(Y_0\cup Y_1)$.

令 $k<3$ 满足 $Y_k\in U_\alpha$. 令 T_1' 为将 S 的每一层都与 Y_k 相交之后所得到的子树. 令

$$r=\left(f,T_1',\{(0,\varnothing)\},H\restriction_{\eta_\alpha(T_1')}\right).$$

如果 N 中没有 (h,t,ν,T',H') 来实现

$$q=\left(h\cup\left\{\left(\kappa,\left\langle\nu^0\right\rangle\right),(\alpha,\langle\nu\rangle)\right\},T',t,H'\right)\leqslant r\ \wedge\ q\|\varphi,$$

那么就令 $T_1=T_1'$, 以及 $p(1)=r$.

现在我们来论证 N 的确没有那样的五元组 (h,t,ν,T',H').

假设不然. 设 $(h, \langle f_0, f_1\rangle, \nu, T', H') \in N$ 实现, 比如说,

$$q = \left(h \cup \left\{\left(\kappa, \left\langle \nu^0\right\rangle\right), (\alpha, \langle\nu\rangle)\right\}, T', \langle f_0, f_1\rangle, H'\right) \leqslant r \wedge q \Vdash \varphi.$$

根据断言一,

$$\left((g)_{\langle\nu\rangle} \cup \left\{\left(\kappa, \left\langle \nu^0\right\rangle\right), (\alpha, \langle\nu\rangle)\right\}, (T_1')_{\langle\nu\rangle}, f_0 + H\left(\nu^0\right), H\right) \Vdash \varphi.$$

由 T_1' 的选择, $X_0 \in U_\alpha$. 因此, 对每一个 $\nu \in \mathrm{HJ}_{T_1}(\varnothing)$, 必有一个 $f_0^\nu \in \mathrm{Col}\left(\omega, <\nu^0\right)$ 来实现

$$\left((g)_{\langle\nu\rangle} \cup \left\{\left(\kappa, \left\langle \nu^0\right\rangle\right), (\alpha, \langle\nu\rangle)\right\}, (T_1')_{\langle\nu\rangle}, f_0^\nu + H\left(\nu^0\right), H\right) \Vdash \varphi.$$

注意, 从 ν^0 到 f_0^ν 的映射事实上是 $\pi_{\alpha\kappa}[Y_0]$ 上的本质上的选择函数 (因为 f_0^ν 是有限的). 令 $Y \in U_\alpha$ 以及 $t^* \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 来满足 $\forall \nu \in Y\ (f_0^\nu = t^*)$. 令 T_1 为将 T_1' 的每一层都与 Y 相交之后所得到的树; 令 $H_1 = H\restriction_{\eta_\alpha[T_1]}$; 然后令

$$p(1) = (f, T_1, t^*, H_1).$$

这样一来, $p(1) \leqslant^* p^*$, 并且 $p(1) \Vdash \varphi$. 这就是一个矛盾. 这个矛盾表明在 N 中的确没有那样的五元组. 从而, $p(1) = r$, 以及 $T_1 = T_1'$.

现在让我们来寻求 T_2 以便定义 $p(2) = \left(f, T_2, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T_2)}\right)$.

固定 $\nu \in \mathrm{HJ}_{T_1}(\varnothing)$. 令

$$\Gamma = \left\{(t, \xi) \in \mathrm{Col}\left(\omega, <\nu^0\right) \times \mathrm{HJ}_{T_1}(\varnothing) \;\middle|\; \xi^0 = \nu^0\right\}.$$

令 $\left\{(t_i, \xi_i) \mid 1 \leqslant i < \left(\nu^0\right)^{++}\right\} = \Gamma$.

对于 $\mathrm{HJ}_{T_1}(\varnothing)$ 中的满足 $\xi^0 = \nu^0$ 的每一个 ξ, 我们希望定义 $(T_2)_{\langle\xi\rangle}$. 为此, 我们如下递归地定义 S_i $\left(i < \left(\nu^0\right)^{++}\right)$:

令 $S_0 = (T_1)_{\langle\nu\rangle}$.

设对于 $\ell < i$, S_ℓ 已经定义好. 令 $S^* = (T_1)_{\langle\xi_i\rangle} \cap \bigcap\{S_\ell \mid \ell < i\}$. 考虑下面的条件:

$$r = \left((g)_{\langle\xi_i\rangle} \cup \left\{\left(\kappa, \nu^0\right), (\alpha, \xi_i)\right\}, S^*, \left(t_i + H\left(\left\langle\nu^0\right\rangle\right)\right), H\restriction_{\eta_\alpha(S^*)}\right).$$

由定义可知 $r \leqslant p(1)$. 由 $p(1)$ 的选择, 无论是 r, 还是 r 的直接延展都不能确定 φ 的真假. 将从 $p(0)$ 得到 $p(1)$ 的构造变迁到从 r 开始的构造, 我们就可以得到

$$r^i = \left((g)_{\langle\xi_i\rangle} \cup \left\{\left(\kappa, \nu^0\right), (\alpha, \xi_i)\right\}, S_i, \left(t_i + H\left(\left\langle\nu^0\right\rangle\right)\right), H\restriction_{\eta_\alpha(S_i)}\right) \leqslant^* r,$$

以至于 r^i 还具备如下特点: N 中没有 $(h, \mu, S', f_1, f_2, H')$ 来见证

$$q = \left(h \cup \left\{\left(\kappa, \left\langle\mu^0\right\rangle\right), (\alpha, \mu)\right\}, S', \langle, f_1, f_2\rangle, H'\right) \leqslant r \wedge q \| \varphi,$$

从而

$$r_1 = \left((g)_{\langle\xi_i,\mu\rangle} \cup \left\{\left(\kappa, \left\langle\nu^0, \mu^0\right\rangle\right), (\alpha, \langle\xi_i, \mu\rangle)\right\}, S', \langle t_i, f_1, f_2\rangle, H'\right) \leqslant r \wedge r_1 \| \varphi.$$

然后, 令 $(T_2)_{\langle\nu^0\rangle} = \bigcap\left\{S_\ell \,\middle|\, \ell < \left(\nu^0\right)^{++}\right\}$. 最后, 将由 $(T_1)_{\langle\nu\rangle}$ 得到 T_1 的过程应用到由每一个 $\nu \in \mathrm{HJ}_{T_1}(\varnothing)$ 所给定的 $(T_2)_{\langle\nu^0\rangle}$ 来定义 T_2 上, 并且在此基础上, 令

$$p(2) = \left(f, T_2, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T_2)}\right).$$

这样得到的 $p(2)$ 就使得命题 δ_2 成立.

我们继续这样的过程, 对于每一个 $2 \leqslant n < \omega$, 构造一棵树 T_n 以至于条件

$$p(n) = \left(f, T_n, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T_n)}\right)$$

使得命题 δ_n 成立.

最后, 令 $T_\omega = \bigcap\{T_n \mid n < \omega\}$, 以及令 $p(\omega) = \left(f, T_\omega, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T_\omega)}\right)$. 此条件 $p(\omega)$ 使得每一个命题 $\delta_n\,(n < \omega)$ 都成立, 从而也就令 δ_ω 成立.

令 $p^{**} = p(\omega)$. 这就是断言二所要求的.

断言二因此得证.

断言三 设 $p^{**} = \left(f, T^*, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T^*)}\right)$ 由断言二给定. 那么

$$\neg\left(\exists\left(h, a, b, T', t, H'\right)\left(r = \left(h \cup \{(\kappa, a), (\alpha, b)\}, T', t, H'\right) \leqslant p^{**} \wedge r \| \varphi\right)\right).$$

假设不然. 令 (h, a, b, T', t, H') 见证

$$\left(r = \left(h \cup \{(\kappa, a), (\alpha, b)\}, T', t, H'\right) \leqslant p^{**} \wedge r \| \varphi\right).$$

因为 $N^\kappa \subset N$, 所以 $h, a, b, t \in N$. 令 $\beta \in N \cap A$ 来满足要求: $\forall \gamma \in \mathrm{dom}(h)\ (\gamma <_E \beta)$. 这样的 β 存在, 因为 $N \models (A, <_E)$ 是 κ^{++}-共顶的, 以及 $|\mathrm{dom}(h)| \leqslant \kappa$.

现在我们用 β 取代 α 来重复前面的一些讨论.

首先, 我们应用引理 2.14 证明中的过程将树 T^* 瘦身到一棵具备下述特点的树 T^{**}:

$$\forall \nu \in \mathrm{HJ}_{T^{**}}(\varnothing)\, \forall \gamma \in \mathrm{dom}(h)\ \left(\left(\nu\ \text{高于}\ h(\gamma)\right) \to \pi_{\alpha\gamma}(\nu) = \pi_{\beta\gamma}\left(\pi_{\alpha\beta}(\nu)\right)\right).$$

然后将树 T^{**} 经函数 $\pi_{\alpha\beta}$ 投影到 β 上得到树 T^{***}. 令 $h^* = h \cup \{(\beta, \varnothing)\}$. 那么 $h^* \in N$. 令

$$p^{***} = \left(h^* \cup \{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, T^{***}, \{(0, \varnothing)\}, H\restriction_{\eta_\alpha(T^{***})}\right).$$

那么 $p^{***} \leqslant^* p^{**}$. 由于 N 是一个同质子模型, 令 $q \in N$ 满足 $q \leqslant p^{***}$ 并且 $q \| \varphi$, 比如 $q \Vdash \varphi$. 设 $q = (e, S, \tau, F)$. 由于 $e(m(e)) \in T^{***}$, 令 $t \in T^{**}$ 满足

$$e(m(e)) = \pi_{\alpha\beta}[t].$$

注意, $m(e) <_E \alpha$. 考虑树 $T_t^{**} \cap \pi_{\alpha\, m(e)}^{-1}[S]$. 应用引理 2.14 证明中的过程将它瘦身到一棵具备下述特点的树 R :

$$\forall \nu \in \mathrm{HJ}_R(\varnothing)\, \forall \gamma \in \mathrm{dom}(e)\, \left((\nu \text{ 高于 } e(\gamma)) \to \pi_{\alpha\gamma}(\nu) = \pi_{m(e)\,\gamma}\left(\pi_{\alpha\, m(e)}(\nu)\right) \right).$$

考虑条件 $\left(e \cup \{(\alpha, t)\}, R, \tau, F\restriction_{\eta_\alpha(R)}\right)$. 这是一个延展 q 的条件, 并且力迫 φ. 这与断言二相矛盾.

这就完成了引理的证明. □

设 G 是 V 上的一个 $(P, \leqslant)$-泛型超滤子. 对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, 令

$$G^\alpha = \bigcup \{\, f(\alpha) \mid (f, T, t, H) \in G\}.$$

引理 2.18 (1) 对于 $\kappa \leqslant \alpha < \kappa^{++}$, G^α 是 U_α 的一个具备下述特点的序列: G^α 的序型为 ω; 并且 $\forall Y \subset B\ (Y \in U_\alpha \to |G^\alpha - Y| < \omega)$.

(2) G^κ 是一个在 κ 中无界的序列;

(3) 如果 $\kappa \leqslant \alpha < \beta < \kappa^{++}$, 那么 $G^\alpha \neq G^\beta$.

证明 (1) 由偏序集 $(P, \leqslant)$ 的定义以及引理 2.14 直接给出.

(2) 只是 (1) 的特殊情形.

(3) 给定 $\kappa \leqslant \alpha < \beta < \kappa^{++}$, 令 $\gamma < \kappa^{++}$ 满足 $\alpha <_E \gamma$ 以及 $\beta <_E \gamma$. 根据引理 2.8,

$$\{\nu \in B \mid \pi_{\gamma\alpha}(\nu) < \pi_{\gamma\beta}(\nu)\} \in U_\gamma.$$

由此以及偏序集 $(P, \leqslant)$ 的定义, $\left\{m < \omega \;\middle|\; G^\beta(m) \leqslant G^\alpha(m)\right\}$ 是一个有限集合. □

引理 2.19 κ^+ 在 V 的 $(P, \leqslant)$-泛型扩张中依旧是一个基数.

证明 假设不然. 设 G 是 V 上的 $(P, \leqslant)$-泛型超滤子. 在泛型扩张 V$[G]$ 中 $(\kappa^+)^{\mathrm{V}}$ 的梯度变成某个 $\mu < \kappa$.

设 $g : \mu \to (\kappa^+)^{\mathrm{V}}$ 为 $V[G]$ 中的在 $\delta = (\kappa^+)^{\mathrm{V}}$ 中无界的函数.

不妨假设

$$\mathbf{1} \Vdash \dot{g} : \check{\mu} \to \check{\delta} \text{ 无界}.$$

如同引理 2.17 的证明那样固定同质子模型 N. 令 $\alpha < \kappa^{++}$ 具备下述特点:

$$\forall \beta \in N \cap A\ (\beta <_E \alpha).$$

取一棵树 T 来实现

$$p = (\{(\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, T, \{(0, \varnothing)\}, H) \in P.$$

同引理 2.17 的证明那样, 递归地选取中间函数段 h_i 以及树 S^i 来得到一个具备下述特点的在关系 $\leqslant^*$ 之下的从 p 开始的 $\leqslant^*$-单调递减序列

$$\left\langle \left(\{h_i \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^i, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S^i)}\right) \mid i < \mu \right\rangle.$$

(a) $h_i \in N$;

(b) 如果存在 $(h, R, t, b, F) \in N$ 以及 $\xi < \kappa^+$ 来见证下述事实:

$$\begin{aligned} & r = (\{h \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, b)\}, R, t, F) \in P \wedge \\ & r \leqslant \left(\{h_i \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^i, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(T^i)}\right) \wedge \\ & r \Vdash \left(\dot{g}(\check{i}) = \check{\xi}\right), \end{aligned}$$

那么 $\left(\{(h_i)_b \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^i, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S^i)}\right) \Vdash \left(\dot{g}(\check{i}) = \check{\xi}\right)$.

令 $h = \bigcup \{h_i \mid i < \mu\}$. 那么 $h \in N$. 取一棵树 S 来实现下述要求:

$$\forall i < \mu \left(\begin{array}{l} \left(\{h \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S)}\right) \\ \leqslant^* \left(\{h_i \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^i, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S^i)}\right) \end{array} \right).$$

同引理 2.17 的证明那样, 取 $\beta \in N \cap A$ 来实现 $\forall \gamma \in \mathrm{dom}(h)\ (\gamma <_E \beta)$. 令 S^* 为树 S 在映射 $\pi_{\alpha\beta}$ 之下的到 β 上的投影树. 令

$$p^* = \left(h \cup \{(\kappa, \varnothing), (\beta, \varnothing)\}, S^*, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\beta(S^*)}\right).$$

那么 $p^* \in N$, 并且

$$\begin{aligned} & \left(h \cup \{(\kappa, \varnothing), (\beta, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^*, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\beta(S^*)}\right) \\ \leqslant^* & \left(\{h \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S)}\right). \end{aligned}$$

因为 N 是同质子模型, 所以, 对于每一个 $i < \mu$, N 中必有一个条件 $q \in N \cap P$ 来满足要求: $q \leqslant^* p^*$, 并且 q 确定 $\dot{g}\left(\check{i}\right)$ 的取值. 根据序列

$$\left\langle \left(\{h_i \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S^i, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S^i)}\right) \mid i < \mu \right\rangle$$

的性质 (b), 便可知 S 中有一个 t 以及有一个 $\xi < \kappa^+$ 来保证

$$\left(\{(h)_t \cup (\kappa, \varnothing), (\alpha, \varnothing)\}, S, \{(0, \varnothing)\}, H \restriction_{\eta_\alpha(S)}\right) \Vdash \left(\dot{g}\left(\check{i}\right) = \check{\xi}\right).$$

因为 $|S| = \kappa$, 所有这些可能的 ξ 的集合之势不会超过 κ, 从而必被某个 $\gamma < \kappa^+$ 所包括. 但这就意味着矛盾, 因为 $\kappa^+ \subset N$,

$$N \models \left(\mathbf{1} \Vdash \dot{g} : \check{\mu} \to \check{\delta}\text{无界}\right).$$

于是引理得证. □

引理 2.20 令 $G^\kappa = \langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为一个单调递增列表; 对于 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$, 令

$$G^\alpha = \langle \nu_n(\alpha) \mid n < \omega \rangle$$

为一个单调递增列表. 那么, 对于 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$ 都有一个 $k(\alpha) < \omega$ 来见证下述事实:

(1) 或者 $\left\{n < \omega \;\middle|\; \nu^0_{n+k(\alpha)}(\alpha) \neq \kappa_n\right\}$ 是有限集合;

(2) 或者 $\left\{n < \omega \;\middle|\; \nu^0_n(\alpha) \neq \kappa_{n+k(\alpha)}\right\}$ 是有限集合.

证明 应用 G 的泛型特性. 我们将找出合适的稠密子集的工作留作练习. □

对于 $\kappa < \alpha < \kappa^{++}$, 定义如下迁移变换: 对于 $n < \omega$, 令

$$\mu_n(\alpha) = \begin{cases} \nu_{n+k(\alpha)}(\alpha) & \text{如果引理 2.20 中的 (1) 成立}, \\ \nu_{n-k(\alpha)}(\alpha) & \text{如果引理 2.20 中的 (2) 成立, 并且 } n \geqslant k(\alpha), \\ \kappa_n & \text{如果引理 2.20 中的 (2) 成立, 并且 } n < k(\alpha). \end{cases}$$

这样, $\forall n < \omega \; \left(\mu^0_n(\alpha) = \kappa_n\right)$.

引理 2.21 如果 $\aleph_0 < \tau < \kappa$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个基数, 那么

$$\exists n < \omega \; \left(\tau \in \left\{\kappa_n, \kappa_n^+, \kappa_n^{++}, \kappa_n^{+++}\right\}\right).$$

证明 (练习.) □

综合上述引理, 我们得到下面的定理:

定理 2.12 (Gitik-Magidor-Woodin) 在 V 的 $(P, \leqslant)$-泛型超滤子扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 下述命题成立:

$$\left(\forall n < \omega \; \left(2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}\right)\right) \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}.$$

2.6 恰当力迫扩张

自马丁公理被提炼出来之后, 人们自然希望得到类似的但作用范围更为广泛一些的 "公理". 我们在这里展示鲍姆嘎特勒 (James Baumgartner) 所提炼的恰当力迫公理 PFA[8]. 在谢旯的恰当力迫构思[9]的基础上, 鲍姆嘎特勒在 1984 年发表的文

8 Proper Forcing Axiom.

9 S. Shelah, "Proper Forcing", Lecture Notes in Mathematics 940, Springer-Verlag, Berli-New York, 1982.

章[10]中明确提出 PFA , 并且证明了 PFA 相对于超紧基数的合理性. 谢旯引进恰当力迫构思的动机是要找到一个在力迫扩张中对可数支撑迭代力迫封闭的极大偏序类. 谢旯的分析表明保持所有可数范围上的荟萃集特性就是一个恰当的识别标准.

2.6.1 恰当力迫构思

事发的起因是谢旯希望弄清楚什么样的力迫构思经过可数支撑迭代之后不会将 ω_1 可数化. 谢旯发现迭代中使用的力迫构思是否保持原有的荟萃子集的荟萃性质是一个关键的问题. 所以, 一个自然的问题便是: 什么样的力迫构思会保持什么样的子集合的荟萃特性?

对于不可数的正则基数 κ 而言, 我们非常关心它的两类子集合. 一类是它的无界闭子集, 另一类就是它的荟萃子集. 性质 “C 是 κ 的无界闭子集” 是 κ 上的一个一阶的 Π_1 性质 “C 是 κ 的无界闭子集” 当且仅当

$$(\kappa, \in) \models \forall \alpha\, ((\exists \beta \in C\, (\alpha \leqslant \beta)) \wedge ((\forall \gamma < \alpha\, \exists \beta \in C\, (\gamma \leqslant \beta < \alpha)) \to \alpha \in C)).$$

由于 Σ_0 性质对于传递模型而言是绝对不变的, 对于满足不等式 $N \subset M$ 的两个传递模型 N 和 M 而言, 所有的 Π_1 性质都是从 N 到 M 不变的. 因此, 性质 “C 是 κ 的无界闭子集” 从基础模型 V 到力迫扩张模型 V$[G]$ 就不会发生变化: 如果在 V 中, C 是 κ 的无界闭子集, 那么在 V$[G]$ 中, C 依旧是 κ 的无界闭子集 (就算 κ 的梯度发生了变化也依然如此). 但是, 性质 “S 是 κ 的荟萃子集” 却是 κ 的一个二阶的 Π^1_1 性质. 这自然意味着从基础模型到力迫扩张模型时某些子集合的荟萃特性就有可能被破坏: 某个新添加进来的无界闭子集可能完全回避了某个基础模型中的荟萃子集, 比如例 II 3.13.

我们先来看谢旯展开他的分析之前就广为人知的例子.

命题 2.1 设 κ 是一个不可数的正则基数.

(1) 如果 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个满足 κ-链条件的力迫构思, $\dot{C}$ 是 κ 的一个无界闭子集的名字, 即

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{C}\ \text{是}\ \check{\kappa}\ \text{的一个无界闭子集},$$

那么对于任意的条件 $p \in P$, 必定存在 κ 的一个无界闭子集 $D \subset \kappa$ 来保证下述事实成立:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \check{D} \subset \dot{C}.$$

从而如果 $S \subset \kappa$ 是一个荟萃集合, 那么 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{S}$ 还是 $\check{\kappa}$ 的荟萃子集.

10 J. E. Baumgartner, Applications of the Proper Forcing Axiom. In “Handbook of Set-Theoretic Topology”, (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.) North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1984, 913-959.

(2) 如果 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个 $<\kappa$-闭合 (任何长度为 $<\kappa$ 的单调递减的条件序列必有一个下界) 的力迫构思, $S \subset \kappa$ 是一个荟萃集合, 那么 $\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{S}$ 是 $\check{\kappa}$ 的荟萃子集.

证明　(1) 设 $\dot{C}$ 是一个无界闭子集的名字, 并且 $\mathbf{1} \Vdash \dot{C}$ 是 $\check{\kappa}$ 的一个无界闭子集. 令

$$D = \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; \mathbf{1} \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C} \right\}.$$

那么 $\mathbf{1} \Vdash \check{D} \subset \dot{C}$.

D 自然是闭的. 关键是证明 D 在 κ 中无界. 给定 $\alpha_0 < \kappa$. 我们有

$$\forall p \in P \, \exists q \in P \, \exists \beta < \kappa \left(\alpha_0 < \beta \wedge q \Vdash \check{\beta} \in \dot{C} \right).$$

令 W_0 为一个极大冲突子集以至于

$$\forall q \in W_0 \, \exists \beta_q \, \left(\alpha_0 < \beta_q \wedge q \Vdash \check{\beta}_q \in \dot{C} \right).$$

由于 $|W_0| < \kappa$, 令 $\alpha_1 = \sup \{ \beta_q \mid q \in W_0 \}$. 那么 $\alpha_0 < \alpha_1 < \kappa$, 并且

$$\mathbf{1} \Vdash \exists \beta \left(\beta \in \dot{C} \wedge \check{\alpha}_0 < \beta \leqslant \check{\alpha}_1 \right).$$

递归地, 得到极大冲突子集 W_n 以至于

$$\forall q \in W_n \, \exists \beta_q \, \left(\alpha_n < \beta_q \wedge q \Vdash \check{\beta}_q \in \dot{C} \right).$$

令 $\alpha_{n+1} = \sup \{ \beta_q \mid q \in W_n \}$. 那么 $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \kappa$, 并且

$$\mathbf{1} \Vdash \exists \beta \left(\beta \in \dot{C} \wedge \check{\alpha}_n < \beta \leqslant \check{\alpha}_{n+1} \right).$$

令 $\alpha = \sup \{ \alpha_n \mid n < \omega \}$. 那么 $\mathbf{1} \Vdash \check{\alpha} \in \dot{C}$. 从而, $\alpha \in D$ 满足 $\alpha > \alpha_0$.

(2) 设 $p \Vdash \dot{C}$ 是一个无界闭子集. 设 $S \subset \kappa$ 是一个荟萃子集. 应用 $\mathbb{P}$ 的 $<\kappa$-闭合性质, 递归地构造一个长度为 κ 的单调递增连续的序数序列

$$\langle \gamma_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle,$$

以及一个单调递减的条件序列

$$\langle p_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$$

以至于 $p_0 = p$, 对于每一个 $\alpha < \kappa$ 都有 $p_{\alpha+1} \Vdash \check{\gamma}_{\alpha+1} \in \dot{C}$; 并且当 $\alpha < \kappa$ 是极限序数时,

$$\gamma_\alpha = \sup \{ \gamma_\beta \mid \beta < \alpha \} \text{ 以及 } \forall \beta < \alpha \ (p_\alpha \leqslant p_\beta).$$

由于序数序列 $\langle\gamma_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle$ 是一个单调递增连续序列, 它的值域是一个无界闭子集, 因此与荟萃集 S 有非空的交. 令 $\alpha<\kappa$ 为一个极限序数以至于 $\gamma_\alpha\in S$. 那么

$$p_\alpha \Vdash \check{\gamma}_\alpha \in \dot{C}. \qquad \square$$

上述命题可以被推广到可数范围之上.

引理 2.22 设 κ 是一个不可数的基数.

(1) 如果 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 是一个满足 ω_1-链条件的力迫构思, G 是 V 之上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, C 是 $\mathrm{V}[G]$ 中的 $[\kappa]^\omega$ 的一个无界闭子集, 那么必有 V 中的 $[\kappa]^\omega$ 的一个无界闭子集 D 来满足不等式 $D\subset C$. 从而如果 $S\subset[\kappa]^\omega$ 是一个荟萃集合, 那么 S 在 $\mathrm{V}[G]$ 中依旧是 $[\kappa]^\omega$ 的荟萃子集.

(2) 如果 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 是一个 σ-闭合的力迫构思, $S\subset[\kappa]^\omega$ 是一个荟萃集合, 那么在 V 的 $\mathbb{P}$ 力迫扩张模型中 S 还是 $[\kappa]^\omega$ 的荟萃子集.

证明 (1) 设 $p\Vdash\dot{C}$ 是无界闭子集; $\dot{f}$ 是一个从 $[\kappa]^{<\omega}$ 到 κ 的函数的名字, 并且

$$p\Vdash C\left(\dot{f}\right)\subset\dot{C},$$

其中, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中,

$$C\left(\dot{f}/G\right)=\left\{x\in[\kappa]^\omega \mid \dot{f}/G\left[[x]^{<\omega}\right]\subset x\right\},$$

$C\left(\dot{f}\right)$ 则是这个集合的一个 $\mathbb{P}$-名字.

对于 $e\in[\kappa]^\omega$, 令

$$g(e)=\left\{\alpha\in\kappa \;\middle|\; \left\|\dot{f}(\check{e})=\check{\alpha}\right\|\neq\mathbf{0}\right\}.$$

由于 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件, $g:[\kappa]^{<\omega}\to[\kappa]^\omega$. 令

$$D=\left\{x\in[\kappa]^\omega \mid \forall e\in[x]^{<\omega}\,(g(e)\subset x)\right\}.$$

那么 D 是 $[\kappa]^\omega$ 上的一个无界闭子集.

由于对于 $e\in[\kappa]^{<\omega}$, $p\Vdash\dot{f}\,(\check{e})\in\check{g}\,(\check{e})$, 如果 $x\in D$, 那么

$$p\Vdash\forall e\in[x]^{<\omega}\,\left(\dot{f}\,(\check{e})\in\check{x}\right).$$

因此, $p\Vdash\check{D}\subset\dot{C}$.

(2) 设 $S\subset[\kappa]^\omega$ 是一个荟萃集合. 设 $p\Vdash\dot{f}:[\check{\kappa}]^{<\check{\omega}}\to\check{\kappa}$. 我们需要找到一个 $x\in S$ 和一个 $q\leqslant p$ 来实现 $q\Vdash\dot{f}\,[\check{x}]^{<\check{\omega}}\subset\check{x}$.

令 $\lambda\geqslant\max\left\{\left(2^\kappa\right)^+,\left(2^{|P|}\right)^+\right\}$ 为一个正则基数. 考虑模型

$$\mathcal{M}=\left(\mathscr{H}_\lambda,\in,\mathbb{P},p,\dot{f},\Vdash,\triangle\right),$$

其中 $\triangle$ 是 $\mathscr{H}_\lambda$ 上的一个秩序. 因而模型 $\mathcal{M}$ 上有依据秩序 $\triangle$ 可定义的斯科伦函数. 令 $C \subset [\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 为 $\mathcal{M}$ 的所有可数同质子模型的集合. 根据荟萃集的提升原理 (定理 I.2.35), 令 $N \in C$ 见证 $N \cap \kappa \in S$. 令 $x = N \cap \kappa$.

将集合 $[x]^{<\omega}$ 的元素罗列出来: $\langle e_n \mid n < \omega\rangle$. 应用 $N \prec \mathcal{M}$ 这一事实, 递归地定义力迫条件的一个单调递减的序列

$$p_0 = p \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n \geqslant p_{n+1} \geqslant \cdots$$

以至于 $\forall n < \omega\, \exists \alpha_n \in N \cap \kappa \left(p_{n+1} \Vdash \dot{f}\,(\check{e}_n) = \check{\alpha}_n\right)$. 令 q 为序列 $\langle p_n \mid n < \omega\rangle$ 的一个下界. 那么

$$q \Vdash \dot{f}\left[[\check{x}]^{<\check{\omega}}\right] \subset \check{x}. \qquad \square$$

基于这样的例子, 谢旯引进如下恰当力迫的概念:

定义 2.20 称一个力迫构思 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 为一个**恰当力迫构思**当且仅当对于每一个不可数基数 κ 来说, 可数范围 $[\kappa]^\omega$ 上的任何一个荟萃子集 S 在基础模型 V 上经 $\mathbb{P}$ 的力迫扩张模型 $\mathrm{V}^{\mathbb{P}}$ 中都依旧是荟萃集.

根据上述引理 2.22, 所有的满足可数链条件的力迫构思和所有的具备 σ-闭合性质的力迫构思都是恰当力迫构思.

恰当力迫不会将 ω_1 可数化. 事实上, 恰当力迫有一个很有趣的可数覆盖性质:

引理 2.23 设 $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫构思. 设 G 是 V 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 那么 $\mathrm{V}[G]$ 中任何一个序数的可数集合一定被 V 中的一个序数的可数集合所覆盖:

$$\forall x \in \left([\mathrm{Ord}]^\omega\right)^{\mathrm{V}[G]}\, \exists y \in \left([\mathrm{Ord}]^\omega\right)^{\mathrm{V}}\ (x \subset y).$$

证明 设 $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫构思. 设 G 是 V 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 设 X 为 $\mathrm{V}[G]$ 中的序数的一个可数集合. 令 $\lambda \supset X$ 为一个不可数的基数. 由于 $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫构思, $\left([\lambda]^\omega\right)^{\mathrm{V}}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个荟萃集. 因为集合

$$\{Y \in [\lambda]^\omega \mid Y \supset X\}$$

在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个无界闭集, 所以 $\exists Y \in \left([\lambda]^\omega\right)^{\mathrm{V}}\ (X \subset Y)$. $\square$

为了证明恰当力迫构思类对于可数支撑迭代力迫构思是封闭的, 我们需要一些对力迫构思恰当性判断的适用标准.

定义 2.21 设 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 为一个力迫构思. 令 $\lambda > 2^{|P|}$ 为一个正则基数. 设 $M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$ 可数, 其中 $\triangle$ 是 $\mathscr{H}_\lambda$ 的一个秩序, 并且 $\mathbb{P} \in M$ (需要时所有涉及的参数都在 M 之中). 称条件 q 为一个 $(M, \mathbb{P})$-**泛型条件**[11]当且仅当对于 M 中任何一个 $\mathbb{P}$ 的极大冲突子集 A 而言, 子集合 $A \cap M$ 都在 q 之下是准稠密的, 即对于 P 中的任何 $r \leqslant q$, 都有一个 $p \in A \cap M$ 来保证 r 与 p 有共同的下界.

11 $(M, \mathbb{P})$-generic.

引理 2.24　设 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 为一个力迫构思. 令 $\lambda>2^{|P|}$ 为一个正则基数. 设 $M\prec(\mathscr{H}_\lambda,\in,\triangle,\cdots)$ 可数, 并且 $\mathbb{P}\in M$. 设 $q\in P$. 那么下述命题对等:

(1) q 是一个 $(M,\mathbb{P})$-泛型条件.

(2) 如果 $\dot\alpha\in M$ 是序数的一个 $\mathbb{P}$-名字, 那么

$$\forall r\leqslant q\,\exists s\leqslant r\,\exists\beta\in M\cap\lambda\, s\Vdash\left(\dot\alpha=\check\beta\right).$$

(简记此表达式为 $q\Vdash\dot\alpha\in M$.)

(3) $q\Vdash\left(\dot G\cap M\right)$ 是 M 之上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\dot\alpha\in M$ 为序数的一个 $\mathbb{P}$-名字. 令

$$D=\left\{p\in P\;\middle|\;\exists\beta\in\lambda\, p\Vdash\left(\dot\alpha=\check\beta\right)\right\}.$$

那么 $D\in M$, 并且 D 在 $\mathbb{P}$ 中是稠密的. 令 $A\subset D$ 为秩序 $\triangle$ 之下的最小的极大冲突子集. 那么 $A\in M$, 并且 $A\cap M$ 在 q 之下是准稠密的. 设 $r\leqslant q$. 令 $p\in A\cap M$ 满足 r 与 p 有一个共同下界 $s\in P$. 于是, $s\leqslant r$ 并且 $s\leqslant p$. 令 $\beta\in\lambda$ 来实现 $p\Vdash(\dot\alpha=\check\beta)$. 由于 $p\in M$, $\dot\alpha\in M$, 所以满足要求 $p\Vdash(\dot\alpha=\check\beta)$ 的序数 β 是可定义的, 因此, $\beta\in M$. 于是, $s\Vdash\left(\dot\alpha=\check\beta\right)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). (练习.)

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 并且 $q\in G$. 我们需要证明下述命题:

如果 $A\in M$ 是 $\mathbb{P}\cap M$ 的一个准稠密子集, 那么 $G\cap M\cap A\neq\varnothing$.

设 $A\in M$ 是 $\mathbb{P}\cap M$ 的一个准稠密子集. 也就是说

$$\forall p\in P\cap M\,\exists r\in A\,\exists s\in P\,(s\leqslant r\,\wedge\, s\leqslant p).$$

由于 M 是一个同质子模型, $\mathbb{P}\in M$, $A\in M$, 上述命题对等于

$$M\models\forall p\in P\,\exists r\in A\,\exists s\in P\,(s\leqslant r\,\wedge\, s\leqslant p),$$

也就是

$$M\models A\text{ 是 }\mathbb{P}\text{ 的一个准稠密子集},$$

从而 A 就是 $\mathbb{P}$ 的一个准稠密子集. 根据 (1), $A\cap M$ 在 q 之下是准稠密的. 由于 $q\in G$, 所以

$$G\cap A\cap M\neq\varnothing.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). (练习.)　□

定理 2.13 一个力迫构思 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 是一个恰当力迫构思的充分必要条件是对于任意足够大 $(>2^{|P|})$ 的正则基数 λ 都有由所有满足要求

$$|M|=\omega\wedge\forall p\in M\cap P\,\exists q\leqslant p\,(q\text{ 是一个 }(M,\mathbb{P})\text{- 泛型条件})$$

的那些 $M\prec(\mathscr{H}_\lambda,\in,\triangle,\cdots)$ 所组成的集合 C_λ 包含 $[\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 的一个无界闭子集.

证明 先证条件的必要性. 设 $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫构思. 设 λ 为一个足够大的正则基数. 欲得矛盾, 假设条件中的集合 C_λ 不包含一个无界闭集, 也就是说它的补集是一个荟萃子集. 根据无界闭子集滤子的正则性, 令 $p\in P$ 以及 $S\subset[\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 为 $\mathscr{H}_\lambda$ 的可数同质子模型的一个荟萃集, 并且

$$\forall M\in S\,(p\in M\wedge\forall q\leqslant p\,(q\text{不是一个 }(M,\mathbb{P})\text{- 泛型条件}).$$

令 $G\ni p$ 为 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 我们在 $\mathrm{V}[G]$ 中讨论. V 中的 $\mathbb{P}$ 的 p 之下的每一个极大冲突子集 A 都与 G 有唯一的交 q_A. 令

$$D=\left\{M\prec\mathscr{H}_\lambda^{\mathrm{V}}\;\middle|\;\text{如果 }A\in M\,p\text{ 之下的一个极大冲突子集, 那么 }q_A\in M\right\}.$$

那么 D 是 $\left[\mathscr{H}_\lambda^{\mathrm{V}}\right]^\omega$ 的一个无界闭集. 由于在 $\mathrm{V}[G]$ 中 S 还是一个荟萃集, $D\cap S\neq\varnothing$. 令 $M\in D\cap S$. 对于 M 中的 p 之下的一个极大冲突子集 A 而言, 因为 $q_A\leqslant\sum(A\cap M)$, 所以 $(\sum(A\cap M))\in G$. 根据 G 的泛型特性, 令

$$N=\{A\in M\mid A\text{ 是 }p\text{ 之下的一个极大冲突子集}\},$$

那么 $\left(\prod_{A\in N}\sum(A\cap M)\right)\in G$. 令 $q\in P$ 满足要求: $q\leqslant\left(\prod_{A\in N}\sum(A\cap M)\right)$. 于是, $q\leqslant p$ 就是一个 $(M,\mathbb{P})$-泛型条件. 可是, $M\in S$. 这就是一个矛盾.

再证条件是充分的. 设 λ 是一个不可数的基数. 我们需要在定理给定的条件下证明在 V 的 $\mathbb{P}$ 力迫扩张模型中所有 V 中的 $[\lambda]^\omega$ 的荟萃子集 S 依旧是荟萃集. 固定 $[\lambda]^\omega$ 的荟萃子集 S. 设 $\dot{f}$ 是一个名字, 并且

$$P\ni p\Vdash\dot{f}:[\check{\lambda}]^{<\check{\omega}}\to\check{\lambda}.$$

我们需要找到一个条件 $q\leqslant p$ 以及一个 $x\in S$ 来实现 $q\Vdash\dot{f}\left[[\check{x}]^{<\check{\omega}}\right]\subset\check{x}$.

令 $\kappa>\lambda$ 为一个足够大 $(>2^{|P|})$ 的正则基数. 对于 $M\prec(\mathscr{H}_\kappa,\in,\triangle,\cdots)$, 令

$$M\in C_\kappa\leftrightarrow\left(\begin{array}{l}p\in M\wedge|M|=\omega\wedge\\ \forall r\in M\cap P\,\exists q\leqslant r\,(q\text{ 是一个 }(M,\mathbb{P})\text{- 泛型条件})\end{array}\right).$$

根据给定条件, C_κ 包含一个无界闭子集. 应用提升和降落定理 (定理 I.2.35), 集合

$$\{M\cap\lambda\mid M\in C_\kappa\}$$

包含着 $[\lambda]^\omega$ 上的一个无界闭子集. 因此, $\exists M \in C_\kappa\,(M \cap \lambda \in S)$. 取出一个这样的 $M \in C_\kappa$.

令 $x = M \cap \lambda$. 令 $q \leqslant p \in M$ 为一个 $(M, \mathbb{P})$-泛型条件. 我们断言

$$q \Vdash \dot{f}\left[[\check{x}]^{<\check{\omega}}\right] \subset \check{x}.$$

设 $e \in [x]^{<\omega}$. 因为 $M \prec \mathscr{H}_\kappa$, 在 M 中有一个 p 之下的极大冲突子集 A 来完全确定 $\dot{f}\,(\check{e})$ 的取值. 如果 $r \leqslant q$ 以及 $\alpha < \lambda$ 满足 $r \Vdash \dot{f}\,(\check{e}) = \check{\alpha}$, 因为 $A \cap M$ 在 q 之下是准稠密的, 可以取到一个 $s \in A \cap M$ 来实现 $s \Vdash \dot{f}\,(\check{e}) = \check{\alpha}$. 这样, α 是一个由参数 $s, \dot{f}, e$ 可定义的序数. 因此, $\alpha \in M \cap \lambda = x$. 这就表明: $q \Vdash \dot{f}\,(\check{e}) \in \check{x}$. □

上述条件还可以进一步放宽松些:

定理 2.14 一个力迫构思 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个恰当力迫构思的充分必要条件是对于任意 $p \in P$, 对于任意足够大 $(> 2^{|P|})$ 的正则基数 λ, 以及任意包括 p 和 $\mathbb{P}$ 的可数的 $M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$, 都一定

$$\exists q \leqslant p\,(q\,\text{是一个}\,(M, \mathbb{P})\text{- 泛型条件}).$$

证明 条件自然是充分的, 因为

$$\{\, M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots) \mid p \in M \ \wedge\ \mathbb{P} \in M \ \wedge |M| = \omega\}$$

就是一个无界闭子集.

我们来证条件还是必要的. 设 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个恰当力迫构思. 令 $\mu = 2^{|P|}$. 设 $\lambda > |\mathscr{H}_\mu|$ 为一个正则基数. 对于 $M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$, 令

$$M \in C_\lambda \leftrightarrow |M| = \omega \ \wedge\ \forall p \in M \cap P\, \exists q \leqslant p\,(q\,\text{是一个}\,(M, \mathbb{P})\text{- 泛型条件}).$$

根据定理 2.13, 集合 C_λ 包含 $[\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 的一个无界闭子集. 根据提升与降落定理 (定理 I.2.35), 集合

$$C_\mu = \{\, M \cap \mathscr{H}_\mu \mid M \in C_\lambda\}$$

包含 $[\mathscr{H}_\mu]^\omega$ 的一个无界闭子集. 于是存在一个 $f : [\mathscr{H}_\mu]^{<\omega} \to \mathscr{H}_\mu$ 来实现 $C_f \subset C_\mu$. 在秩序 $\triangle$ 下的最小的这样的函数 f 一定在 $\mathscr{H}_\lambda$ 每一个可数同质子模型 M 之中. 从而如果 $\{p, \mathbb{P}\} \subset M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$, 那么 M 关于 f 必是封闭的. 这就保证了: $\exists q \leqslant p\,(q\,$是一个$\,(M, \mathbb{P})$-泛型条件. □

2.6.2 迭代恰当力迫构思

恰当力迫构思性质在一步迭代中是被保持的:

引理 2.25 设 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个恰当力迫构思, $\dot{Q}$ 是一个名字, 并且 $\mathbf{1} \Vdash \dot{Q}$ 是一个恰当力迫构思. 那么 $\mathbb{P} * \dot{Q}$ 也是一个恰当力迫构思.

证明 设 λ 是一个不可数基数. 设 $S \subset [\lambda]^{\omega}$ 为一个荟萃子集. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子, 以及令 H 为 $V[G]$ 上的 $\dot{Q}/G$-泛型滤子. 那么 S 在 $V[G]$ 中还是荟萃集, 因而在 $V[G][H]$ 中依旧是荟萃集. □

事实上, 我们还可以进一步细化这种分析. 为了后面的需要, 我们来证明下述引理.

引理 2.26 设 P 为恰当力迫构思, $\dot{Q} \in V^P$ 满足 $\mathbf{1} \Vdash_P \dot{Q}$ 是一个恰当力迫构思. 令 $R = P * \dot{Q}$. 设 λ 为足够大的正则基数. 设 $R \in M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$ 为一个可数同质子模型. 那么, 对于每一 (M, P)-泛型条件 $q_0 \in P$, 对于每一个实现下述命题的 $\dot{p} \in V^P$:

$$q_0 \Vdash_P \left[\dot{p} \in (R \cap M) \wedge \dot{p} \restriction_1 \in \dot{G}_P\right],$$

一定存在一个 (M, R)-泛型条件 $(q_0, \dot{q}_1) \in R$ 来实现下述命题:

$$(q_0, \dot{q}_1) \Vdash_R \dot{p} \in \dot{G}_R.$$

证明 设 q_0 是一个 (M, P)-泛型条件. 设 $\dot{p} \in V^P$ 满足

$$q_0 \Vdash_P \left[\dot{p} \in (R \cap M) \wedge \dot{p} \restriction_1 \in \dot{G}_P\right].$$

我们需要找到一个合适的名字 $\dot{q}_1$. 为此, 令 $G \ni q_0$ 为 V 上的 P-泛型滤子. 令 $p = \dot{p}/G$ 以及 $Q = \dot{Q}/G$. 那么

$$p = (p_0, \dot{p}_1) \in M \cap R \wedge p_0 \in G \, \dot{p}_1 \in M \, \dot{p}_1/G = p_1 \in M[G] \cap Q.$$

由于 Q 在 $V[G]$ 中是一个恰当力迫构思, 在 $V[G]$ 中存在一个较强条件 $q_1 \leqslant p_1$ 以至于 q_1 是一个 $(M[G], Q)$-泛型条件. (这里我们默认了一个事实: $M[G] \prec \mathscr{H}_\lambda^{V[G]}$, 并将这个事实的验证留作练习.) 用 $\dot{q}_1$ 为这个条件 q_1 命名. 我们就得到所要的合适名字 $\dot{q}_1$.

于是, $(q_0, \dot{q}_1)$ 就是一个 (M, R)-泛型条件, 因为 q_0 是一个 (M, P)-泛型条件, 以及

$$q_0 \Vdash_P \dot{q}_1 \text{ 是一个 } \left(M\left[\dot{G}_P\right], \dot{Q}\right) \text{- 泛型条件.}$$

又因为 $q_0 \Vdash_P \dot{p}_0 \in \dot{G}_P$ 以及 $q_0 \Vdash_P \dot{q}_1 \leqslant_{\dot{Q}} \dot{p}_1$, 我们得到结论: $(q_0, \dot{q}_1) \Vdash_R \dot{p} \in \dot{G}_R$. □

更为重要的是恰当力迫构思性质在可数支撑迭代力迫构造中也是被保持的. 这是谢昇引入恰当力迫构思性质的根本动机.

定理 2.15 (Shelah) 设 $\mathbb{P}_\alpha$ 是依据序列

$$\left\{\dot{Q}_\beta \;\middle|\; \beta < \alpha\right\}$$

实现的可数支撑的迭代力迫构思, 并且每一个 $\dot{Q}_\beta$ 在 $V^{P_\alpha \restriction_\beta}$ 中都是一个恰当力迫构思. 那么 $\mathbb{P}_\alpha$ 也是一个恰当力迫构思.

证明　应用定理 2.14, 我们希望证明如果 λ 是一个足够大的正则基数, $\mathbb{P}_\alpha \in M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$ 是一个可数同质模型, 那么

$$\forall p \in P_\alpha \cap M \, \exists q \in P_\alpha \left(q \text{ 是 } (M, \mathbb{P}_\alpha)\text{- 泛型条件, 并且 } q \Vdash_\alpha \check{p} \in \dot{G}\right).$$

定理的证明自然是对 α 进行归纳. 只是我们需要比较强的归纳假设条件. 这个条件由下述引理给出.

引理 2.27　设 P_α 是恰当力迫构思的可数支撑迭代力迫构思. 设 λ 是一个足够大的正则基数, $\mathbb{P}_\alpha \in M \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \triangle, \cdots)$ 是一个可数同质模型. 那么对于每一个 $\gamma \in \alpha \cap M$, 对于每一个 (M, P_γ)-泛型条件 $q_0 \in P_\gamma = P_\alpha\restriction_\gamma$, 以及每一个实现下述命题的 $\dot{p} \in \mathrm{V}^{P_\gamma}$:

$$q_0 \Vdash_\gamma \left[\dot{p} \in (P_\gamma \cap M) \wedge \dot{p}\restriction_\gamma \in \dot{G}_\gamma\right],$$

一定存在一个 (M, P_α)-泛型条件 $q \in P_\alpha$ 来实现下述命题:

$$q\restriction_\gamma = q_0 \wedge q \Vdash_\alpha \dot{p} \in \dot{G}_\alpha,$$

其中, $\dot{G}_\alpha$ 和 $\dot{G}_\gamma$ 分别是 P_α 和 P_γ 的泛型滤子的典型名字, $P_0 = \{\mathbf{1}\}$, $q_0 = \mathbf{1}$.

证明　应用关于 α 的归纳法. 当 $\alpha = 0$ 时自然不是问题. 关于后继步, 引理 2.26 已经给出了 $\alpha = 2$ 和 $\gamma = 1$ 的起始步. 一般情形只需简单修改一下引理 2.26 的证明就好.

现在设 $\alpha \geqslant \omega$ 是一个极限序数. 于是, $\alpha \cap M$ 是序数的一个可数集合, 并且关于序数的后继函数是封闭的, 所以它没有最大元. 任意固定 $\gamma \in \alpha \cap M$, 从 $\alpha \cap M$ 中取出一个严格单增且在 $\alpha \cap M$ 中无界的序数序列

$$\langle \gamma_n \mid n < \omega \rangle$$

并且 $\gamma_0 = \gamma$; 令 $\langle D_n \mid n < \omega \rangle$ 为 P_α 在 M 中的全部稠密子集的列表. 令 $q_0 \in P_{\gamma_0}$ 为一个 (M, P_{γ_0})-泛型条件, 并且令 $\dot{p}$ 为一个 $\mathrm{V}^{P_{\gamma_0}}$ 名字以至于

$$q_0 \Vdash_{\gamma_0} \left[\dot{p} \in (P_{\gamma_0} \cap M) \wedge \dot{p}\restriction_{\gamma_0} \in \dot{G}_{\gamma_0}\right].$$

在此基础上我们来寻找一个 (M, P_α)-泛型条件 $q \in P_\alpha$ 以至于

$$q\restriction_{\gamma_0} = q_0 \wedge q \Vdash_\alpha \dot{p} \in \dot{G}_\alpha.$$

我们构造一个满足下列性质的条件序列 $\langle q_n \in P_{\gamma_n} \mid n < \omega \rangle$:

$$\forall n < \omega \left(q_{n+1}\restriction_{\gamma_n} = q_n \wedge q_n \text{ 是一个 } (M, P_{\gamma_n})\text{- 泛型条件}\right);$$

并且随同 q_n, 还构造一个 P_{γ_n}-名字 $\dot{p}_n$ 以至于 $\dot{p}_0 = \dot{p}$ 以及

$$\forall n < \omega\, q_n \Vdash_{\gamma_n} \left(\dot{p}_n \in (P_\alpha \cap M) \wedge \dot{p}_n \leqslant \dot{p}_{n-1} \wedge \dot{p}_n \in D_{n-1} \wedge \dot{p}_n \restriction_{\gamma_n} \in \dot{G}_{\gamma_n}\right).$$

假设 q_n 和 $\dot{p}_n$ 已经得到. 欲得 $\dot{p}_{n+1}$, 令 $G \ni q_n$ 为 V 上的 P_{γ_n}-泛型滤子. 令 $p_n = \dot{p}_n/G$. 此时有

$$p_n \in P_\alpha \cap M \text{ 以及 } p_n \restriction_{\gamma_n} \in G.$$

由于 q_n 是一个 (M, P_{γ_n})-泛型条件, $D_n \in M$, 我们可以取到 $p_{n+1} \in D_n \cap M$ 来实现 $p_{n+1} \leqslant p_n$ 以及 $p_{n+1} \restriction_{\gamma_n} \in G$. 这样得到一个 $P_{\gamma_{n+1}}$-名字 $\dot{p}_{n+1}$. 应用归纳假设条件 (视 γ_{n+1} 为 α, 视 γ_n 为 γ) 于 q_n 和 $\dot{p}_{n+1} \restriction_{\gamma_{n+1}}$, 我们就得到 $q_{n+1} \in P_{\gamma_{n+1}}$ 以至于

$$q_{n+1} \Vdash_{\gamma_{n+1}} \left(\dot{p}_{n+1} \in (P_\alpha \cap M) \wedge \dot{p}_{n+1} \leqslant \dot{p}_n \wedge \dot{p}_{n+1} \in D_n \wedge \dot{p}_{n+1} \restriction_{\gamma_{n+1}} \in \dot{G}_{\gamma_{n+1}}\right).$$

现在, 令 q 为 $\langle q_n \mid n < \omega \rangle$ 的极限. 那么, $q \in P_\alpha$ 以及 $q \restriction_{\gamma_0} = q_0$. 剩下需要做的是证明

$$\forall n < \omega \left(q \Vdash_\alpha \dot{p}_n \in \dot{G}_\alpha\right).$$

这不仅蕴涵 $q \Vdash_\alpha \dot{p} \in \dot{G}_\alpha$, 而且还蕴涵 q 是一个 (M, P_α)-泛型条件, 因为

$$\forall n < \omega\, q \Vdash (\dot{p}_n) \in (D_{n-1} \cap M).$$

为此, 令 $G \ni q$ 为一个 V 上的 P_α-泛型滤子. 令 $p_n = \dot{p}_n/G$. 我们有 $p_n \in M$ 以及

$$\forall k \geqslant n\, p_n \restriction_{\gamma_k} \in G_{\gamma_k} \cap M.$$

令 $\delta = \sup(\alpha \cap M)$. 那么 $p_n \restriction_\delta \in G_\delta$. 因为 $p_n \in M$, $\operatorname{spt}(p_n) \subset M$, 从而, $p_n \restriction_\delta = p_n$. 由此, $p_n \in G$. □

现在就可以应用关于 α 的归纳法以及引理 2.27 所提供的归纳假设条件来完成定理 2.15 的证明. □

谢旯恰当力迫构思性质保持性定理的一个重要推论就是可数支撑迭代恰当力迫构思不会可数化 ω_1.

2.6.3 恰当力迫公理

在马丁公理 MA_{ω_1} 中用恰当力迫构思取代可数链条件力迫构思, 我们就得到一个具有更大作用范围的力迫公理: 恰当力迫公理 (PFA).

定义 2.22 (恰当力迫公理 (PFA)) *设 $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫公理. 设 $\mathcal{D}$ 为 $\mathbb{P}$ 的稠密子集合的一个势为 $\aleph_1$ 的集合. 那么一定存在 $\mathbb{P}$ 的一个与 $\mathcal{D}$ 中各个元素都有非空交的 (融合它们的) 滤子 F.*

PFA 有许多有趣的应用. 但是我们不准备在这个导引中涉及 PFA 的应用. 我们仅指出其中的一个有关连续统假设以及奇异基数假设的结论. 它们的证明超出了本《导引》的范围, 所以省略它们的证明. 下述定理的第一个结论归于 Todorcevic 和 Velickovic, 第二个结论归于 Viale[12].

定理 2.16 (1) PFA 蕴涵 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

(2) PFA 蕴涵奇异基数假设成立.

由此可见, PFA 的确是马丁公理 MA 的一种强有力的推广, 而 PFA 的相对相容性则不得不依赖大基数假设.

定理 2.17 (Baumgartner) 如果 κ 是一个超紧基数, 那么存在一个恰当力迫构思 $\mathbb{P}$ 以至于在 V 的 $\mathbb{P}$ 力迫扩张模型中 PFA 成立.

证明 设 κ 是一个超紧基数. 我们将用长度为 κ 的可数支撑迭代来构造所要的恰当力迫构思; 每一步都是势严格小于 κ 的恰当力迫构思. 这样, $\aleph_1$ 和所有大于等于 κ 的基数都会被保持; 在它们之间的那些基数会被减势到 $\aleph_1$, 从而 κ 会成为扩张模型中的 $\aleph_2$, 并且在其中, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ 成立.

为了实现扩张模型中 PFA 成立, 我们需要添加必要的融合滤子以消除每一个可能的反例; 实现这个目标的技术手段是超紧基数所提供的拉弗[13] 函数 (见定理 1.30); 拉弗函数被用来在 κ 步内消除所有的 PFA 的反例.

令 $f : \kappa \to \mathrm{V}_\kappa$ 为一个拉弗函数. 我们来构造一个长度为 κ 的可数支撑的恰当力迫构思迭代序列 $\left\langle P_\alpha, \dot{Q}_\alpha \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\rangle$ 以及它们的迭代产物 P_κ. 具体实施过程如下: 在每一步 $\alpha < \kappa$, 检测 $f(\alpha)$ 是否为一个可能的反例, 即如果 $f(\alpha)$ 是一个具备下述特征的有序对 $\left(\dot{P}, \dot{\mathcal{D}}\right)$: 这是一个 P_α 名字; 是 P_α 名字的有序对; 在 V^{P_α} 中, $\dot{P}$ 是一个恰当力迫构思, $\dot{\mathcal{D}}$ 是 $\dot{P}$ 的稠密子集的一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的序列, 那么就令 $\dot{Q}_\alpha = \dot{P}$; 否则, 就令 $\dot{Q}_\alpha = \{\mathbf{1}\}$ 为平凡偏序集. 对于极限序数 $\alpha \leqslant \kappa$, P_α 由可数迭代规则依据已经构造出来的序列

$$\left\langle P_\beta, \dot{Q}_\beta \;\middle|\; \beta < \alpha \right\rangle$$

唯一确定. 因为每一个 $\dot{Q}_\alpha$ 都是恰当力迫构思, 支撑为可数集合, 根据谢旯保持定理 (定理 2.15), P_κ 是一个恰当力迫构思.

令 G 为 V 上的 P_κ-泛型滤子. 那么 $\aleph_1^{\mathrm{V}} = \aleph_1^{\mathrm{V}[G]}$. 由于对于 $\alpha < \kappa$, P_α 的势都严格小于 κ, P_κ 是它们的正向极限, 因此 P_κ 满足 κ-链条件. 这样 V 中所有 $\geqslant \kappa$ 的基数都被保持下来. 剩下我们需要验证的是在 $\mathrm{V}[G]$ 中, PFA 成立. 这归结到下述引理:

12 M. Viale, The proper forcing axiom and the singular cardinal hypothesis, Journal of Symbolic Logic, 2006, 71, No.2: 473-479.

13 R. Laver.

引理 2.28 在 $V[G]$ 中, 如果 P 是一个恰当力迫构思, $\mathcal{D} = \langle D_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ 是 P 的一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的稠密子集序列, 那么一定存在一个与每一个 D_α 都有非空交的 P 上的滤子 F.

我们随后来证明这个引理. 现在依据这个引理来完成定理 2.17 的证明: 对于每一个不可数的 $\gamma < \kappa$, 令

$$P = \left([\gamma]^{<\omega_1}, \leqslant\right),$$

以及对于 $\alpha < \gamma$, 令

$$D_\alpha = \left\{ p \in [\gamma]^{<\omega_1} \;\middle|\; \alpha \in \operatorname{rng}(p) \right\}.$$

对序对 $(P, \mathcal{D})$ 应用引理 2.28, 我们就得到一个从 ω_1 到 γ 的满射. 因此, 在 $V[G]$ 中, $\kappa = \aleph_2$. 引理 2.28 自然蕴涵在 $V[G]$ 中 PFA 成立. 由于 PFA 蕴涵 MA_{ω_1}, 在 $V[G]$ 中必然就有 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$; 另一方面, 因为在 V 中, $|P_\kappa| = \kappa$, 所以在 $V[G]$ 中, $2^{\aleph_0} \leqslant \kappa = \aleph_2$. 因此, 在 $V[G]$ 中, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

现在我们来证明引理 2.28.

在 $V[G]$ 中, 设 P 是一个恰当力迫构思, $\mathcal{D} = \langle D_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ 是 P 的一个长度为 $\gamma < \kappa$ 的稠密子集序列.

在 V 中, 令 $\dot{P}$ 和 $\dot{\mathcal{D}}$ 为它们的 P_κ-名字, 令 $\lambda > 2^{2^{|P|}} \cdot \kappa$ 为一个强极限基数. 我们可以假设 $P \subset \lambda$. 因为 f 是一个拉弗函数, 所以存在一个具备下述特性的同质嵌入映射 $j : V \to M$:

$$\operatorname{Crit}(j) = \kappa < \lambda < j(\kappa) \wedge M^\lambda \subset M \wedge j(f)(\kappa) = \left(\dot{P}, \dot{\mathcal{D}}\right).$$

因为 P 在 $V[G]$ 中是一个恰当力迫构思, 所以它的恰当性会由一个满足不等式 $2^{|P|} < \eta < \lambda$ 的正则基数 η 以及可数范围 $[\mathscr{H}_\eta]^\omega$ 上的一个元素为可数同质子模型的无界闭集 $C \subset [\mathscr{H}_e ta]^\omega$ 来见证. 由于 $M^\lambda \subset M$, P_κ 满足 κ-链条件, 在 $V[G]$ 中也有 $M[G]^\lambda \subset M[G]$, 并且在 $V[G]$ 中, λ 还是一个强极限基数, 所以, $C \in M[G]$ 也是 $[\mathscr{H}_\eta]^\omega$ 上的一个无界闭子集. 因此, P 也是 $M[G]$ 中的一个恰当力迫构思.

现在考虑 M 中的恰当力迫构思 $j\left(P_\kappa\right)$. 在 M 中, 它是一个长度为 $j(\kappa)$ 的可数支撑的恰当力迫构思的迭代产物, 并且定义过程中使用的是函数 $j(f)$. 由于 $j \restriction_{V_\kappa}$ 是 V_κ 上的恒等函数, $j(f) \restriction_\kappa = f$, 所以, $j\left(P_\kappa\right) \restriction_\kappa = P_\kappa$. 由于 $j(f)(\kappa) = \left(\dot{P}, \dot{\mathcal{D}}\right)$, P 在 $M[G]$ 中是恰当力迫构思, 所以 $\left(j\left(\dot{Q}\right)\right)_\kappa = \dot{P}$. 于是有某个名字 $\dot{R}$ 来实现等式

$$j\left(P_\kappa\right) = P_\kappa * \dot{P} * \dot{R}.$$

令 $H * K$ 为 $V[G]$ 上的 $\left(\dot{P} * \dot{R}\right)/G$-泛型滤子. 在 $V[G * H * K]$ 中, 以如下方式将 $j : V \to M$ 扩展成 $j^* : V[G] \to M[G * H * K]$: 对于每一个 P_κ-名字 $\dot{x}$, 令

$$j^*\left(\dot{x}/G\right) = \left(j\left(\dot{x}\right)\right)/(G * H * K).$$

这个定义是不依赖于名字的选择的, 因为对于 $p \in P_\kappa$, $j(p) = p$; 如果 $\|\dot{x} = \dot{y}\| \in G$, 那么

$$\|j(\dot{x}) = j(\dot{y})\| \in G * H * K.$$

基于同样的理由,

$$\|\varphi[\dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n]\| \in G \Rightarrow \|\varphi[j(\dot{x}_1), \cdots, j(\dot{x}_n)]\| \in G * H * K.$$

于是, j^* 是一个同质嵌入映射, 并且 $j \subset j^*$.

因为滤子 H 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 P-泛型滤子, 所以 H 与 $\mathcal{D}$ 中的每一个 D_α 都有非空交. 令

$$E = \{j(p) \mid p \in H\}.$$

由于 $j\restriction_\lambda \in M$, 集合 $E \in M[G * H * K]$, 并且 E 生成 $j^*(P)$ 上的一个滤子 F, 这个滤子 F 与 $j^*(\mathcal{D})$ 中的每一个元素都有非空交. 这就意味着

$$M[G * H * K] \models \text{存在一个融合 } j^*(\mathcal{D}) \text{ 中各元素的 } j^*(P) \text{ 上的滤子.}$$

应用 j^* 的同质嵌入性质, 我们就得到

$$\mathrm{V}[G] \models \text{存在一个融合 } \mathcal{D} \text{ 中各元素的 } P \text{ 上的滤子.}$$

□

2.7　力迫饱和非荟萃理想

在这一节里, 我们来展示一下围绕问题 I.2.3 的否定答案的合理性探索的历史轨迹. 对这一问题的研究结果曾经是有关实数正则性研究过程的一大转折点. 所以, 这一节的目标有两个: 一是利用大基数上的力迫构造来证实 ω_1 上的非荟萃集理想 NS_{ω_1} 的饱和性是合理的; 二是为后面的荟萃塔力迫构思提供有益的铺垫.

我们先从布尔代数 $\mathfrak{P}(\omega_1)/\mathrm{NS}_{\omega_1}$ 能带给我们一些什么样的泛型扩张这一问题开始.

2.7.1　泛型超幂

设 A 是一个集合. $\mathcal{I}$ 是 $\bigcup A$ 上的一个理想. $\mathcal{I}^+ = \{X \subset \bigcup A \mid X \notin \mathcal{I}\}$ 是 $\bigcup A$ 的所有 $\mathcal{I}$-正测度子集的集合. 对于 $C, D \in \mathcal{I}^+$, 令

$$C \leqslant D \leftrightarrow (C - D) \in \mathcal{I}.$$

令 $\mathbb{P}(\mathcal{I}) = (\mathcal{I}^+, \leqslant)$. 称 $\mathbb{P}(\mathcal{I})$ 为由理想 $\mathcal{I}$ 诱导出来的力迫构思. 准确地讲, $\mathbb{P}(\mathcal{I})$ 应当是 $\mathcal{I}^+/\mathcal{I}$ 这个商空间上的偏序. 但从应用角度看, 混淆这两者不会有任何麻烦, 反

倒是混淆之后有记号简便的收益. 另外, 为了后面应用的需要, 我们将理想放置在 $\bigcup A$ 上, 而不是如以前的直接放在 A 上, 因为后面将更多地直接面对的是某种集合的集合 A 以及 $\mathfrak{P}(\bigcup A)$. 同时当 A 是一个无穷基数时, $A=\bigcup A$, 所以这并没有什么冲突.

假设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}(\mathcal{I})$-泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, G 包含着 $\mathcal{I}$ 的对偶滤子. 不仅如此, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, G 还是 $\bigcup A$ 上的一个 V-超滤子:

(a) $\bigcup A \in G$ 以及 $\varnothing \notin G$;

(b) $\forall B \in G\, \forall C \in G\ (B \cap C \in G)$;

(c) $\forall B \in G\, \forall C \in \mathrm{V}\ \ (B \subset C \subset \bigcup A \to C \in G)$;

(d) $\forall B \in \mathrm{V}\ \ (B \subset \bigcup A \to (B \in G \vee ((\bigcup A) - B) \in G))$.

如此一来, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们可以用 G 和 V 中定义在 $\bigcup A$ 上的函数来构造 $(\mathrm{V},\in)$ 的**泛型超幂** $\prod_G(\mathrm{V},\in)$.

设 $f,g\in \mathrm{V}$ 为两个定义在 $\bigcup A$ 上的函数. 定义

$$f \sim_G g \leftrightarrow \left\{a \in \bigcup A \mid f(a)=g(a)\right\} \in G.$$

令 $[\![f]\!]_G$ 为所有与 f 在 $\sim_G$ 关系下等价的秩最小的那些函数的集合. 在这个基础上, 定义 $\in_G$ 如下:

$$[\![f]\!]_G \in_G [\![g]\!]_G \leftrightarrow \left\{a \in \bigcup A \mid f(a) \in g(a)\right\} \in G.$$

于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们定义泛型超幂

$$\prod_G(\mathrm{V},\in)=\left(\left\{[\![f]\!]_G \mid f\in \mathrm{V} \wedge f:\bigcup A \to \mathrm{V}\right\}, \in_G\right).$$

依照对应 $\mathrm{V} \ni x \mapsto [\![c_x]\!]_G$, 其中 $\forall a \in \bigcup A\ (c_x(a)=x)$, 来定义泛型嵌入映射

$$i'_G : \mathrm{V} \to \prod_G(\mathrm{V},\in).$$

对于这个泛型超幂, 我们也有下面的 Łoś 基本定理:

定理 2.18 设 $\mathcal{I}$ 是集合 $\bigcup A$ 上的一个理想. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}(\mathcal{I})$-泛型滤子. 设

$$\varphi(v_1,\cdots,v_n)$$

为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 V 中的定义在 $\bigcup A$ 上的 n 个函数. 那么

$$\begin{aligned}&\prod_G (\mathrm{V}, \in) \models \varphi\left[[\![f_1]\!]_G, \cdots, [\![f_n]\!]_G\right] \\ \leftrightarrow &\left\{a \in \bigcup A \mid (\mathrm{V}, \in) \models \varphi\left[f_1(a), \cdots, f_n(a)\right]\right\} \in G.\end{aligned}$$

因此, 映射 $i'_G : (\mathrm{V}, \in) \prec \prod_G (\mathrm{V}, \in)$.

证明 (略.) □

假设在泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的, 那么它有一个唯一的传递化 $(\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G), \in)$ 和唯一的传递化映射 $\pi_G : \prod_G (\mathrm{V}, \in) \cong (\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G), \in)$, 其中, $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 记作与之同构的唯一的传递类; 令

$$i_G = \pi_G \circ i'_G : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G).$$

称 i_G 为 $\mathrm{V}[G]$ 中的泛型超幂嵌入映射.

为了明确在泛型超幂中, A 上的恒等函数表示的是什么, 我们需要明确下述概念.

定义 2.23 称集合 $\bigcup A$ 上的一个滤子 $\mathcal{F}$ 是一个**精良滤子**当且仅当

$$\forall a \in \bigcup A \ (\{Y \in A \mid a \in Y\} \in \mathcal{F}).$$

$\bigcup A$ 上的一个理想 $\mathcal{I}$ 是一个精良理想当且仅当它的对偶滤子是一个精良滤子.

定义 2.24 称集合 $\bigcup A$ 上的一个滤子 $\mathcal{F}$ 是一个**正规滤子**当且仅当每一个 $\mathcal{F}$-正测度集合上的选择函数都一定在某一个 $\mathcal{F}$-正测度子集上为常值函数. 其中 $Y \subset \mathfrak{P}(\bigcup A)$ 是 $\mathcal{F}$-正测度集合当且仅当 $\forall X \in \mathcal{F}\ (Y \cap X \neq \varnothing)$.

$\bigcup A$ 上的一个理想 $\mathcal{I}$ 是一个正规理想当且仅当它的对偶滤子是一个正规滤子.

引理 2.29 设 $\mathcal{I}$ 是集合 $\bigcup A$ 上的一个 σ-完全的非平凡的精良的正规理想. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}(\mathcal{I})$-泛型超滤子, 并且在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的. 那么

$$\pi_G\left([\![\mathrm{Id}]\!]_G\right) = i_G\left[\bigcup A\right].$$

证明 设 $a \in \bigcup A$. 根据精良性,

$$\{Y \in A \mid a \in Y\} \in G,$$

于是, $[\![c_a]\!]_G \in_G [\![\mathrm{Id}]\!]_G$, 从而 $i_G(a) \in \pi_G\left([\![\mathrm{Id}]\!]_G\right)$. 因此,

$$i_G\left[\bigcup A\right] \subseteq \pi_G\left([\![\mathrm{Id}]\!]_G\right).$$

欲得另一个方向的覆盖不等式, 令 $[\![f]\!]_G \in_G [\![\mathrm{Id}]\!]_G$. 令 $X \in G$ 来见证这一事实:

$$E = \{Y \in A |\ f(Y) \in Y\}.$$

我们来证明下述集合在 E 之下是稠密的:

$$\left\{B \in \mathbb{P}(\mathcal{I}) \ \middle|\ \exists a \in \bigcup A \ \left(B \Vdash [\![\check{f}]\!]_{\dot{G}} = [\![\check{c}_{\check{a}}]\!]_{\dot{G}}\right)\right\}.$$

设 $D \leqslant E$ 为 $\mathbb{P}(\mathcal{I})$ 中的 $\mathcal{I}$-正测度集合. 如果必要, 考虑 $D \cap E$, 那么 $D \equiv_{\mathcal{I}} D \cap E$. 故不妨假设 $D \subset E$. 由于 f 是 E 上的选择函数, 从而也是 D 上的选择函数, 根据正规性, 令 $a \in \bigcup A$ 来见证

$$B = \{Y \in D \mid f(Y) = a\} \in \mathcal{I}^+.$$

此集合即为所求.

这就证明了: $i_G\left[\bigcup A\right] \supseteq \pi_G\left([\![\mathrm{Id}]\!]_G\right)$. □

现在的问题是: 在这样的泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 是否有秩? 或者, 它在什么情况下有秩?

定义 2.25 称 $\bigcup A$ 上的理想 $\mathcal{I}$ 是一个峭壁理想[14] 当且仅当

$$\bigcup A \Vdash_{\mathbb{P}(\mathcal{I})} \prod_{\dot{G}}(\mathrm{V}, \in) \text{ 是有秩的}.$$

事实上峭壁理想有对等的组合性质定义.

定义 2.26 设 $\mathcal{I}$ 是 $\bigcup A$ 上的一个理想. 设 $X \in \mathcal{I}^+$.

(1) 称 W 是 X 的一个 $\mathcal{I}$-**分割**当且仅当 W_X 是满足下述特性的极大的 X 的 $\mathcal{I}$-正测度子集: W 中的每一个元素都是 X 的 $\mathcal{I}$-正测度子集; W 中的任何两个不相同的元素模理想 $\mathcal{I}$ 几乎无交. 简单说, W 就是布尔代数 $\mathfrak{P}\left(\bigcup A\right)/\mathcal{I}$ 上非零元 $[\![X]\!]$ 下的一个极大冲突子集的一个代表元集合.

(2) 设 W_1 和 W_2 是 X 的两个 $\mathcal{I}$-分割. 称 W_1 是 W_2 的一个**细分**, 记成 $W_1 \leqslant W_2$, 当且仅当 $\forall B \in W_1\, \exists C \in W_2\, (B \subset C)$.

(3) 称一个序数函数 (在序数中取值的函数) 的集合 F 为 X 上的一个**泛函**当且仅当 F 中各元素的定义域的集合 $W(F) = \{\mathrm{dom}(f) \mid f \in F\}$ 是 X 的一个 $\mathcal{I}$-分割, 并且对于 F 中的两个不相等的元素 f 与 g , 必有 $\mathrm{dom}(f) \neq \mathrm{dom}(g)$.

(4) 设 F_1 和 F_2 是 X 上的两个泛函. 定义 $F_1 < F_2$ 当且仅当

(a) $W\left(F_1\right) \leqslant W\left(F_2\right)$;

---

14 Precipitous Ideal, 由 T. J. Jech 和 K. L. Prikry 引入, 见文献 On ideals of sets and the power set operation. Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), no. 4, 593-595.

(b) 如果 $f \in F_1$ 和 $g \in F_2$ 满足 $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$, 那么

$$\forall a \in \mathrm{dom}(f)\,(f(a) < g(a)).$$

上述名词的引入似乎有些人为. 其实它们源自泛型超幂中元素在布尔值模型中的名字的表示分析. 设 $\dot{f} \in \mathrm{V}^{\mathbb{B}(\mathfrak{P}(\cup A)/\mathcal{I})}$. 假设

$$X \Vdash \dot{f}\,\text{是一个序数函数} \wedge \mathrm{dom}\left(\dot{f}\right) \in \dot{G} \wedge \exists \alpha \left(\dot{f} \in \check{\mathrm{V}}_\alpha\right).$$

那么一定存在 X 的一个 $\mathcal{I}$-分割 W 以及与每一个 $B \in W$ 相对应的有一个定义在 B 上的序数函数 f_B 来共同见证如下事实:

$$B \Vdash \dot{f} \restriction_{\check{B}} = \check{f}_B.$$

这一个泛函 $F = \{f_B \mid B \in W\}$ 就在 X 之上表示这个布尔值名字 $\dot{f}$. 反之, 与 $X \in \mathcal{I}^+$ 上的任何一个泛函 F 相对应的就是布尔值模型中的一个布尔值名字 $\dot{f} \in \mathrm{V}^{\mathbb{B}\left(\mathcal{I}^+\right)}$ 来见证

$$X \Vdash \dot{f}\,\text{是一个序数函数} \wedge \mathrm{dom}\left(\dot{f}\right) \in \dot{G} \wedge \exists \alpha \left(\dot{f} \in \check{\mathrm{V}}_\alpha\right),$$

并且对于任意的 $f \in F$, 如果 $B = \mathrm{dom}(f)$, 那么 $B \Vdash \dot{f} \restriction_{\check{B}} = \check{f}$.

对于满足 $F_1 < F_2$ 的 X 上的两个泛函, 令 $\dot{f}$ 和 $\dot{g}$ 分别为与它们对应的布尔值名字, 那么

$$X \Vdash \dot{f}, \dot{g} \in \mathrm{V} \wedge \mathrm{dom}\left(\dot{f}\right) \subset \mathrm{dom}\left(\dot{g}\right) \wedge \forall a \in \mathrm{dom}\left(\dot{f}\right) \left(\dot{f}(a) < \dot{g}(a)\right).$$

反之, 给定上述特定的两个名字 $\dot{f}$ 和 $\dot{g}$, 令 F_1 与 F_2 分别为与它们相对应的泛函, 那么必有 $F_1 < F_2$.

这样, 可见上述名词的引入也是势在必行. 现在利用这些名词和上面的分析, 我们来给出峭壁理想的组合性质描述:

引理 2.30 设 $\mathcal{I}$ 是 $\bigcup A$ 上的一个理想. 那么下述命题对等:

(1) $\mathcal{I}$ 是一个峭壁理想.

(2) 只要 $X \in \mathcal{I}^+$ 以及 $\{W_n \mid n < \omega\}$ 是 X 上的可数个具备下述特点的 $\mathcal{I}$-分割:

$$\forall n < \omega \ (W_{n+1} \leqslant W_n),$$

就必然地有一个具备下述性质的无穷序列 $\langle B_n \mid n < \omega\rangle$:

$$(\forall n < \omega \ (X_{n+1} \subset X_n \wedge X_n \in W_n)) \wedge \bigcap_{n<\omega} X_n \neq \varnothing.$$

(3) 下述情形不可能发生: 存在一个 $X \in \mathcal{I}^+$ 以及 X 上存在一个具备下述特点的泛函序列 $\langle F_n \mid n < \omega \rangle$:

$$\forall n < \omega \ (F_{n+1} < F_n).$$

证明 前面的分析已经表明 (1) 与 (3) 对等.

如果 (3) 不成立, 令 X 和满足不等式 $\forall n < \omega\ (F_{n+1} < F_n)$ 的 $\langle F_n \mid n < \omega \rangle$ 为反例. 那么与这组泛函对应的有一组布尔值名字 $\left\{ \dot{f}_n \;\middle|\; n < \omega \right\}$ 以至于

$$X \Vdash \forall n < \check{\omega} \ \left([\![\dot{f}_{n+1}]\!]_{\dot{G}} \in_{\dot{G}} [\![\dot{f}_n]\!]_{\dot{G}} \right).$$

反之, 如果上述情形发生, 自然就会由它们得到 (3) 不成立的反例.

(2) ⇒ (3). 假设 (3) 不成立. 令 X 和 $\langle F_n \mid n < \omega \rangle$:

$$\forall n < \omega \ (F_{n+1} < F_n)$$

为反例. 于是, X 和 $\{ W_{F_n} \mid n < \omega \}$ 就是 (2) 的反例. 任给满足要求 $X_n \in W_{F_n}$ 和

$$\forall n < \omega \ (X_{n+1} \subset X_n)$$

的序列, 必有 $\bigcap \{ X_n \mid n < \omega \} = \varnothing$, 如果不然, 取 $f_n \in F_n$ 满足 $X_n = \mathrm{dom}\,(f_n)$, 取 $a \in \bigcap \{ X_n \mid n < \omega \}$, 那么

$$\forall n < \omega \ (f_{n+1}(a) < f_n(a)).$$

这就是一个矛盾.

(3) ⇒ (2). 假设 (2) 不成立. 令 $X \in \mathcal{I}^+$ 以及 $\{ W_n \mid n < \omega \}$ 是 X 上的可数个具备下述特点的 $\mathcal{I}$-分割:

$$\forall n < \omega \ (W_{n+1} \leqslant W_n),$$

但是, 对于任意的具备下述性质的无穷序列 $\langle B_n \mid n < \omega \rangle$:

$$(\forall n < \omega \ (X_{n+1} \subset X_n \ \wedge \ X_n \in W_n)),$$

都一定有 $\bigcap\limits_{n<\omega} X_n = \varnothing$. 据此, 我们来构造 X 上的一个单调递减的泛函序列

$$F_{n+1} < F_n \, (n < \omega).$$

不妨假设如果 $B \in W_n$, $C \in W_{n+1}$, 并且 $C \subseteq B$, 那么 $C \neq B$.

令 $T = \bigcup \{ W_n \mid n < \omega \}$. 那么 $(T, \subset)$ 是往下长的树. 对于 $a \in X$, 令

$$T_a = \{ B \in T \mid a \in B \}.$$

根据假设, 树 T_a 一定没有无穷树枝. 所以, $(T_a, \subset)$ 是一棵有秩的树. 于是, 对于 $a \in X$, 令 ρ_a 为 T_a 的一个赋秩函数. 那么对于 $B, C \in T_a$, 如果 $B \subset C$, 那么 $\rho_a(B) < \rho_a(C)$. 因此, 如果 $B \in W_{n+1}$, $C \in W_n$, $a \in B \subset C$, 那么

$$\rho_a(B) < \rho_a(C).$$

现在对于 $B \in T$, 定义 $f_B : B \to \mathrm{Ord}$ 如下:

$$\forall a \in B \; (f_B(a) = \rho_a(B)).$$

再对 $n < \omega$, 令 $F_n = \{ f_B \mid B \in W_n \}$. 那么这是 X 上的一个泛函序列, 并且

$$\forall n < \omega \; (F_{n+1} < F_n). \qquad \square$$

例 2.2　ω_1 上的有界子集合理想 $\mathcal{I} = \mathfrak{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ 不是一个峭壁理想.

证明　对于 $X \in \mathcal{I}^+ = [\omega_1]^{\aleph_1}$, 令 $f_X : X \cong \omega_1$ 为 X 的传递化映射, 并且令

$$B(X) = \{\alpha \in X \mid \exists \beta < \omega_1 \; (f_X(\alpha) = \beta + 1)\}.$$

那么 $B(X) \in \mathcal{I}^+$ 并且 $\forall \alpha \in B(X) \; \left(f_{B(X)}(\alpha) < f_X(\alpha)\right)$. 于是, 对于每一个 $X \in \mathcal{I}^+$, 都存在 X 的一个 $\mathcal{I}$-分割 W_X 以至于

$$\forall Y \in W_X \, \forall \alpha \in Y \; (f_Y(\alpha) < f_X(\alpha)).$$

现在定义 $W_0 = \{\omega_1\}$; 递归地, 给定 W_n, 令

$$W_{n+1} = \bigcup \{ W_X \mid X \in W_n \}.$$

对于每一个 $n < \omega$, 令 $F_n = \{ f_X \mid X \in W_n \}$. 那么 $\forall n < \omega \; (F_n > F_{n+1})$. 因此, $\mathcal{I}$ 不是一个峭壁理想. $\square$

例 2.3　如果 $\mathcal{I}$ 是 ω_1 上的 σ-完全的包括所有单点集合的 ω_2-饱和理想, 那么 $\mathcal{I}$ 是一个峭壁理想.

证明　设 $\mathcal{I}$ 是 ω_1 上的 σ-完全的包括所有单点集合的 ω_2-饱和理想. 设 $X \in \mathcal{I}^+$, 以及 $\langle W_n \mid n < \omega \rangle$ 是 X 上的一个满足要求 $\forall n < \omega \; (W_{n+1} \leqslant W_n)$ 的 $\mathcal{I}$-分割序列. 我们需要找到一个具备下述特点的 X 的 $\mathcal{I}$-正测度子集序列

$$\langle X_n \in W_n \mid n < \omega \rangle$$

以至于 $(\forall n < \omega \; (X_{n+1} \subset X_n)) \wedge \bigcap_{n<\omega} X_n \neq \varnothing$.

利用 $\mathcal{I}$ 的饱和性质, 我们来对这个 $\mathcal{I}$-分割序列做一点修改.

因为 $|W_0| \leqslant \aleph_1$, 令 $W_0 = \{ B_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令

$$A_\alpha = B_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta.$$

这样, $(B_\alpha - A_\alpha) \in \mathcal{I}$. 再令 $U_0 = \{ A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$. 令 $D_0 = \bigcup U_0$. 那么

$$(X - D_0) \in \mathcal{I},$$

以及 U_0 是 D_0 的一个 $\mathcal{I}$-分割, 并且其中不相等的两个元素一定不相交.

假设已经有了 U_n. 同样地, 令 $W_{n+1} = \{ B_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $Y \in W_n$ 为唯一的覆盖 B_α 的元素, 令 $Z \in U_n$ 来见证 $(Y - Z) \in \mathcal{I}$ 的唯一元素, 再令

$$A_\alpha = \left(B_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta \right) \cap Z.$$

最后令 $U_{n+1} = \{ A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \}$; 令 $D_{n+1} = \bigcup U_{n+1}$. 那么 $(X - D_{n+1}) \in \mathcal{I}$, 并且对于 $\alpha < \omega_1$, $(B_\alpha - A_\alpha) \in \mathcal{I}$, U_{n+1} 是 D_{n+1} 的一个 $\mathcal{I}$-分割, 并且其中的元素都是彼此互不相交的.

因为对于每一个 n, D_n 与 X 模理想 $\mathcal{I}$ 几乎相等, 理想 $\mathcal{I}$ 又是 σ-完全的, 所以 $\bigcap \{ D_n \mid n < \omega \}$ 一定非空. 令

$$\alpha \in \bigcap \{ D_n \mid n < \omega \}.$$

对于 $n < \omega$, 令 $A_n \in U_n$ 为唯一的包括 α 在内的元素, 再令 $X_n \in W_n$ 为包含 A_n 的唯一元素. 这样,

$$\alpha \in \bigcap \{ X_n \mid n < \omega \} \wedge \forall n < \omega \; (X_{n+1} \subset X_n).$$

这就证明了 $\mathcal{I}$ 是一个峭壁理想. □

上面例 2.3 的证明其实给出了更多的信息, 比如下面的事实成立:

定理 2.19 设 $\mathcal{I}$ 是 ω_1 上的一个非平凡的 σ-完全的正规的饱和理想.

(1) 设 τ 是一个 V 中的定义在 ω_1 上的函数的 $\mathfrak{P}(\omega_1)/\mathcal{I}$-名字. 那么必然存在一个 V 中的函数 $f : \omega_1 \to \mathrm{V}$ 来见证下述结论:

$$\mathbf{1} \Vdash \exists A \in \dot{G} \forall \alpha \in A \; \left(\check{f}(\alpha) = \tau(\alpha) \right).$$

(2) 设 G 是 V 上的 $\mathcal{I}^+$-泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的; 令 $M = \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 为 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 的传递化, 那么 $\mathrm{V}[G]$ 中的每一个函数 $f : \omega_1 \to M$ 都在 M 中.

(3) 设 G 是 V 上的 $\mathcal{I}^+$-泛型超滤子. 那么在 V$[G]$ 中, ω_1^{V} 是 i_G 的临界点, 并且

$$i_G\left(\omega_1^{\mathrm{V}}\right)=\omega_2^{\mathrm{V}}.$$

证明　(1) 给定那样一个名字 τ, 对于 $S\in\mathcal{I}^+$, 令 $S\in D$ 当且仅当

$$\exists f:\omega_1\to\mathrm{V}\left(S\Vdash\exists A\in\dot{G}\,\forall\alpha\in A\left(\check{f}(\alpha)=\tau(\alpha)\right)\right).$$

那么 D 是一个稠密开集. 令 $W\subset D$ 为一个极大冲突子集. 由于 $\mathcal{I}$ 是饱和的, $|W|\leqslant\aleph_1$. 于是, 我们将 W 罗列成下述:

$$W=\{\,S_\alpha\mid\alpha<\omega_1\},$$

以及它们属于 D 的证据函数序列 $\langle f_\alpha\mid\alpha<\omega_1\rangle$. 然后将它们转化成彼此无交的 $\mathcal{I}^+$ 中的序列: 对于 $\alpha<\omega_1$, 令 $T_\alpha=S_\alpha-\bigcup\{\,S_\beta\mid\beta<\alpha\}$, 那么 $(S_\alpha-T_\alpha)\in\mathcal{I}$. 这样一来, 对于 $\alpha<\beta<\omega_1$, $T_\alpha\cap T_\beta=\varnothing$, 并且它们都在 $\mathcal{I}^+$ 中. 集合

$$\{T_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}$$

依旧是一个极大冲突子集. 所以,

$$\left(\omega_1-\bigcup\{\,T_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}\right)\in\mathcal{I}.$$

于是, 如下定义 $f:\omega_1\to\mathrm{V}$:

$$f=\left\{(\beta,0)\,\middle|\,\beta\in\left(\omega_1-\bigcup\{\,T_\alpha\mid\alpha<\omega_1\}\right)\right\}\cup\bigcup\{\,f_\alpha\restriction_{T_\alpha}\mid\alpha<\omega_1\}.$$

那么, 此函数 f 就是所要的.

(2) 令 τ 为那样一个名字, 即在 V$[G]$ 中, $\tau/G:\omega_1\to\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$. 对 $\alpha<\omega_1$, 令 s_α 为一个名字以至于在 V$[G]$ 中总有

$$\tau/G(\alpha)=\pi_G[\![s_\alpha/G]\!]_G,$$

其中 π_G 是典型传递化映射.

根据 (1), 对于 $\alpha<\omega_1$, 令 $f_\alpha:\omega_1\to\mathrm{V}$ 来表示 s_α.

对 $\alpha<\omega_1$, 令 $f(\alpha)=\langle\,f_\beta(\alpha)\mid\beta<\alpha\rangle$. 那么在 V$[G]$ 中,

$$\forall\alpha<\omega_1\left(\pi_G\left([\![f]\!]_G\right)(\alpha)=\tau/G(\alpha)\right).$$

(3) 由于 $\mathcal{I}$ 是饱和的, 所以 $\mathcal{I}^+$ 满足 ω_2-链条件, 从而 ω_2 在 V$[G]$ 中还是一个不可数的正则基数.

对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $f_\alpha : \omega \to \alpha$ 为一个满射. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $g(\alpha) = f_\alpha$. 那么在 $\prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 中, $[\![g]\!]_G : [\![c_\omega]\!]_G \to [\![\mathrm{Id}_{\omega_1}]\!]_G$ 是一个满射. 所以, 在 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 中, ω_1^{V} 是一个可数序数. 因此

$$\omega_1^{\mathrm{V}[G]} = \omega_1^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)} = \omega_2^{\mathrm{V}}. \qquad \square$$

泛型超幂由索洛维在文献15中引入. 自引入之后, 泛型超幂便成为一种强有力的工具被用来解决一系列问题. 后面我们会看到泛型超幂在解决实数子集正则性问题中的巨大作用. 在这里, 我们用一个例子来说明它的作用. 在这个例子中, 我们用泛型超幂来证明银杰定理 (定理 I.2.38). 事实上这也是银杰自己的原始证明[16].

例 2.4 用泛型超幂证明下述银杰定理: 设 κ 是一个梯度为 ω_1 的奇异基数, 并且 $\forall\lambda\left(|\lambda| = \lambda < \kappa \to 2^\lambda = \lambda^+\right)$. 那么 $2^\kappa = \kappa^+$.

证明 令 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathrm{NS}}$ 为 ω_1 上的非荟萃子集理想. 令 $\mathbb{P}$ 为 ω_1 上的荟萃子集力迫构思. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 由于在 V 中有 $|P| = 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \kappa$, 所有 $\geqslant \omega_3$ 的基数在 $\mathrm{V}[G]$ 中都被保持下来.

在 $\mathrm{V}[G]$ 中, G 是 ω_1^{V} 上的一个正规的 σ-完全的 V-超滤子. 令 $N = \prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 为 V 的由 G 所确定的泛型超幂, 令 $i'_G : \mathrm{V} \to \prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 为同质嵌入映射. N 未必是有秩的.

令 $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ 为 V 中的一个严格单调递增收敛于 κ 的基数序列. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令

$$f(\alpha) = \kappa_\alpha \wedge f^+(\alpha) = \kappa_\alpha^+.$$

令 $e = [\![f]\!]_G$, 以及 $e^+ = [\![f^+]\!]_G$. 那么, 在 N 中, e 是一个基数, 并且 e^+ 是 e 的后继基数.

对于 $X \in \mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}$, 令 $f_X : \omega_1 \to \mathfrak{P}(\kappa)$ 为由下述等式所定义的函数: 对于 $\alpha < \omega_1$,

$$f_X(\alpha) = X \cap \kappa_\alpha.$$

在 N 中, $[\![f_X]\!]_G \subseteq_G e$. 并且对于 κ 的两个子集 $X \neq Y$,

$$\{\alpha < \omega_1 \mid f_X(\alpha) \neq f_Y(\alpha)\} \in \mathcal{I}.$$

所以, $[\![f_X]\!]_G \neq_G [\![f_Y]\!]_G$. 因此 $\left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right| \leqslant \left|\mathfrak{P}(e)^N\right|$.

15 R. M. Solovay, Real-valued measurable cardinals. In "Axiomatic Set Theory" (D. S. Scott, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Loś Angeles, Calif., 1967. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 397-428.

16 J. H. Silver, On the singular cardinal problem. In "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Vancouver, B. C., 1974, Vol. 1., Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, pp. 265-268.

由于 $\mathrm{V} \models \forall\alpha < \omega_1 \left(2^{f(\alpha)} = f^{+}(\alpha)\right)$, 根据泛型超幂基本定理, $N \models 2^{e} = e^{+}$. 因此, 在 N 中存在一个从 $\mathfrak{P}(e)^N$ 到 e^{+} 之间的双射. 从而, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中存在一个从 $\mathfrak{P}(e)^N$ 到

$$A = \left\{ x \in \mathrm{Ord}^N \;\middle|\; x \in_G e^{+} \right\}$$

之间的双射. 于是, $\left|\mathfrak{P}(e)^N\right| \leqslant |A|$.

下面在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们来寻找 $|A|$ 的上界.

断言 $e = \sup\left(\left\{ i'(\kappa_\gamma) \mid \gamma < \omega_1^{\mathrm{V}} \right\}\right)$.

设 $h : \omega_1^V \to \kappa$ 满足 $[\![h]\!]_G \in_G e$, 那么 G 中一定有一个极限序数的集合 X 来见证后述事实: $\forall\alpha \in X\ (h(\alpha) < \kappa_\alpha)$. 于是, $\forall\alpha \in X\, \exists\gamma(\alpha) < \alpha\ \left(h(\alpha) < \kappa_{\gamma(\alpha)}\right)$; 根据 G 的正规性, G 中必有一个 $Y \subset X$ 以及一个 $\gamma < \omega_1^{\mathrm{V}}$ 来见证后述事实: $\forall\alpha \in Y\ (h(\alpha) < \kappa_\gamma)$. 由此, 根据泛型超幂的定义, $[\![h]\!]_G \in_G i'(\kappa_\gamma)$. 断言得证.

依据上述断言, 我们有

$$\forall\gamma < \omega_1^{\mathrm{V}} \left(\left| \left\{ x \in \mathrm{Ord}^N \mid x \in_G i'(\kappa_\gamma) \right\} \right| \leqslant \left| \left(\kappa_\gamma^{\omega_1}\right)^{\mathrm{V}} \right| < \kappa \right).$$

令 $B = \left\{ x \in \mathrm{Ord}^N \;\middle|\; x \in_G e \right\}$. 根据上述断言以及上面的不等式, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们就有 $|B| \leqslant \kappa$.

现在 $x \in_G e^{+}$. 那么在 N 中存在一个从 x 到 e 的单射. 于是

$$\left| \left\{ y \in \mathrm{Ord}^N \;\middle|\; y \in_G x \right\} \right| \leqslant |B| \leqslant \kappa.$$

综合上述, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们得到线性集合 $(A, \in_G)$ 的任何真前段的势不会超过 κ. 因此, $|A| \leqslant \kappa^{+}$. 从而在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们得到 $\left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right| \leqslant \kappa^{+}$. 也就是说,

$$\left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right|^{\mathrm{V}[G]} \leqslant \left(\kappa^{+}\right)^{\mathrm{V}[G]}.$$

因为 $(|\kappa|)^{\mathrm{V}[G]} = (|\kappa|)^{\mathrm{V}} = \kappa$, $(\kappa^{+})^{\mathrm{V}[G]} = (\kappa^{+})^{\mathrm{V}}$, 以及 $\left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right|^{\mathrm{V}[G]} = \left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right|^{\mathrm{V}}$, 所以 $\left|\mathfrak{P}(\kappa)^{\mathrm{V}}\right|^{\mathrm{V}} \leqslant \kappa^{+}$. 也就是说, 在 V 中, $2^{\kappa} = \kappa^{+}$. □

2.7.2 力迫 NS 峭壁

在这一小节里我们展示两个关于 ω_1 上存在峭壁理想的可能性定理. 这种可能性模型都在可测基数存在的基础上以力迫扩张的方式得到. 第一个模型利用莱维可数化力迫构思将所有小于可测基数的基数可数化得到, 因为在这个模型中, 原正规超滤子的对偶理想就能生成一个峭壁理想; 第二个模型在第一个模型基础上应用可数支撑迭代逐步将以前所生成的理想中的所有荟萃子集的荟萃性用例 II.3.13 所给出的方式消除. 这两个模型都在文献17 中被构造出来.

17 T. J. Jech, M. Magidor, W. J. Mitchell, and K, L. Prikry, Precipitous ideals. J. Symbolic Logic, 45 (1980), no. 1, 1-8.

定理 2.20 (Mitchell) 设 κ 是一个可测基数. 设 $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 为化 κ 为 ω_1 的莱维力迫构思. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, ω_1 上存在一个 σ-完全的非平凡的正规的峭壁理想.

证明 设 κ 是一个可测基数. 设 U 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 令

$$j : \mathrm{V} \prec M \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$$

是由 U 所确定的超幂同质映射.

令 $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$. 回顾一下, 将 κ 弱化为第一个不可数基数的莱维力迫构思中的条件是那些定义在 $\kappa \times \omega$ 的有限子集上的满足下述要求的函数:

$$\forall (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\, (p(\alpha, n) < \alpha),$$

以及一个条件 p 比另一个条件 q 强, $p \leqslant q$, 当且仅当 $p \supset q$.

设 G 是 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, κ 被弱化为第一个不可数基数. 于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 对于 $X \subset \kappa$, 令

$$X \in \mathcal{I} \leftrightarrow \exists Y \in U \ (X \cap Y = \varnothing).$$

设 τ 是一个 $\mathbb{P}$-名字以至于 $\mathbf{1} \Vdash \tau \in \check{\kappa}$. 根据 κ-链条件, 令 $\alpha < \kappa$ 实现 $\mathbf{1} \Vdash \tau \in \check{\alpha}$. 于是集合 $(\kappa - \alpha) \in U$ 就保证了 $\tau/G \in \mathcal{I}$. 所以在 $\mathrm{V}[G]$ 中 $\mathcal{I}$ 非平凡.

设 τ 是一个定义在 ω 上的函数的名字, 并且对 $n < \omega$, 令 s_n 为一个名字满足

$$\mathbf{1} \Vdash s_n \in \mathcal{I} \wedge \tau(\check{n}) = s_n,$$

再令 $\dot{X}_n$ 为一个名字以至于

$$\mathbf{1} \Vdash \left(\dot{X}_n \in \check{U} \wedge s_n \cap \dot{X}_n = \varnothing\right).$$

固定 $n < \omega$, 令 $D_n = \left\{p \in P \,\middle|\, \exists X \in U \ \left(p \Vdash \dot{X}_n = \check{X}\right)\right\}$; 令 $A_n \subset D_n$ 为一个极大冲突子集. 那么 $|A_n| < \kappa$. 令 $\gamma_n < \kappa$ 为一个不可达基数以至于 $A_n \subset \mathrm{Col}\,(\omega, <\gamma_n)$. 对于每一个 $p \in A_n$, 令 $X_p \in U$ 满足

$$p \Vdash \dot{X}_n = \check{X}_p.$$

令 $X_n = \bigcap \{X_p \mid p \in A_n\}$. 根据 U 的完全性, $X_n \in U$. 再令 $Y = \bigcap \{X_n \mid n < \omega\}$. 那么 $Y \in U$. 于是,

$$\left(\mathbf{1} \Vdash \check{Y} \cap \bigcup \{s_n \mid n < \omega\} = \varnothing\right).$$

这就表明 $\mathcal{I}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是 σ-完全的.

现在我们来证明 $\mathcal{I}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中关于对角线和是封闭的. 令 τ 为一个名字以至于

$$\mathbf{1} \Vdash \forall\alpha < \check{\kappa} \left(\tau(\alpha) \in \dot{\mathcal{I}}\right).$$

对于每一个 α, 令 $\dot{X}_\alpha$ 为一个名字以至于

$$\mathbf{1} \Vdash \dot{X}_\alpha \in \check{U} \wedge \tau(\check{\alpha}) \cap \dot{X}_\alpha = \varnothing.$$

根据链条件以及上面的讨论, 令 $X_\alpha \in U$ 来实现 $\mathbf{1} \Vdash \check{X}_\alpha = \dot{X}_\alpha$. 令

$$Y = \Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\gamma < \kappa \mid \forall\alpha < \gamma\ (\gamma \in X_\alpha)\}.$$

那么,

$$\mathbf{1} \Vdash \left(\check{Y} \cap \nabla_{\alpha<\kappa}\tau(\alpha)\right) = \varnothing.$$

假设不然. 令

$$p \Vdash \exists\alpha < \check{\kappa}\ \left(\alpha \in \left(\check{Y} \cap \nabla_{\alpha<\kappa}\tau(\alpha)\right)\right).$$

令 $G \ni p$ 为 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 令 $\alpha < \kappa$ 满足

$$\alpha \in Y \cap \{\gamma < \kappa \mid \exists\beta < \gamma\ (\gamma \in (\tau/G)(\beta))\}.$$

令 $\beta < \alpha$ 来见证 $\alpha \in (\tau/G)(\beta)$. 可是, $X_\beta \cap (\tau/G)(\beta) = \varnothing$, $\alpha \in Y$, 根据 Y 的定义, $\alpha \in X_\beta$. 这就是一个矛盾.

这些就表明 $\mathcal{I}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是正规理想.

我们把验证在 $\mathrm{V}[G]$ 中 $\mathcal{I}$ 是峭壁理想的工作留给读者作为练习. 下面来证明一个稍弱的但足以满足定理要求的结论: 在 $\mathrm{V}[G]$ 中,

$$\exists S \subset \omega_1\ \left(S \notin \mathcal{I} \wedge \mathcal{I}\restriction_S = \{T \subset \omega_1 \mid T \cap S \in \mathcal{I}\}\ \text{是一个峭壁理想}\right).$$

为此, 我们来证明在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 存在一个 $S \notin \mathcal{I}$ 以至于如果 H 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathcal{I}^+$-泛型超滤子, 并且 $S \in H$, 那么在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中, 由 H 确定的泛型超幂 $\prod_H(\mathrm{V}[G], \in)$ 是有秩的. 根据力迫论基本定理, 我们只需要在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 找到一个 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathcal{I}^+$-泛型超滤子 H 来实现下述目标: 在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中, 由 H 确定的泛型超幂 $\prod_H(\mathrm{V}[G], \in)$ 是有秩的.

对于 $\nu < \kappa$, 令 $P_\nu = \{p \in P \mid \forall(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\,(\alpha < \nu)\}$, 以及令

$$P^\nu = \{p \in P \mid \forall(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\,(\alpha \geqslant \nu)\}.$$

那么 $P \cong P_\nu \times P^\nu$.

我们来考虑 $j(P)$. 根据定义, $P=(j(P))_\kappa$. 令 $Q=(j(P))^\kappa$. 那么

$$j(P)=P\times Q.$$

Q 中的每一个条件 $q\in Q$ 在超幂的传递化 M 中都由一个 V 中的定义在 κ 上的具备下述特点的函数 $\tilde{q}$ 来表示:

$$(\forall\alpha<\kappa\ (\tilde{q}(\alpha)\in P^\alpha))\wedge q=j\left(\tilde{q}\right)(\kappa).$$

令 K 为 $\mathrm{V}[G]$ 上的一个 Q-泛型超滤子. 根据乘积力迫构思基本定理, $G\times K$ 是 V 上的 $P\times Q$-泛型超滤子.

在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中, 我们依据下述表达式将 $j:\mathrm{V}\prec M$ 延拓成 $j^*:\mathrm{V}[G]\prec M[G\times K]$: 对于每一个 $\mathbb{P}$-名字 $\dot{a}$, 令

$$j^*\left(\dot{a}/G\right)=j\left(\dot{a}\right)/G\times K.$$

由于 $\forall p\in P\ (p\in G\to j(p)\in G\times H)$, 所以上面的定义与名字的选取无关.

在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中, 我们如下定义 κ 上的一个 $\mathrm{V}[G]$-超滤子 W: 对于 $X\subseteq\kappa$, 令 $\dot{X}$ 为一个 $\mathbb{P}$-名字以至于 $X=\dot{X}/G$, 然后再令

$$X\in H\leftrightarrow\kappa\in\left(j\left(\dot{X}\right)\right)\Big/G\times K.$$

令 $\dot{H}$ 为这个 H 的典型名字. 那么,

$$\forall p\in P\,\forall q\in Q\left(\left[(p,q)\Vdash\dot{X}\in\dot{H}\right]\leftrightarrow\left\{\alpha<\kappa\ \Big|\ p\cup\tilde{q}(\alpha)\Vdash\check{\alpha}\in\dot{X}\right\}\in U\right).$$

首先, 我们来验证在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中, 由 H 所确定的 $\mathrm{V}[G]$ 的超幂是有秩的. 为此, 对于定义在 κ 上的函数 $f\in\mathrm{V}[G]$, 令

$$k\left([\![f]\!]_H\right)=\left(j^*(f)\right)(\kappa).$$

那么, $k:\prod_H(\mathrm{V}[G],\in)\prec M[G\times K]$, 并且我们有下述交换图: $j^*=k\circ i'_H$, 即

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{V}[G] & \xrightarrow{j^*} & M[G\times K]\\ i'_H\downarrow & k\nearrow & \\ \prod_H(\mathrm{V}[G],\in) & & \end{array}$$

这样, 由 H 所确定的 $\mathrm{V}[G]$ 的超幂是有秩的.

其次, 证明 H 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathcal{I}^+$-泛型超滤子. 为此, 我们来证明如下命题在 $\mathrm{V}[G]$ 中成立: 如果 $\chi=\{X_i\mid i<\theta\}$ 是 κ 的一个 $\mathcal{I}$-分划, 那么 $\exists i<\theta\ (X_i\in H)$.

设 $\chi = \{ X_i \mid i < \theta\}$ 是 κ 的一个 $\mathcal{I}$-分割. 令 $\dot{\chi}$ 为这个分划的一个 $\mathbb{P}$-名字; 对于每一个 $i < \theta$, 令 $\dot{X}_i$ 为 X_i 的一个 $\mathbb{P}$-名字.

欲得到一个矛盾, 假设存在一个 $p \in G$ 以及一个 $q \in K$ 来满足下述要求:

$$p \Vdash \dot{\chi} \text{ 是 } \check{\kappa} \text{ 的一个 } \dot{\mathcal{I}}\text{- 分划},$$

以及对于所有的 $i < \theta$ 都有 $(p, q) \Vdash \dot{X}_i \notin \dot{H}$. 利用 q 的表示函数 $\tilde{q}$, 我们就有对于每一个 $i < \theta$, 令 $A_i \in U$ 来见证

$$\forall \alpha \in A_i \left(p \cup \tilde{q}(\alpha) \Vdash \check{\alpha} \notin \dot{X}_i \right).$$

在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们如下定义 κ 的一个子集合 T:

$$T = \{\alpha < \kappa \mid \tilde{q}(\alpha) \in G\}.$$

断言　$T \notin \mathcal{I}$, 并且 $\forall i < \theta \ (T \cap X_i \in \mathcal{I})$.

对于 $i < \theta$, 如果 $\alpha \in T \cap A_i$, 那么 $p \cup \tilde{q}(\alpha) \in G$, 从而 $\alpha \notin X_i$. 因此,

$$T \cap A_i \cap X_i = \varnothing;$$

根据 $\mathcal{I}$ 的定义, $T \cap X_i \in \mathcal{I}$.

欲证 $T \notin \mathcal{I}$, 我们只需验证: $\forall B \in U, (T \cap B \neq \varnothing)$. 设 $B \in U$. 令

$$E = \{r \in P \mid \exists \alpha \in B \ (r \leqslant \tilde{q}(\alpha))\}.$$

由于 B 在 κ 中无界, 以及 $\forall \alpha < \kappa \ (\tilde{\alpha} \in P^{\alpha})$, 我们得知 $E \in \mathrm{V}$ 在 $\mathbb{P}$ 中是一个稠密子集. 于是, $G \cap E \neq \varnothing$, 从而 $T \cap B \neq \varnothing$.

于是断言得证.

这便是我们需要的矛盾: $\chi = \{ X_i \mid i < \theta\}$ 是 κ 的一个 $\mathcal{I}$-分割. □

下面我们来看看如何得到 ω_1 上的非荟萃理想为一个峭壁理想.

定理 2.21 (Magidor)　*设 κ 是一个可测基数. 那么存在一个力迫构思 $\mathbb{P}$ 以至于在 V 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, ω_1 上的荟萃理想是一个峭壁理想.*

证明　设 κ 是一个可测基数, 并且 $2^{\kappa} = \kappa^{+}$. 这种假设是合理的, 因为取可测基数 κ 上的一个正规测度 U, 构造 $L[U]$, 那么在 $L[U]$ 中 κ 依旧是可测的, 并且 $2^{\kappa} = \kappa^{+}$ 成立. 然后在 $\mathrm{V} = L[U]$ 的模型中工作.

设 U 是 κ 上的一个正规测度. 令 $j : \mathrm{V} \prec M = \mathrm{ult}(\mathrm{V}, U) \cong \prod_U (\mathrm{V}, \in)$ 为 U 所确定的同质嵌入映射, 其中 M 是超幂 $\prod_U (\mathrm{V}, \in)$ 的传递化.

令 $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\omega, < \kappa)$ 为莱维力迫构思将 κ 弱势化为第一个不可数基数, 其中每一个条件 p 是定义在 $\kappa \times \omega$ 的某个有限子集上的满足下述要求的函数:

$$\forall(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)\,(p(\alpha, n) < \alpha);$$

其偏序为: 条件 $p \leqslant q$ 当且仅当 $p \supset q$. 这是一个满足 κ-链条件的力迫构思. 它将所有严格小于 κ 的序数可数化, 但不改变 κ 及其以上的基数的特点. 力迫构思 $\mathbb{P}$ 有很好的分解特点: 对于每一个 $\nu < \kappa$, $P \cong P_\nu \times P^\nu$.

设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 如 Mitchell 定理 (定理 2.20) 的证明一样, 令

$$\mathcal{I}_0 = \{\, X \subset \kappa \mid \exists Y \in U\,(X \cap Y = \varnothing)\}\,.$$

这是一个 $\kappa = \aleph_1$ 上的非平凡的 σ-完全的正规理想.

完全有可能理想 $\mathcal{I}_0$ 中含有 ω_1 的荟萃子集. 一个基本的想法就是让 $\mathcal{I}_0$ 中的那些荟萃集丧失荟萃特性. 比如, $T \in \mathcal{I}_0$ 是一个荟萃子集. 由于 $\mathcal{I}_0$ 是一个真理想, $\kappa - T$ 在 $\mathcal{I}_0$ 的对偶滤子之中, 而这个滤子又包含着 κ 上的无界闭集滤子. 所以 $S = \kappa - T$ 必然是也是一个荟萃子集. 用例 II.3.13 所定义的满足 ω-分配律的力迫构思 $\mathbb{P}_S$: P_S 是 S 的所有有界闭子集的集合. 对于 $p, q \in P_S$, 定义

$$p \leqslant q \iff \exists\alpha\,(q = p \cap \alpha).$$

也就是说, p 是 q 的末端扩展. 令 $\mathbb{P}_S = (P_S, \leqslant)$. 这样, 我们既可以保持 ω_1 的不可数特点, 又可以对荟萃集 S 添加一个 ω_1 的无界闭子集, 从而 T 便失去了荟萃性.

在下面的迭代中, Q_1 就是在固定了第零个 $\mathcal{I}_0$ 中的荟萃子集之后 P_S 中的元素长度为 1 的序列的全体, 从而在 V$[G]$ 的 Q_1-泛型扩张中添加一个 κ 的无界闭子集 C_0.

现在我们希望在 $\mathrm{V}\,[G, C_0]$ 中定义 $\mathcal{I}_1$ 以及 Q_2.

如同定理 2.20 的证明那样, 考虑

$$j(P) = P \times Q = (j(P)_\kappa) \times (j(P))^\kappa\,,$$

以及 K 为 V$[G]$ 上的 Q-泛型滤子. 在 V 的 $j(P)$-泛型扩张 V$[G \times K]$ 中以下述等式

$$j^*\,(\tau/G) = (j(\tau))\,/G \times K$$

将 j 延拓到 $j^* : \mathrm{V}[G] \prec M[G \times K]$. 然后在 V$[G \times K]$ 中定义

$$H_0 = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j^*(X)\}\,.$$

这样 H_0 是一个 $\mathcal{I}_0^+$-泛型超滤子, 并且在 $\mathrm{V}[G]\,[H_0]$ 中的泛型超幂 $\prod\limits_{H_0}(\mathrm{V}[G],\in)$ 是有秩的. 我们希望定义的 $\mathcal{I}_1$ 就与这个 H_0 直接相关.

另一方面, 因为 $\left|(\mathfrak{P}\,(Q_1))^{\mathrm{V}[G]}\right| = \kappa^+ < j(\kappa)$, 在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中 $\left|(\mathfrak{P}\,(Q_1))^{\mathrm{V}[G]}\right| = \aleph_0$. 这就意味着在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中有 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_1-泛型超滤子存在. 有趣的是, 由于 $M[G\times K]$ 在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中对于长度为 κ 的序列是封闭的, 因此 $Q_1 \in M[G\times K]$, 并且 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中所有的 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_1-泛型超滤子都在 $M[G\times K]$ 中. 也就是说, 在 $M[G\times H]$ 中有 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_1-泛型超滤子.

设 $G_0 \in M[G\times K]$ 是 $M[G]$ 上的 Q_1-泛型超滤子. 那么在 $M[G\times K]$ 中,

$$q = \{\kappa\} \cup \bigcup G_0$$

就是 $j(\kappa)$ 的一个可数闭子集, 从而 $q \in j^*\,(Q_1)$, 并且对于任何 $r \in G_0$ 都有 $q \leqslant j^*(r)$. 这样一来, 我们可以尝试以如下方式来定义 $\mathcal{I}_1$: 对于 $X \in \mathrm{V}\,[G, G_0]$, 令 $X \in \mathcal{I}_1$ 当且仅当 G 中有一个条件 p 来见证下述事实:

$$(p,q) \Vdash_{j(P)*(j^*(Q_1))} \check{\kappa} \notin j^*\left(\dot{X}\right),$$

其中, $\dot{X}$ 是 $\mathrm{V}[G]^{Q_1}$ 名字以至于在 $\mathrm{V}\,[G, G_0]$ 中, $X = \dot{X}/G_0$. 自然, 我们还需要验证这样得到的理想具有所需要的基本性质. 然后, 我们再从 $\mathcal{I}_1$ 中选出一个荟萃子集来, 并定义对它的补集添加一个无界闭子集的力迫构思, 以及得到它们的迭代 Q_2. 后面我们将进一步细化这里所展示的粗略想法.

现在我们的目标是在此基础上, 以可数支撑迭代力迫的方式, 得到一个长度为 κ^+ 的序列

$$\mathcal{C} = \left\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \right\rangle,$$

以至于每一个 C_α 都是在 $\mathrm{V}\,[G, \mathcal{C}\restriction_\alpha]$ 的基础上对 κ 的第 α 个荟萃子集添加的一个无界闭集; 从而在 $\mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 中, $\omega_1 = \kappa$ 上的非荟萃子集理想是

$$\bigcup\left\{\mathcal{I}_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\right\},$$

并且是一个峭壁理想. 具体的构造中, 将以递归方式构造序列

$$\left\langle (\mathcal{I}_\alpha, Q_\alpha) \mid \alpha < \kappa^+ \right\rangle,$$

其中 Q_α 是 $\mathrm{V}\,[G, \mathcal{C}\restriction_\alpha]$ 中的一个势不会超过 κ 的力迫构思, 从而得到 κ 的一个无界闭子集序列 $\langle C_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$; 并且最终可以保证极限力迫构思 Q_{κ^+} 满足 κ-链条件.

由于可以保证 Q_{κ^+} 满足 κ^+-链条件, 从技术上讲, 就可以利用 $2^\kappa = \kappa^+$ 这个条件, 将每一步泛型扩张 $\mathrm{V}\,[G, \mathcal{C}\restriction_\alpha]$ 中 κ 的子集合的全体以长度为 κ^+ 的一个序列全

部罗列出来. 这里所需要的只是一个从 κ^+ 到 $\kappa^+\times\kappa^+$ 的双射 π 以至于 $\pi(\alpha)$ 的第一个分量不会超过 α . 这样我们就可以定义一个序列

$$\left\langle \dot{A}_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa^+ \right\rangle$$

以至于对于每一个 $\alpha<\kappa^+$, $\dot{A}_\alpha$ 是 $\mathrm{V}\left[G,\mathcal{C}\restriction_\alpha\right]$ 中 κ 的一个子集合的名字, 并且对于每一个 $\alpha<\kappa^+$, $\mathrm{V}\left[G,\mathcal{C}\restriction_\alpha\right]$ 中 κ 的每一个子集合都在这个名字序列中有一个指标为 $\gamma\geqslant\alpha$ 的名字 $\dot{A}_\gamma$. 由于每一个 Q_α 的势不超过 κ, 所以在 $\mathrm{V}\left[G,\mathcal{C}\restriction_\alpha\right]$ 之中, $\mathfrak{P}(\kappa)$ 之势还是 κ^+. 这为上述列表提供了充分必要条件. 因为保证了 Q_{κ^+} 满足 κ-链条件, 在最终模型 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 中的 κ 的每一个子集合都会出现在某一个中间模型 $\mathrm{V}\left[G,\mathcal{C}\restriction_\alpha\right]$ 之中. 当然, 这个列表并非一开始就能够制定出来, 而是随着迭代的进展逐步往里添加, 但是配对双射函数 π 是可以事先固定的. 所以, 实际上 $\dot{A}_\alpha$ 是所有已经产生的 κ 的子集合中的第 $\pi(\alpha)$ 个子集合的名字.

具体而言, 对于 $\alpha\leqslant\kappa^+$, Q_α 中的条件恰好是在 $\mathrm{V}[G]$ 中具备下述特点的长度为 α 的序列 $q=\langle q_\beta\mid\beta<\alpha\rangle$:

(a) $\{\beta<\alpha\mid q_\beta\neq\varnothing\}$ 是一个可数集合;

(b) 对于每一个 $\beta<\alpha$ 而言, q_β 都是 κ 的一个可数闭子集;

(c) $\forall\beta<\alpha\ (q_\beta\restriction_\beta\in Q_\beta)$;

(d) 如果 $\alpha=\beta+1$, 那么或者 $q\restriction_\beta\Vdash\dot{A}_\beta\notin\mathcal{I}_\beta$, 或者 $q\restriction_\beta\Vdash q_\beta\cap\dot{A}_\beta=\varnothing$.

对于 Q_α 中的两个条件 p 和 q, 定义

$$p\leqslant q\leftrightarrow\forall\beta<\alpha\,\exists\gamma<\kappa\ (q_\beta=\gamma\cap p_\beta)\,.$$

可见, Q_α 是完成 α-步迭代所得到的力迫构思; 迭代过程中的每一个后继步都是对 κ 以可数闭子集为条件添加一个无界闭集, 使得理想 $\mathcal{I}_\beta$ 中的某个荟萃子集失去荟萃性.

现在假设 $\alpha<\kappa^+$ 并且 Q_α 已经有定义. 我们需要定义 $\mathcal{I}_\alpha$, 从而可以定义 $Q_{\alpha+1}$.

在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中讨论. 我们有 $j^*:\mathrm{V}[G]\prec M[G\times K]$. 注意, 在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中, 我们有

$$(M[G\times K])^\kappa\cap\mathrm{V}[G\times H]\subset M[G\times K].$$

(验证留作练习.) 由于 $\alpha<\kappa^+$,

$$\left|\mathfrak{P}\left(Q_\alpha\right)^{\mathrm{V}[G]}\right|=\kappa^+<j(\kappa),$$

从而 $\mathfrak{P}\left(Q_\alpha\right)^{\mathrm{V}[G]}$ 在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中是一个可数集合. 因此, 在 $\mathrm{V}[G\times K]$ 中就有一个 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_α-泛型超滤子 G_α. 对于 $\beta<\alpha$, 令

$$C_\beta=\bigcup\left\{q(\beta)\ \mid q\in G_\alpha\right\},$$

那么 $C_\beta \subset \kappa$ 是 κ 的一个无界闭集, 从而得到 $\mathcal{C} = \langle C_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$. 因为每一个 $C_\beta \subset \kappa$, $|\alpha| \leqslant \kappa$, 根据 $M[G \times K]$ 的封闭性, $\mathcal{C} \in M[G \times K]$.

为了叙述简便, 对于 κ 的无界闭集的长度为 α 的序列 $\mathcal{C} = \langle C_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$, 以及 $q \in Q_\alpha$, 我们用记号 $q \in \mathcal{C}$ 表示:

$$\forall \beta < \alpha \, \exists \gamma < \kappa \, (q(\beta) = \gamma \cap C_\beta) .$$

在 $M[G \times K]$ 中, 对于任意的 $M[G]$ 上的 Q_α-泛型超滤子 $\mathcal{C} = \langle C_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$, 如下定义一个长度为 $j(\alpha)$ 的序列 $q^{\mathcal{C}} = \left\langle q^{\mathcal{C}}_\gamma \;\middle|\; \gamma < j(\alpha)\right\rangle$:

$$q^{\mathcal{C}}_\gamma = \begin{cases} C_\beta \cup \{\kappa\} & \text{如果 } \gamma = j(\beta), \\ \varnothing & \text{如果 } \gamma \neq j(\beta). \end{cases}$$

由于 $|j[\alpha+1]| \leqslant \kappa$ 以及 $M^\kappa \subset M$, 因此 $j[\alpha+1] \in M$, 从而 $q^{\mathcal{C}} \in M[G \times K]$.

断言一　$q^{\mathcal{C}} \in j^*(Q_\alpha)$, 并且 $\forall q \in \mathcal{C} \left(q^{\mathcal{C}} \leqslant j^*(q)\right)$.

我们用关于 $\alpha < \kappa^+$ 的归纳法来证明断言一, 并且同时给出对那些大于 0 的 $\beta(\beta < \alpha)$, 我们所需要的理想 $\mathcal{I}_\beta$ 的定义.

当 $0 < \beta \leqslant \alpha$ 时, 对于 $X \in \mathrm{V}[G, \mathcal{C} \restriction_\beta] \cap \mathfrak{P}(\kappa)$, 令 $X \in \mathcal{I}_\beta$ 当且仅当存在 $p \in G$ 以及存在 $q \in \mathcal{C} \restriction_\beta$ 一起来见证下述事实:

$$p \Vdash_{j(P)} \left(\text{对 } M[G] \text{ 上的每个 } Q_\beta\text{-泛型滤子 } \mathcal{C}' \ni q \text{ 都有 } \left(q^{\mathcal{C}'} \Vdash_{j^*(Q_\beta)} \check{\kappa} \notin j^*\left(\dot{X}\right)\right)\right).$$

现在假设对于 $\beta < \alpha$, 断言一已经被证明. 我们来验证断言一对于 α 也成立. 只需要验证 $q^{\mathcal{C}} \in j^*(Q_\alpha)$. 对此唯一需要验证的又只是 $q^{\mathcal{C}}$ 满足条件 (d), 因为前三条由定义直接得到.

设 $\alpha = \beta + 1$, 并且设 $q^{\mathcal{C}} \restriction_{j(\beta)} \nVdash j^*\left(\dot{A}_\beta\right) \notin j^*(\mathcal{I}_\beta)$. 我们希望证明

$$q^{\mathcal{C}} \restriction_{j(\beta)} \Vdash \left(q^{\mathcal{C}}_{j(\beta)} \cap j^*\left(\dot{A}_\beta\right) = \varnothing\right).$$

根据定义, κ 是 $q^{\mathcal{C}}_{j(\beta)}$ 中的最大序数. 令 $\xi \leqslant \kappa$.

情形一　$\xi < \kappa$.

假设在 $M[G \times K]$ 的某个泛型扩张中有 $\xi \in q^{\mathcal{C}}_{j(\beta)} \cap \left(j^*\left(\dot{A}_\beta\right)\right) \big/ H$, 其中 H 是某个泛型超滤子, 并且 $q^{\mathcal{C}} \restriction_{j(\beta)} \in H$. 由于 $j(\xi) = \xi$, 我们有 $\xi \in C_\beta$. 因此, Q_α 中有一个条件 q 具备下述特点: $q \in \mathcal{C}$, $\xi \in q_\beta$, 并且 $q \restriction_\beta \Vdash \check{\xi} \in \dot{A}_\beta$. 于是, $q \restriction_\beta \Vdash \dot{A}_\beta \notin \mathcal{I}_\beta$. 根据同质性, $j^*(q \restriction_\beta) \Vdash j^*\left(\dot{A}_\beta\right) \notin \mathcal{I}_{j(\beta)}$. 由于 $q^{\mathcal{C}} \restriction_{j(\beta)} \leqslant j^*(q \restriction_\beta)$, 我们有

$$q^{\mathcal{C}} \restriction_{j(\beta)} \Vdash j^*\left(\dot{A}_\beta\right) \notin \mathcal{I}_{j(\beta)}.$$

这与假设相矛盾.

情形二 $\xi = \kappa$.

令 $q \in \mathcal{C}\restriction_\beta$ 满足要求: 或者 $q \Vdash \left(\dot{A}_\beta \in \mathcal{I}_\beta\right)$, 或者 $q \Vdash \left(\dot{A}_\beta \notin \mathcal{I}_\beta\right)$.

如果 $q \Vdash \left(\dot{A}_\beta \notin \mathcal{I}_\beta\right)$ 成立, 和情形一一样我们得到一个矛盾.

于是必有 $q \Vdash \left(\dot{A}_\beta \in \mathcal{I}_\beta\right)$ 成立. 根据 $\mathcal{I}_\beta$ 的定义, 我们有

$$q^{\mathcal{C}}\restriction_{j(\beta)} \Vdash \check{\kappa} \notin j^*\left(\dot{A}_\beta\right).$$

于是, $q^{\mathcal{C}}\restriction_{j(\beta)} \Vdash \left(q^{\mathcal{C}}_{j(\beta)} \cap j^*\left(\dot{A}_\beta\right) = \varnothing\right)$.

这就完成了 $q^{\mathcal{C}} \in j^*(Q_\alpha)$ 的验证. 从而, 断言一得证.

这样, 我们就完成了力迫构思 Q_{κ^+} 的定义. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, Q_{κ^+} 是这样一个可数支撑的迭代力迫: 对于 $\alpha < \kappa^+$, 如果 $\dot{A}_\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$, 那么

$$Q_{\alpha+1} = Q_\alpha * \dot{P}_{\left(\kappa - \dot{A}_\alpha\right)},$$

其中, $\dot{P}_{\left(\kappa - \dot{A}_\alpha\right)}$ 是以可数闭子集为条件的对 $\left(\kappa - \dot{A}_\alpha\right)$ 添加一个无界闭子集的力迫构思的一个 Q_α-名字.

断言二 Q_{κ^+} 满足 κ^+-链条件.

设 W 为 Q_{κ^+} 的一个极大冲突子集. 由于对每一个 $\alpha < \kappa^+$ 都有 $|Q_\alpha| \leqslant \kappa$,

$$\exists \alpha < \kappa^+ \, \forall q \in W \, \exists q' \in W \cap Q_\alpha \, (q' \leqslant q\restriction_\alpha).$$

固定此 α. 任意给定 $q \in W$, 令 $q' \in W \cap Q_\alpha$ 满足结论. 那么 $q \cup q'$ 就是一个条件, 从而 q 与 q' 是相容的, 因此, $q = q'$. 这就表明: $W \subset Q_\alpha$, 从而 $|W| \leqslant \kappa$.

断言二因此得证.

断言三 $\forall \beta < \alpha \, (\mathcal{I}_\beta = \mathcal{I}_\alpha \cap \mathrm{V}[G, \mathcal{C}\restriction_\beta])$.

设 $\beta < \alpha$. 根据定义, 不等式 $\mathcal{I}_\beta \subset \mathcal{I}_\alpha$ 成立. 我们来验证另外一个方向:

$$\mathcal{I}_\beta \supseteq \mathcal{I}_\alpha \cap \mathrm{V}[G, \mathcal{C}\restriction_\beta].$$

设 $\dot{X}$ 是 κ 的一个子集的 $\mathbb{P} * Q_\beta$-名字. 设 $p \in P$ 和 $q \in Q_\alpha$ 一起满足

$$(p, q) \Vdash \dot{X} \in \mathcal{I}_\alpha \ \wedge \ \dot{X} \notin \mathcal{I}_\beta.$$

根据后者, 我们有

$$p \Vdash_{j(P)} \exists \mathcal{C}' \left(\begin{array}{l} q\restriction_\beta \in \mathcal{C}' \ \wedge \ \mathcal{C}' \text{ 是 } M[G] \text{ 上的 } Q_\beta\text{- 泛型超滤子} \\ \wedge \, \exists q' \leqslant q^{\mathcal{C}'} \left(q' \Vdash_{j^*(Q_\beta)} \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{X}\right)\right) \end{array} \right).$$

在 $M[G \times K]$ 中, $(\mathfrak{P}(Q_\alpha))^{M[G]}$ 是可数的, 所以

$$\exists \delta < j(\kappa)\, \mathcal{C}' \in M\left[G, K \restriction_\delta\right].$$

在 $M[G \times K]$ 中找一个 $M[G]$ 的 Q_α-泛型超滤子 $\mathcal{C}''$ 来满足等式 $\mathcal{C}'' \restriction_\beta = \mathcal{C}'$, 并且 $q \in \mathcal{C}''$. 这样, $q' \cup q^{\mathcal{C}''} \leqslant q^{\mathcal{C}''}$ 并且 $q' \cup q^{\mathcal{C}''} \Vdash \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{X}\right)$. 这就意味着 $(p, q) \nVdash \dot{X} \in \mathcal{I}_\alpha$. 这是一个矛盾.

于是断言三得证.

现在设 H 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathbb{Q}_{\kappa^+}$-泛型超滤子. 对于 $\alpha < \kappa^+$, 令

$$C_\alpha = \bigcup \{ q(\alpha) \mid q \in H \},$$

那么 C_α 就是 κ 的一个无界闭子集. 令 $\mathcal{C} = \langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \rangle$. 在 $\mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 中, 令

$$\mathcal{I} = \bigcup \left\{ \mathcal{I}_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \right\}.$$

断言四　在 $\mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 中, $\mathcal{I}$ 是一个正规理想.

设 $f \in \mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 为一个 $\kappa \to \kappa$ 的函数. 假设

$$(p, q) \Vdash (\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \notin \mathcal{I} \wedge \forall \gamma < \kappa \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{I}).$$

根据断言二, 应用 κ^+-链条件, 令 $\alpha < \kappa^+$ 来见证 $f \in \mathrm{V}\left[G, \mathcal{C} \restriction_\alpha\right]$, 以及

$$(p, q) \Vdash (\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \notin \mathcal{I}_\alpha \wedge \forall \gamma < \kappa \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in \mathcal{I}_\alpha).$$

令 $G \times K$ 为 V 上的 $j(P)$-泛型超滤子, 并且 $p \in G$. 在 $M[G \times K]$ 中讨论. 令 $\mathcal{C}'$ 为 $M[G]$ 上的具备下述特点的 Q_α-泛型超滤子:

$$q \in \mathcal{C}' \wedge \exists q' < q^{\mathcal{C}'} \left(q' \Vdash (j^*(f)(\kappa) < \kappa)\right).$$

那么必有 $q'' < q'$ 来满足要求: $\exists \gamma < \kappa\ (q'' \Vdash j^*(f)(\kappa) = \gamma)$. 取一个这样的 $\gamma < \kappa$. 于是,

$$(p, q) \nVdash \{\beta < \kappa \mid f(\beta) = \gamma\} \in \mathcal{I}_\alpha.$$

这便是一个矛盾.

断言五　在 $\mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 中, $\mathcal{I}$ 是 $\omega_1 = \kappa$ 上的非荟萃集理想.

由断言四, 可知在 $\mathrm{V}[G, \mathcal{C}]$ 中, $\kappa = \omega_1$.

一方面, 每一个 C_α 是 ω_1 的一个无界闭子集; 如果 $A_\alpha \in \mathcal{I}$, 那么 $C_\alpha \cap A_\alpha = \varnothing$. 因此, $\mathcal{I}$ 中的每一个集合都是非荟萃集. 另一方面, 设 $\dot{C}$ 为 $\kappa = \omega_1$ 的一个无界闭子集的名字, 令 $q \in \mathcal{C}$ 满足

$$q \Vdash \dot{C}\ \text{是一个无界闭子集}.$$

那么对于任意的包括 q 在内的泛型滤子 $\mathcal{C}'$ 都有

$$q^{\mathcal{C}'} \Vdash j^*\left(\dot{C}\right) \text{是一闭集} \wedge j^*\left(\dot{C}\right) \cap \check{\kappa} \text{在} \check{\kappa} \text{中是无界的}.$$

因此, $q^{\mathcal{C}'} \Vdash \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{C}\right)$. 令 $\alpha < \kappa^+$ 满足 $\forall \beta < \kappa^+ \left(\beta \geqslant \alpha \rightarrow q(\beta) = \varnothing\right)$ 以及

$$\left(\dot{C}/G * \mathcal{C}\right) \in \mathrm{V}\left[G, \mathcal{C}\restriction_\alpha\right].$$

于是, $q \Vdash \left(\check{\kappa} - \dot{C}\right) \in \mathcal{I}_\alpha$. 这就表明 κ 的每一个非荟萃集都在 $\mathcal{I}$ 中.

断言六 在 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 中, $\mathcal{I}$ 是一个峭壁理想.

在 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 中, 令 $R(\mathcal{I})$ 为由 ω_1 上的荟萃子集所确定的力迫构思. 那么 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 上的 $R(\mathcal{I})$-泛型超滤子是一个包含了 ω_1 上的无界闭集滤子的 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$-超滤子.

设 $(p,q) \in P * Q_{\kappa+}$ 以及 $\dot{X}$ 为 κ 的一个子集合的名字, 并且 $(p,q) \Vdash \dot{X} \notin \mathcal{I}$. 我们希望找到泛型超滤子 $G \ni p$ 和 $\mathcal{C} \ni q$ 以及一个 $R(\mathcal{I})$-泛型超滤子 $D \ni \left(\dot{X}\right)/G*\mathcal{C}$ 来见证超幂 $\prod_D(\mathrm{V}[G,\mathcal{C}], \in)$ 是有秩的.

由于 $(p,q) \Vdash \dot{X} \notin \mathcal{I}$, 存在 $(p_1, \alpha) \in j(P) \times \kappa^+$ 来见证下述事实:

(a) $p_1 < p$, $p_1 \Vdash \dot{X} \in \mathrm{V}\left[G, \mathcal{C}\restriction_\alpha\right]$;

(b) $p_1 \Vdash_{j(P)} \exists \mathcal{C}' \begin{pmatrix} q \in \mathcal{C}' \wedge \mathcal{C}' \text{是} M[G] \text{上的} Q_\alpha\text{-泛型超滤子} \\ \wedge\, q^{\mathcal{C}'} \Vdash_{j^*(Q_\alpha)} \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{X}\right) \end{pmatrix}$.

令 $G \times K$ 为 V 上的满足要求 $p_1 \in G \times K$ 的 $j(P)$-泛型超滤子. 令 $\mathcal{C}' \in M[G \times K]$ 满足下述要求:

$$q \in \mathcal{C}' \wedge \mathcal{C}' \text{是} M[G] \text{上的} Q_\alpha\text{-泛型超滤子} \wedge\ q^{\mathcal{C}'} \Vdash_{j^*(Q_\alpha)} \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{X}\right).$$

从 $j^*\left(Q_\alpha\right)$ 中取出一个满足不等式要求 $q_1 \leqslant q^{\mathcal{C}'}$ 的 q_1 来实现 $q_1 \Vdash \check{\kappa} \in j^*\left(\dot{X}\right)$.

我们希望找到 $\mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{C}^*$ 来将 j^* 延拓到 $j^{**}: \mathrm{V}[G,\mathcal{C}] \prec M\left[G \times K, \mathcal{C}^*\right]$; 并且要求

$$\mathcal{C} = \left\{q \in Q_{\kappa^+} \mid j^*(q) \in \mathcal{C}^*\right\}.$$

令 $Q = Q_{\kappa^+}$. 对于 $q \in j(Q)$, 令

$$\mathcal{C}_q = \left\{q' \in Q \mid j^*\left(q'\right) \geqslant q\right\};$$

再令 Q^* 为在 $\mathrm{V}[G \times K]$ 中的 $j(Q)$ 的下述子偏序集:

$$Q^* = \left\{q \in j(Q) \mid \exists \alpha < \kappa^+ \left(\mathcal{C}_q \subset Q \wedge \mathcal{C}_q \text{是} \mathrm{V}[G] \text{上的} Q_\alpha\text{-泛型超滤子}\right)\right\}.$$

这样, 上面的条件 $q_1 \in Q^*$. 于是, 我们可以找到一个 $\mathrm{V}[G \times K]$ 上的 Q^*-泛型超滤子 $\mathcal{C}^* \ni q_1$. 令 $\mathcal{C} = \left\{q \in Q_{\kappa^+} \mid j^*(q) \in \mathcal{C}^*\right\}$.

断言六　(a) $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q-泛型滤子; $\mathcal{C}^*$ 是 $M[G\times K]$ 上的 $j(Q)$-泛型滤子.

对于 $\alpha<\kappa^+$, 令

$$B_\alpha=\left\{q\in Q^*\ \middle|\ \mathcal{C}_q\restriction_\alpha \text{ 是}\,\mathrm{V}[G]\,\text{上的}\,Q_\alpha\text{- 泛型超滤子}\right\}.$$

我们先来证明每一个 B_α 在 Q^* 中都是稠密的.

设 $a\in Q^*$. 如果 $a\notin B_\alpha$, 由 Q^* 的定义, 存在某个 $\beta<\alpha$ 满足下述要求:

$$\mathcal{C}_a\subset Q_\beta\wedge\mathcal{C}_a\,\text{是}\,\mathrm{V}[G]\,\text{上的}\,Q_\beta\text{- 泛型超滤子}.$$

由于 $\mathfrak{P}(Q_\alpha)\cap\mathrm{V}[G]$ 在 $M[G\times K]$ 中是可数的, 在 $V[G\times K]$ 中存在一个 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_α-泛型超滤子 $\mathcal{C}'$ 来满足 $\mathcal{C}'\restriction_\beta=\mathcal{C}_a$. 因为 $|Q_\alpha|=\kappa$, 此 $\mathcal{C}'\in M[G\times K]$. 令 $b=a\cup q^{\mathcal{C}'}$. 那么 $b\leqslant a$, 并且 $b\in Q^*\cap B_\alpha$.

再证 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q-泛型滤子. 令 A 是 Q 在 $\mathrm{V}[G]$ 中的一个极大冲突子集. 那么 A 在 $\mathrm{V}[G]$ 中的势不会超过 κ, 因此, 可令 $\alpha<\kappa^+$ 来实现 A 是 Q_α 的极大冲突子集 (准确地讲, A 中各元素的支撑集合都是 α 的子集合, 从而 $A\restriction_\alpha$ 是 Q_α 的极大冲突子集合). 由于 B_α 在 Q^* 中是稠密的, 令 $a\in\mathcal{C}^*$ 满足要求: $\mathcal{C}_a\restriction_\alpha$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q_α-泛型超滤子. 于是, $\mathcal{C}_a\cap A\neq\varnothing$, 从而 $\mathcal{C}\cap A\neq\varnothing$. 这就表明 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 上的 Q-泛型超滤子.

最后证 $\mathcal{C}^*$ 是 $M[G\times K]$ 上的 $j(Q)$-泛型滤子. 由于

$$j\left(\kappa^+\right)=\bigcup\left\{j(\alpha)\ \middle|\ \alpha<\kappa^+\right\},$$

以及 $j^*(Q)$ 在 $M[G\times K]$ 中满足 $j\left(\kappa^+\right)$-链条件, 类似地, 如果 $A\in M[G\times K]$ 是 $j(Q)$ 的一个极大冲突子集, 那么必有 $\alpha<\kappa^+$ 来见证 A 的元素的支撑子集都是 $j(\alpha)$ 的子集, 从而, $A\restriction_{j(\alpha)}$ 是 $j^*\left(Q_\alpha\right)$ 的极大冲突子集. 由于 B_α 在 Q^* 中是稠密的, $\mathcal{C}^*\restriction_{j(\alpha)}$ 是 $\mathrm{V}[G\times K]$ 上的 $j^*\left(Q_\alpha\right)$-泛型超滤子, 因此, $A\cap\mathcal{C}^*\neq\varnothing$. 于是, $\mathcal{C}^*$ 是 $M[G\times K]$ 上的 $j(Q)$-泛型滤子.

(a) 得证.

由于 $\forall a\in\mathcal{C}\ (j^*(a)\in\mathcal{C}^*)$, 在 $\mathrm{V}[G\times K,\mathcal{C}]$ 中, 就可以将 $j^*:\mathrm{V}[G]\prec M[G\times K]$ 延拓到 $j^{**}:\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]\prec M\left[G\times K,\mathcal{C}^*\right]$. 据此 j^{**}, 令

$$D=\left\{z\in\mathfrak{P}(\kappa)\cap\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]\ \mid\ \kappa\in j^{**}(z)\right\}.$$

此 D 是一个包含 $\mathcal{I}$ 的对偶滤子的 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$-超滤子; 由于 $(p_1,q_1)\in(G\times K)*\mathcal{C}^*$, $\left(\dot{X}\right)/G*\mathcal{C}\in D$; 然后, 如同定理 2.20 的证明中那样, 应用自然的交换图就可知 $\prod_D(\mathrm{V}[G,\mathcal{C}],\in)$ 是有秩的.

最后剩下的问题是: D 是否为 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 上的 $R(\mathcal{I})$-泛型超滤子. 这个问题由下述命题解答.

(b) D 是 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 上的 $R(\mathcal{I})$-泛型超滤子.

令 W 为在 $\mathrm{V}[G,\mathcal{C}]$ 中 $R(\mathcal{I})$ 的一个子集合, 并且 $W\cap D=\varnothing$. 我们来证明 W 在 $R(\mathcal{I})$ 中并非稠密.

由于 $W\cap D=\varnothing$, 令 $p_2\in G\times K$, $q_2\in\mathcal{C}^*$ 一起见证下述命题成立:

$$(p_2,q_2)\leqslant(p_1,q_1)\wedge p_2\Vdash_{j(P)}\left[q_2\Vdash_{Q^*}\forall A\in W\;(\check{\kappa}\notin j^{**}(A))\right].$$

因为 $(p_2,q_2)\in M=\mathrm{ult}(\mathrm{V},U)$, 令 $f:\kappa\to P*Q$ 来实现等式 $(p_2,q_2)=j(f)(\kappa)$. 在 $\mathrm{V}[G\times K,\mathcal{C}]$ 中, 令

$$T=\{\alpha<\kappa\mid f(\alpha)\in G*\mathcal{C}\}.$$

根据 (p_2,q_2) 的取法, $\kappa\in j^{**}(T)$. 于是, 对等的我们就有

$$\Vdash_{j(p)}\Vdash_{Q^*}\forall A\in W\;(\kappa\notin j^{**}(A\cap T)).$$

对于 $A\in W$, 令 $\alpha(A)$ 满足要求 $q_2\in j^*\left(Q_{\alpha(A)}\right)$ 以及 $A\in\mathrm{V}[G,\mathcal{C}\restriction_{\alpha(A)}$. 这样, 我们有

$$\Vdash_{j(P)}\forall\mathcal{C}'\left(\begin{array}{l}(\mathcal{C}'\text{ 是 }\mathrm{V}[G]\text{ 上的 }Q_{\alpha(A)}\text{- 泛型超滤子})\\ \to q^{\mathcal{C}'}\Vdash_{j^*(Q)}\check{\kappa}\notin j^{**}(A\cap T)\end{array}\right).$$

这事实上就是 $\forall A\in W\;(A\cap T\in\mathcal{I})$. 由于 $T\in D$, 所以 $T\notin\mathcal{I}$. 因此, W 在 $R(\mathcal{I})$ 中并非稠密子集.

(b) 得证. □

2.7.3 力迫 NS 饱和

半恰当力迫构思

用力迫构思来力迫非荟萃理想 NS 为饱和理想的最为自然的想法就是用迭代力迫构思来将每一个可能的饱和性反例消除. 这里涉及两个重要的技术问题: 第一, 怎样用力迫构思来消除一个反例? 也就是需要涉及一个具有什么性质的力迫构思来消除一个可能的反例? 第二, 怎样迭代才能保持已经被消除的反例不会再度被激活, 并且最终迭代过程会收敛? 我们将把精力集中在第一个问题的分析之上. 由于篇幅所限, 我们将对第二个问题的分析划在本《导引》的范围之外.

在本小节中, 固定记号 $\mathrm{NS}=\mathrm{NS}_{\omega_1}$ 以及 $\mathbb{B}=\mathfrak{P}(\omega_1)/\mathrm{NS}$.

定义 2.27 设 $W\subset\mathbb{B}$ 为一个极大冲突子集. 如下定义一个力迫构思 $\mathbb{P}_W$: P_W 是一些有序对的集合; $(f,c)\in P_W$ 当且仅当

(1) $\exists\alpha<\omega_1\,(f:\alpha\to W)$;

(2) $\varnothing \neq c \in \mathfrak{P}_{\omega_1}(\omega_1)$ 是一个闭子集;

(3) $\forall \beta \in c\,(\beta \in \mathrm{dom}(f) \to (\exists \eta < \beta\,(\beta \in f(\eta))))$.

对于 $(f_1, c_1) \in P_W$ 和 $(f_2, c_2) \in P_W$, 令

$$(f_2, c_2) \leqslant (f_1, c_1) \leftrightarrow (f_1 \subset f_2 \wedge c_1 = c_2 \cap (\max(c_1) + 1)).$$

可以指望这个力迫构思会对给定的极大冲突子集 W 添加一个长度为 ω_1 的列表, 并且保证 W 依旧是一个未来扩张模型中的新布尔代数 $\mathbb{B}^{\mathrm{V}[G]}$ 中的极大冲突子集. 如果能够继续保持这一点, 那么在最终的模型中, W 就不会是 NS 饱和性的反例. 这种想法是否可以成功实现? 一个非常关键的问题就是在力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 的泛型扩张中, ω_1 不能被可数化, 并且 W 中的所有的元素必须还是 ω_1 的荟萃理想. 否则, 这种力迫构思就没有所期望的用途.

有时候力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 具有很好的性质, 比如

例 2.5 如果 W 是一个彼此不相交的势为 $\aleph_1$ 荟萃子集的集合, 并且 $\omega_1 = \bigcup W$, 那么 $\mathbb{P}_W$ 是一个恰当力迫构思. 事实上, 对于任意的极大冲突的荟萃集之集合 W, $\mathbb{P}_W$ 是一个恰当力迫构思当且仅当存在一个 W 中的元素的序列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$, 以及存在一个 ω_1 的无界闭子集 C 一起来见证下述事实:

$$\forall \alpha \in C\, \exists \beta < \alpha\ (\alpha \in A_\beta).$$

证明 (练习.) □

自然, 这样的例子并不具备特别的意义, 因为当荟萃集合的一个极大冲突集合的势是 $\aleph_1$ 时, 它并不是 NS 饱和性的反例, 而我们关注的是如何消除反例. 况且力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 实际上就是当 W 的势大于 ω_1 时给 W 添加一个长度为 ω_1 的序列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$, 以及同时为 ω_1 添加一个具有下述特性的无界闭集 C:

$$\forall \alpha \in C\, \exists \beta < \alpha\ (\alpha \in A_\beta).$$

所以我们的最低期望是在这种情形下力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 保持 ω_1 的所有荟萃子集的荟萃特性.

定义 2.28 称一个力迫构思 $\mathbb{P}$ **保持** ω_1 **的荟萃集**当且仅当 ω_1 的每一个荟萃子集在 V 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张中依旧是一个荟萃集, 当且仅当如果 S 是 ω_1 的一个荟萃子集, $\dot{C}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名字, $p \in P$ 是一个条件, 并且 $p \Vdash \dot{C}$ 是 ω_1 的一个无界闭集, 那么 $\exists q \leqslant p\left(q \Vdash \dot{C} \cap \check{S} \neq \varnothing\right)$.

例 II.3.13 所定义的力迫构思 $\mathbb{P}_S$ 就不是一个保持 ω_1 的荟萃集的力迫构思, 因为它让 S 的补集失去荟萃性. 自然, 上面的例 2.27 具有承前启后的作用.

事实 2.7.1 设 W 是 $\mathbb{B}$ 上的一个极大冲突子集. 那么力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 保持 ω_1 上的荟萃子集.

证明 (练习.) □

如果仅仅只关注保持 ω_1 上的荟萃集的荟萃性, 那么在迭代过程中远远不够, 因为这个偏序集类对于常用的迭代构造过程并不封闭. 这自然就促使人们将审视的眼光转向半力迫构思.

下面的半恰当力迫构思概念可以与前面的恰当力迫构思概念 (见定义 2.20 和定理 2.13) 形成对比.

首先我们需要半泛型条件这个技术性词汇. 这是前面的泛型条件 (见定义 2.21) 的弱化.

定义 2.29 设 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 为一个力迫构思. 令 $\lambda>2^{|P|}$ 为一个正则基数. 设 $M\prec(\mathscr{H}_\lambda,\in,\triangle,\cdots)$ 可数, 其中 $\triangle$ 是 $\mathscr{H}_\lambda$ 的一个秩序, 并且 $\mathbb{P}\in M$ (需要时所有涉及的参数都在 M 之中). 称条件 q 为一个 $(M,\mathbb{P})$-**半泛型条件**[18]当且仅当如果 $\dot{\alpha}\in M$ 是序数的一个 $\mathbb{P}$-名字, 并且 $\mathbf{1}\Vdash|\dot{\alpha}|\leqslant\check{\omega}$, 那么

$$\forall r\leqslant q\,\exists s\leqslant r\,\exists\beta\in M\cap\omega_1\,s\Vdash\left(\dot{\alpha}=\check{\beta}\right).$$

正如定理 2.13 所指出的恰当力迫构思的特征那样, 我们应用半泛型条件如下定义半恰当力迫构思:

定义 2.30 一个力迫构思 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$ 是一个**半恰当力迫构思**的充分必要条件是对于任意足够大 ($>2^{|P|}$) 的正则基数 λ 都有由所有满足要求

$$|M|=\omega\wedge\forall p\in M\cap P\,\exists q\leqslant p\,(q\text{ 是一个 }(M,\mathbb{P})\text{-半泛型条件})$$

的那些 $M\prec(\mathscr{H}_\lambda,\in,\triangle,\cdots)$ 所组成的集合 C_λ 包含 $[\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 的一个无界闭子集.

定理 2.22 如果 $\mathbb{P}$ 是一个半恰当力迫构思, 那么 $\mathbb{P}$ 保持 ω_1 的荟萃集; 如果 $\mathbb{P}$ 保持 ω_1 的荟萃集, 并且满足 ω-分配律, 那么 $\mathbb{P}$ 是一个半恰当力迫构思.

应用半恰当力迫构思概念, 谢旯设计了一种**回访可数支撑迭代**[19] 半恰当力迫构思的构造过程, 并且证明了这一过程的收敛性, 即这样迭代的极限力迫构思依旧是半恰当的. 基于谢旯的这一工具, M. Foreman, M. Magidor 和 S. Shelah 三人合作证明了如下定理:

定理 2.23 (Foreman-Magidor-Shelah) 如果 κ 是一个超紧基数, 那么存在一个半恰当力迫构思 $\mathbb{P}$ 来实现下述目标: 令 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 下述事实成立:

(1) 一个力迫构思是半恰当的充分必要条件是它保持 ω_1 的荟萃集的荟萃特性;

18 $(M,\mathbb{P})$-semigeneric.

19 Revised countable support iteration.

(2) 如果 $\mathbb{P}$ 是一个保持 ω_1 的荟萃集的荟萃特性的力迫构思,

$$\{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$$

是 $\mathbb{P}$ 的稠密子集的势为 $\aleph_1$ 的集合, 那么一定存在一个与它们都有非空交的滤子 $F \subset P$.

定理中的第二个结论被命名为**马丁极大原理**(MM[20]):

定义 2.31 (马丁极大原理)　如果 $\mathbb{P}$ 是一个保持 ω_1 的荟萃集的荟萃特性的力迫构思,

$$\{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$$

是 $\mathbb{P}$ 的稠密子集的势为 $\aleph_1$ 的集合, 那么一定存在一个与它们都有非空交的滤子 $F \subset P$.

定理 2.24 (Foreman-Magidor-Shelah)　假设马丁极大原理成立. 那么

(1) ω_1 上的非荟萃理想是饱和的;

(2) 奇异基数假设成立.

我们将在后面的小节中给出这个定理的证明. 在这里我们希望读者注意这样一个事实: 与 ω_1 上的非荟萃集理想有可能饱和这一现象形成鲜明对比的是 ω_2 上的非荟萃子集理想一定是不可能饱和的. 这由下面的 Gitik-Shelah 定理所明确. 这个定理的证明超出了本《导引》的范围, 故在此省略. 有兴趣的读者可阅读原文[21].

定理 2.25 (Gitik-Shelah)　如果 $\kappa \geqslant \omega_2$ 是一个正则基数, 那么 κ 上的非荟萃子集理想不可能是 κ^+-饱和的, 也就是说, 一定存在一个长度为 κ^+ 的模非荟萃子集理想彼此几乎不相交的 κ 的荟萃子集序列.

现在我们回过头来继续我们刚才展开的分析. 例 2.5 提示我们需要关注荟萃子集的极大冲突子集 W 所具有的特性, 因为它的组合结构直接关联着 $\mathbb{P}_W$ 的组合性质. 为此, 引进下述技术名词:

定义 2.32　设 W 是 $\mathbb{B}$ 上的一个极大冲突子集. 称 W 是一个半恰当极大冲突子集当且仅当对于任意传递模型 M, 如果 $M^{\mathfrak{P}(\mathscr{H}_{\omega_2})} \subset M$, $X \prec M$ 是可数的, 并且 $W \in X$, 那么一定存在一个具备如下特点的可数的 $Y \prec M$:

(a) $X \subset Y$;

(b) $X \cap \omega_1 = Y \cap \omega_1$;

(c) $\exists S \in W \cap Y\, (Y \cap \omega_1 \in S)$.

引进这样一个名词的理由由下述定理阐明:

---

20 Martin's Maximum.

21 M. Gitik and S. Shelah, Less saturated ideals. Proc. Amer. Math. Soc., 125(1997), no. 5, 1523-1530.

定理 2.26 设 $W \subset \mathbb{B}$ 是一个极大冲突子集. 那么下述命题对等:

(1) $\mathbb{P}_W$ 是半恰当力迫构思;

(2) W 是半恰当极大冲突子集.

是否 $\mathbb{B}$ 的每一个极大冲突子集都会自动具备半恰当特性?

定理 2.27 如果 $\mathbb{B}$ 的每一个极大冲突子集都是半恰当的, 那么 NS 就是一个峭壁理想.

由此可见, 并非 $\mathbb{B}$ 的每一个极大冲突子集都会自动具备半恰当性. 那么是否有可能实现 $\mathbb{B}$ 的每一个极大冲突子集都具备半恰当性呢?

我们需要将本章 2.2 小节中的以有限条件化不可达基数为第一个不可数基数的莱维力迫构思 (定义 2.1) 改变成以可数条件将不可达基数化为第二个不可数基数的莱维力迫构思.

定义 2.33 设 κ 是一个不可达基数. 对于 $p \subset \kappa \times \omega_1 \times \kappa$, 令

$$
\begin{aligned}
&p \in \mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa) \leftrightarrow \\
&|p| < \omega_1 \wedge \mathrm{dom}(p) \subset \kappa \times \omega_1 \wedge \mathrm{rng}(p) \subset \kappa \wedge (\forall (\alpha, \gamma) \in \mathrm{dom}(p)\, (p(\alpha, \gamma) \in \alpha)).
\end{aligned}
$$

对于 $p, q \in \mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$, 令 $p \leqslant q \iff p \supseteq q$; 令 $\mathbf{1} = \varnothing$.

事实 2.7.2 (Lévy) 设 κ 是一个不可达基数. 那么 $\mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$ 是 $<\omega_1$-完备的 (任何可数单调递降序列必有下界), 并且满足 κ-链条件 (任何极大冲突子集的势都小于 κ).

证明 (练习.) □

称 NS 是**预饱和**的当且仅当对于任意一个 ω_1 上的荟萃子集 S, 对于任意可数个 NS^+ 中的极大冲突子集 $\{W_i \mid i < \omega\}$, 必然存在 A 的一个具备下述特点的荟萃子集 B:

$$
\forall i < \omega\ (|\{X \in W_i \mid X \cap B \notin \mathrm{NS}\}| \leqslant \aleph_1)\,.
$$

事实 2.7.3 (Baumgartner) 如果 NS 是预饱和的, 那么 NS 是一个峭壁理想, 并且如果 G 是 V 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子, 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 由 G 诱导出来的泛型超幂同质嵌入映射

$$
i_G : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)
$$

具备下述特点:

(i) $\mathrm{Crit}\,(i_G) = \omega_1$.

(ii) $i_G\,(\omega_1) = \omega_2$.

(iii) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subset \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$; 事实上 $\mathrm{ult}(V, G)$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中关于可数序列封闭: $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)^{\omega} \subset \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$.

证明 (练习.) □

定理 2.28 (Foreman-Magidor-Shelah)　设 κ 是一个超紧基数. 设 G 是莱维迫构思 $\mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$ 在 V 上的泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 下述事实成立:

(1) $\mathbb{B}$ 的每一个极大冲突子集都是半恰当的;

(2) 非荟萃集理想 NS 是**预饱和**的.

也正是受到这个定理的激励, 一场朝着不断弱化大基数假设的竞赛在谢旯和武丁之间展开, 谢旯基数和武丁基数被相继被引进集合论, 并且最终武丁基数显示出对实数子集合的正则性影响的恰到好处的风姿.

下面我们先看看从超紧基数到超强基数的迈进.

定理 2.29 (Woodin)　如果 κ 是一个超强基数, 那么存在一个满足 ω-分配律和 κ-链条件的力迫构思 $\mathbb{P}$ 来实现下述目标: 在 V 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, κ 是 ω_2, 并且在 ω_1 上存在一个 σ-完全的非平凡的 ω_2-饱和的正规理想.

紧接着, 谢旯将超强基数假设替换成了谢旯基数.

随后武丁将谢旯基数替换成了武丁基数, 并将 Foreman-Magidor-Shelah 定理改进成下述形态:

定理 2.30 (Woodin)　设 κ 是一个武丁基数. 设 G 是莱维力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$ 在 V 上的泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 下述事实成立:

(1) 如果 $\langle W_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ 是 $\mathbb{B}$ 上的准稠密子集的一个序列, 那么一定存在 V 中的一个不可达基数 $\lambda < \kappa$ 来见证下述事实:

　(a) $\langle W_\xi \mid \xi < \lambda\rangle \in \mathrm{V}[G\restriction_\lambda]$;

　(b) 在 $\mathrm{V}[G\restriction_\lambda]$ 中, 后述命题成立: 对于每一个 $\xi < \lambda$, W_ξ 是 $\mathbb{B}$ 上的半恰当准稠密子集.

(2) NS 是预饱和的.

证明　(略.)　□

最后, 谢旯和武丁以下述合作证明的定理结束为期一周的竞赛: 一切都定格在武丁基数之上. 这个定理将在第 3 章中用到 (谢旯-武丁定理 (定理 3.27)). 那里的定理会表明追求弱化大基数假设并以不添加任何实数的方式得到第一个不可数基数上的饱和理想的基本动机所在.

定理 2.31 (Shelah-Woodin)　设 κ 是一个武丁基数. 设 G 为 V 上的莱维力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$-泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中, ω_1 上存在一个 σ-完全的非平凡的正规的饱和理想 $\mathcal{I}$ 以至于 $\mathcal{I} \cap \mathrm{V} = (\mathrm{NS})^{\mathrm{V}}$.

证明 (概要)　设 κ 为一个武丁基数. 令 G 为 V 上的莱维力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega_1, <\kappa)$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 对于 $A \subset \omega_1$, 令 $A \in I_0$ 当且仅当存在一个具备下述特点的函数 $f : \omega_1 \to \mathrm{NS}^+$:

(1) $A = \{\beta < \omega_1 \mid \forall \alpha < \beta\, (\beta \notin f(\alpha))\}$;

(2) $\exists \gamma < \kappa \left(\begin{array}{l} \gamma \text{在} \mathrm{V} \text{中为不可达基数} \wedge \operatorname{rng}(f) \in \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right] \\ \wedge \operatorname{rng}(f) \text{在} \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right] \text{中是半恰当的} \end{array} \right)$.

令 I 为由 I_0 所生成的正规理想.

断言一 I 是一个真理想.

回到 V 中讨论. 令 $M = \mathscr{H}_{\kappa^+}$. 那么 $M^{\mathrm{V}_\kappa} \subset M$. 应用可数同质子模型单增链构造可以得到一个可数的 $X \prec M$ 和一个条件 $p \in \operatorname{Col}(\omega_1, <\kappa)$ 来一起实现下述目标:

(a) 集合 $\{q \in X \cap \operatorname{Col}(\omega_1, <\kappa) \mid p < q\}$ 是 X-泛型滤子;

(b) 如果 $\gamma \in X \cap \kappa$ 是不可达基数, $\tau \in \mathrm{V}^{\operatorname{Col}(\omega_1, <\gamma)} \cap X$ 是一个关于 NS^+ 的半恰当准稠密子集的名字, 那么 X 中必有一个关于 ω_1 的满足下述要求的子集合的名字 σ:

$$p \Vdash \sigma \in \tau \wedge p \Vdash \check{\alpha} \in \sigma,$$

其中 $\alpha = X \cap \omega_1$.

现在设 $G \ni p$ 为 V 上的 $\operatorname{Col}(\omega_1, <\kappa)$-泛型超滤子.

在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 由于集合 $\{q \in X \cap \operatorname{Col}(\omega_1, <\kappa) \mid p < q\}$ 是 X-泛型滤子, 必存在一个可数的 $Y \prec M[G]$ 以至于 $X = Y \cap M$. 根据 (b),

$$\forall A \in Y \cap I_0 \ (Y \cap \omega_1 \notin A).$$

这就意味着由 I_0 所生成的正规理想是真理想.

断言二 I 是一个饱和理想.

设 $W_0 \subset I^+$ 为一个极大冲突子集. 令 $W = W_0 \cup (I - \mathrm{NS})$. 那么 $W \subset \mathrm{NS}^+$ 是一个准稠密子集. 根据定理 2.30, 令 $\gamma < \kappa$ 为 V 中的一个不可达基数, 并且

$W \cap \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right] \in \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right] \wedge$
$W \cap \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right]$ 在 $\mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right]$ 中是半恰当准稠密子集.

令 $f : \omega_1 \to W \cap \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right]$ 为 $\mathrm{V}[G]$ 中的一个满射. 这样下述集合 $A \in I$:

$$A = \{\beta < \omega_1 \mid \forall \alpha < \beta \, (\beta \notin f(\alpha))\}.$$

因为 I 是一个正规理想, 所以 $W_0 \subset W \cap \mathrm{V}\left[G \cap \operatorname{Col}\left(\omega_1, <\gamma\right)\right]$. 于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $|W_0| = \aleph_1$.

至于结论 $I \cap \mathrm{V} = (\mathrm{NS})^{\mathrm{V}}$, 只需注意在选择 (X, p) 时可以对于任意给定的 p_0, 要求 $p < p_0$ 以及对于任意给定的荟萃集 $S \subset \omega_1$, 可以要求 $S \in X$ 并且 $X \cap \omega_1 \in S$. □

2.7.4　投影荟萃集光影原理

现在我们来证明定理 2.24. 这里给出的证明不是 Foreman-Magidor-Shelah 原始的证明, 而是取自冯与耶赫合作的文章[22].

设 κ 是一个不可数的正则基数. 称 $\mathscr{H}_\kappa$ 的可数同质子模型的一个长度为序数 $\gamma \leqslant \omega_1$ 的序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是单调递增连续的 $\in$-序列当且仅当

$$\forall \alpha < \beta < \gamma \, (N_\alpha \in N_\beta) \, ,$$

并且对每一个极限序数 $\alpha < \gamma$ 都有 $N_\alpha = \bigcup \{ N_\beta \mid \beta < \alpha\}$. 称 $\mathscr{H}_\kappa$ 的可数同质子模型的一个长度为序数 $\gamma < \omega_1$ 的序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是强单调递增连续的 $\in$-序列当且仅当 $\forall \alpha < \beta < \gamma \, (N_\alpha \in N_\beta)$, 并且对每一个极限序数 $\alpha < \gamma$ 都有

$$N_\alpha = \bigcup \{ N_\beta \mid \beta < \alpha\} \, ,$$

并且对于 $\alpha + 1 < \gamma$, 总有 $\langle N_\beta \mid \beta < \alpha\rangle \in N_{\alpha+1}$. 称 $\mathscr{H}_\kappa$ 的可数同质子模型的一个长度为可数序数 γ 的序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \gamma\rangle$ 是单调递增连续的 $\subset$-序列当且仅当 $\forall \alpha < \beta < \gamma \, (\alpha \subset N_\alpha \subset N_\beta)$, 并且对每一个极限序数 $\alpha < \gamma$ 都有 $N_\alpha = \bigcup \{ N_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

定义 2.34　设 $\kappa \geqslant \omega_2$ 是一个正则基数. 称 $S \subset [\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 为一个**投影荟萃集**当且仅当对于 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的任何一个无界闭集 C 来说, 集合

$$(S \cap C) \downarrow \omega_1 = \{ X \cap \omega_1 \mid X \in S \cap C\}$$

一定包含一个 ω_1 的无界闭集. 对等的说法是, S 是一个投影荟萃集当且仅当对 ω_1 上的任何一个荟萃子集 T 都必有下述集合

$$S_T = \{X \in S \mid X \cap \omega_1 \in T\}$$

是 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的一个荟萃子集.

自然, $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的每一个无界闭子集都是一个投影荟萃集; 反之则未必; 每一个投影荟萃集必定是一个荟萃集; 反之也未必.

例 2.6　设 W 是 ω_1 上的模非荟萃集理想的一个荟萃集极大冲突集合.

令 $\kappa > |\mathfrak{P}(\mathscr{H}_{\omega_2})|$ 为一个正则基数. 令

$$S(W) = \{ N \in [\mathscr{H}_\kappa]^\omega \mid N \prec \mathscr{H}_\kappa \wedge W \in N \wedge \exists A \in W \cap N \, (N \cap \omega_1 \in A)\} \, .$$

那么 $S(W)$ 是一个投影荟萃集合.

---

22 Q. Feng and T. Jech, Projective stationary sets and a strong reflection principle. Journal of London Math. Soc., 1998, 58(2): 271-283.

证明 设 $T\subset\omega_1$ 为一个荟萃集. 令 $A\in W$ 满足 $A\cap T$ 是荟萃集. 设 $C\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 是一个无界闭集. 由于

$$B_{A\cap T}=\{X\in[\mathscr{H}_\kappa]^\omega\mid X\cap\omega_1\in A\cap T\}$$

在 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 上是荟萃集, 集合

$$D=\{X\in C\mid X\prec\mathscr{H}_\kappa\wedge\{A,T,W\}\subset X\}$$

也是 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 上的一个无界闭集. 令 $N\in D\cap B_{A\cap T}$. 那么此 $N\in C\cap S(W)_T$. □

注意, 如果 $|W|>\aleph_1$, 那么 $S(W)$ 就不包含一个无界闭集.

事实上, 如果 $C\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 是一个无界闭集, 那么 $D=\{N\in C\mid N\prec\mathscr{H}_\kappa\}$ 也是 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的一个无界闭集. 从任何一个 $N_0\in D$ 出发, 应用简单的递归定义都可以得到 D 中的一个长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列 $\langle N_\alpha\mid\alpha<\omega_1\rangle$. 但是对于投影荟萃集而言, 这往往都是一个问题, 或者说也许有可能, 也许没有可能. 对于这样的问题的探讨, 我们自然可以考虑下述原理: 投影荟萃集光影原理.

定义 2.35 (冯-Jech) **投影荟萃集光影原理**(PSRP[23]) 是下述命题: 对于每一个大于等于 ω_2 的正则基数 κ 而言, 如果 $S\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 是一个投影荟萃集, 那么一定存在长度为 ω_1 的单调递增连续 $\in$-序列 $\langle N_\alpha\mid\alpha<\omega_1\rangle$ 来满足如下两项要求:

(a) $\forall\alpha<\omega_1\ (N_\alpha\prec\mathscr{H}_\kappa)$;

(b) $\forall\alpha<\omega_1\ (N_\alpha\in S)$.

这个光影原理有它的合理性, 也有它的用处. 下面我们就来探讨这两个问题的答案.

我们需要一个技术性引理. 这个引理是说尽管从一个投影荟萃集中取得一个长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列并非在 ZFC 中一定可以做到, 但是如果只取到任意长的可数的这样的序列则在 ZFC 中是可行的.

引理 2.31 (1) 如果 $S\subset\omega_1$ 是一个荟萃集, $\alpha,\gamma<\omega_1$, 那么 $S-\gamma$ 一定包含一个序型为 $\alpha+1$ 的闭子集 x.

(2) 设 $\kappa\geqslant\omega_2$ 为一个正则基数. 如果 $S\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 是一个荟萃集, $\alpha<\omega_1$, 那么一定可以从 S 中取到一个长度为 $\alpha+1$ 的强单调递增连续的 $\in$-序列

$$\langle N_\beta\in S\mid\beta\leqslant\alpha\rangle.$$

证明 (1) 是众所周知的事实. 列出来是为了满足 (2) 的证明所需.

(2) 固定荟萃子集 $S\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 和可数序数 α. 我们将在由一个 σ-完备的力迫构思的泛型扩张中对 S 和 α 验证引理的结论. 这就足以证明引理.

23 Projective Stationary Reflection Principle.

称一个长度为 $\theta+1<\omega_1$ 的序列 p 为一个条件当且仅当

$$\forall\beta\leqslant\theta\ (p(\beta)\prec\mathscr{H}_\kappa\ \wedge\ |p(\beta)|=\aleph_0)\,,$$

并且 p 是一个强单调递增连续的 $\in$-序列.

称条件 p 比条件 q 强, $p\leqslant q$, 当且仅当 $q=p\restriction_{\mathrm{dom}(q)}$.

这个力迫构思是一个 σ-完备的力迫构思: 设 $\langle p_n\mid n<\omega\rangle$ 为一个单调下降的条件序列. 令 θ_n 为 $\mathrm{dom}\,(p_n)$ 中最大的序数. 令 $\theta=\bigcup\{\theta_n\mid n<\omega\}$. 令

$$N=\bigcup\{p_n\,(\theta_n)\mid n<\omega\}\,.$$

那么 $N\prec\mathscr{H}_\kappa$ 是一个可数同质子模型. 对于 $\beta<\theta$, 令 n 为满足不等式 $\beta\leqslant\theta_n$ 中最小的自然数, 再令 $q(\beta)=p_n(\beta)$; 最后令 $q(\theta)=N$. 那么 q 就是所有 p_n 的公共下界.

令 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 $f=\bigcup G$. 那么 f 是一个长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列, 并且 f 是 $([\mathscr{H}_\kappa]^\omega)^{\mathrm{V}}$ 的一个无界闭集的单一列表. 由于 S 依旧是 $([\mathscr{H}_\kappa]^\omega)^{\mathrm{V}}$ 的一个荟萃集, 下列集合 T 就是 ω_1 的一个荟萃子集:

$$T=\{\beta<\omega_1\mid f(\beta)\in S\}\,.$$

根据 (1), 令 $x\subset T$ 为一个序型为 $\alpha+1$ 的闭子集. 令 $x=\{\gamma_\beta\mid\beta\leqslant\alpha\}$ 为 x 的典型列表. 对于 $\beta\leqslant\alpha$, 令 $N_\beta=f\,(\gamma_\beta)$. 那么序列 $\langle N_\beta\mid\beta\leqslant\alpha\rangle\in\mathrm{V}$ 就是所寻找的. □

定理 2.32 (冯-Jech) *假设马丁极大原理 (MM) 成立. 那么投影荟萃集光影原理也成立.*

证明 设 $S\subset[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 为投影荟萃集. 我们来逼近 S 中的与 ω_1 同构的序列. 令

$$P=\big\{p=\langle N_\beta\in S\mid\beta\leqslant\alpha\rangle\mid\alpha<\omega_1\wedge p\text{是一个单调递增连续的 }\in\text{- 序列}\big\}\,.$$

对于 $p,q\in P$, 令 $p\leqslant q\leftrightarrow q=p\restriction_{\mathrm{dom}(q)}$. 令 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$.

对于 $\alpha<\omega_1$, 令 $D_\alpha=\{p\in P\mid\alpha\in\mathrm{dom}(p)\}$; 对于 $x\in\mathscr{H}_\kappa$, 令

$$E_x=\{p\in P\mid\exists\alpha\in\mathrm{dom}(p)\,(x\in p(\alpha))\}\,.$$

断言一 每一个 D_α 和 E_x 都是 $\mathbb{P}$ 中的稠密子集.

令 $\alpha<\omega_1$ 以及 $x\in\mathscr{H}_\kappa$. 令 $p=\langle N_\beta\in S\mid\beta\leqslant\eta\rangle\in P$. 令

$$S_1=\{N\in S\mid\{p,x\}\subset N\prec\mathscr{H}_\kappa\}\,.$$

那么 S_1 是 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的荟萃子集. 根据引理 2.31, 令 $\langle M_\xi\mid\xi\leqslant\alpha\rangle$ 为来自 S_1 的一个强单调递增连续的 $\in$-序列. 这样 $p\in M_0$. 对于 $\beta\leqslant\eta+\alpha$, 定义

$$q(\beta)=\begin{cases}p(\beta) & \text{当 }\beta\leqslant\eta,\\ M_\xi & \text{当 }\eta<\beta=\eta+\xi\leqslant\eta+\alpha.\end{cases}$$

这样 $q \leqslant p$ 并且 $q \in D_\alpha \cap E_x$.

断言二 $\mathbb{P}$ 保持 ω_1 的荟萃子集的荟萃特性.

设 $T \subset \omega_1$ 为一个荟萃子集. 设 $\dot{C}$ 为 ω_1 的一个无界闭子集的名字. 我们来验证 $\mathbf{1} \Vdash \check{T} \cap \dot{C} \neq \varnothing$.

令 $p \in P$. 令 $S_T = \{N \in S \mid N \prec \mathscr{H}_\kappa \wedge N \cap \omega_1 \in T\}$. 那么 S_T 是 $[\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 的荟萃子集.

令 $\lambda > (|\mathfrak{P}(\mathscr{H}_\kappa)|)^+$. 考虑模型

$$\mathscr{H} = \left(\mathscr{H}_\lambda, \in, \Delta, \mathbb{P}, \left\{\dot{C}\right\}, S, S_T, \cdots\right),$$

其中 Δ 是 $\mathscr{H}_\lambda$ 上的一个秩序.

令 $N \prec \mathscr{H}$ 为一个具备下述特点的可数同质子模型:

$$N \cap \mathscr{H}_\kappa \in S_T \wedge \left\{\dot{C}, S, T, S_T, p\right\} \subset N.$$

令 $\delta = N \cap \omega_1$. 令 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 为在 N 中所有 $\mathbb{P}$ 的稠密子集的列表. 令 $p_0 = p$. 递归地, 令 $p_{n+1} \in D_n \cap N$ 满足不等式 $p_{n+1} \leqslant p_n$. 令 θ_n 为 $\mathrm{dom}\,(p_n)$ 中最大的序数. 由同质性以及由断言一所提供的稠密性分析, 我们有

$$\delta = \bigcup \{\theta_n \mid n < \omega\} \wedge N \cap \mathscr{H}_\kappa = \bigcup \{p_n\,(\theta_n) \mid n < \omega\}.$$

因此, $q = \{(\delta, N \cap \mathscr{H}_\kappa)\} \cup \bigcup \{p_n \mid n < \omega\}$ 是一个条件, 并且强于每一个 p_n.

由于 $\dot{C} \in N$, 对于每一个 $\beta < \delta$, 可有一个名字 $\dot{\gamma} \in N$ 来满足

$$\mathbf{1} \Vdash \dot{\gamma} \in \dot{C} \wedge \check{\beta} < \dot{\gamma};$$

每一个这样的名字对应着在 N 中的一个稠密子集; 所以, $q \Vdash \dot{\gamma} \in \check{\delta}$. 因此,

$$q \Vdash \dot{C} \cap \check{\delta} \text{ 在 } \check{\delta} \text{ 中是无界的.}$$

于是, $q \Vdash \check{\delta} \in \dot{C}$. 这就表明 $q \Vdash \dot{C} \cap \check{T} \neq \varnothing$.

断言二得证.

根据马丁极大原理, 应用到此 $\mathbb{P}$ 以及 $\{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 上, 令 $G \subset P$ 为一个与所有这些稠密子集 D_α 都相交的滤子. 令

$$\langle N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle = \bigcup G.$$

这个序列就是我们寻找的. □

现在我们应用投影荟萃集光影原理来证明 Foreman-Magidor-Shelah 定理 (定理 2.24).

定理 2.33 (冯-Jech)　假设投影荟萃集光影原理成立. 那么

(1) ω_1 上的非荟萃集理想是饱和的;

(2) 如果 $E \subset \{\alpha < \omega_2 \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ 是 ω_2 上的荟萃集, 那么 E 包含一个与 ω_1 同构的闭子集;

(3) 如果 $\kappa \geqslant \omega_2$ 是正则基数, 那么 $\kappa^{\aleph_1} = \kappa$, 从而奇异基数假设成立;

(4) 荟萃集光影原理 (RP[24]) 成立: 如果 $\kappa \geqslant \omega_2$ 为正则基数, $S \subset [\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 是一个荟萃子集, 那么存在一个 $\omega_1 \subset M \prec \mathscr{H}_\kappa$ 来实现下述目标: $|M| = \aleph_1$, $S \cap [M]^\omega$ 在 $[M]^\omega$ 上是荟萃集.

证明　(1) 设 W 是 ω_1 上的模非荟萃集理想的一个荟萃集极大冲突集合.

令 $\kappa > |\mathfrak{P}(\mathscr{H}_{\omega_2})|$ 为一个正则基数. 令

$$S(W) = \{N \in [\mathscr{H}_\kappa]^\omega \mid N \prec \mathscr{H}_\kappa \wedge W \in N \wedge \exists A \in W \cap N\ (N \cap \omega_1 \in A)\}.$$

那么根据例 2.6, $S(W)$ 是一个投影荟萃集合. 依据投影荟萃集光影原理, 令

$$\langle N_\alpha \in S(W) \mid \alpha < \omega_1\rangle$$

为一个来自 $S(W)$ 的单调递增连续的 $\in$-序列. 注意, 对于每一个极限序数 $\alpha < \omega_1$, 必有 $\alpha \subset N_\alpha$. 令

$$C = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = N_\alpha \cap \omega_1\}.$$

那么 C 是 ω_1 的一个无界闭子集.

我们来验证: $W \subset X = \bigcup\{N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$.

设 $A \in W$. 假设 $A \notin X$. 令 $Y = \mathcal{SH}^{\mathscr{H}_\kappa}(X \cup \{A\})$ 为集合 $X \cup \{A\}$ 在模型 $(\mathscr{H}_k, \in)$ 中的斯科伦闭包. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $M_\alpha = \mathcal{SH}^{\mathscr{H}_\kappa}(N_\alpha \cup \{A\})$ 为集合 $N_\alpha \cup \{A\}$ 在模型 $(\mathscr{H}_k, \in)$ 中的斯科伦闭包. 令

$$D = \{\alpha \in C \mid \alpha = M_\alpha \cap \omega_1\}.$$

那么 $D \subset C$ 也是 ω_1 的一个无界闭子集. 令 $\alpha \in D \cap A$. 那么

$$\alpha = N_\alpha \cap \omega_1 = M_\alpha \cap \omega_1.$$

令 $B \in W \cap N_\alpha$ 满足 $\alpha \in B$. 因为 $B \neq A$, 它们又都在 W 中, 所以 $A \cap B$ 一定是非荟萃集. 根据同质性, 必有 $E \in M_\alpha$ 为 ω_1 的一个无界闭子集来实现 $E \cap A \cap B = \varnothing$. 可是, $A, B \in M_\alpha$, $M_\alpha \cap \omega_1 = \alpha \in A \cap B$, 以及 $\alpha \in E$. 这就是一个矛盾. 从而, $W \subset X$.

24 Reflection Principle.

于是, $|W| \leqslant |X| = \aleph_1$.

(2) 设 $\kappa \geqslant \omega_2$. $E \subset \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ 是 κ 上的荟萃集. 令

$$S = \{N \in [\mathscr{H}_{\kappa^+}]^\omega \mid N \prec \mathscr{H}_{\kappa^+} \wedge E \in N \wedge \sup(N \cap \kappa) \in E\}.$$

断言 S 是一个投影荟萃集.

设 $T \subset \omega_1$ 为一个荟萃子集. 令 $f : \mathscr{H}_{\kappa^+}^{<\omega} \to \mathscr{H}_{\kappa^+}$. 令 $M \prec \mathscr{H}_{\kappa^+}$ 为一个对 f 封闭, 势为 $\aleph_1$, $\sup(M \cap \kappa) \in E$, 并且包含 ω_1 的同质子模型. 再令 $N \prec M$ 具备下列特点: 可数, 对于 f 封闭, $N \cap \omega_1 \in T$, 以及 $\sup(N \cap \kappa = \sup(M \cap \kappa)$. 由此可见, S 是一个投影荟萃集.

应用投影荟萃集光影原理, 令 $\langle N_\alpha \in S \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个来自 S 的长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列. 那么

$$\{\sup(N_\alpha \cap \kappa) \mid \alpha < \omega_1\} \subset E$$

就是一个与 ω_1 同构的子集.

(3) 设 $\kappa \geqslant \omega_2$ 为一个正则基数. 令 $E = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$. 令

$$\{E_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$$

为 E 的一个荟萃子集分划, 即每一个 $E_\alpha \subset E$ 都是荟萃子集, 它们彼此不相交, 它们的并是整个 E. 又令 $\{T_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 为 ω_1 的一个荟萃集分划, 并且是一个极大的彼此几乎不相交的荟萃子集的集合.

设 $f : \omega_1 \to \kappa$ 为一个严格单调的函数. 令

$$S_f = \left\{N \in [\mathscr{H}_\kappa]^\omega \mid \forall \alpha < N \cap \omega_1 \left(N \cap \omega_1 \in T_\alpha \to \sup(N \cap \kappa) \in E_{f(\alpha)}\right)\right\}.$$

那么 S_f 是一个投影荟萃集. 欲见此事实, 设 $T \subset \omega_1$ 为一个荟萃集. 令 $\alpha < \omega_1$ 为最小的满足 $T \cap T_\alpha$ 为荟萃集这一要求的序数. 那么下述集合是一个荟萃集:

$$\left\{N \in [\mathscr{H}_\kappa]^\omega \mid \alpha < N \cap \omega_1 \in T \cap T_\alpha \wedge \sup(N \cap \kappa) \in E_{f(\alpha)}\right\}.$$

据此, 应用投影荟萃集光影原理, 令 $\langle N_\alpha \in S_f \mid \alpha < \omega_1\rangle$ 为一个长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列. 令

$$\gamma_f = \sup(\{\sup(N_\alpha \cap \kappa) \mid \alpha < \omega_1\}).$$

那么 $\gamma_f < \kappa$, 并且

$$\{\sup(N_\alpha \cap \kappa) \mid \alpha < \omega_1\}$$

是 $\gamma_f \cap \left(\bigcup \left\{ E_{f(\alpha)} \mid \alpha < \omega_1 \right\}\right)$ 的一个与 ω_1 同构的无界闭子集.

因此, 如果 $f : \omega_1 \to \kappa$ 和 $g : \omega_1 \to \kappa$ 是两个不同的严格单调的函数, 那么 $\gamma_f \neq \gamma_g$. 这就证明了 $\kappa^{\aleph_1} = \kappa$. 应用银杰定理 (定理 I.2.37), 就得到奇异基数假设成立.

(4) 设 $\kappa > \omega_1$ 是一个基数. 令 $\lambda = |\mathfrak{P}(\mathscr{H}_\kappa)|^+$.

首先, 对于 $S \subset [\mathscr{H}_\kappa]^\omega$, 我们定义一个由 S 所诱导出来的投影荟萃集 $p(S)$ 如下: 对于 $T \subset \omega_1$, 令 $S_T = \{N \in S \mid N \cap \omega_1 \in T\}$. 令

$$X = \left\{T \subset \omega_1 \;\middle|\; T \text{ 是荟萃子集} \wedge S_T \text{ 不是荟萃集}\right\},$$

以及令 $W \subset X$ 为一个极大冲突子集, 并且在所有 X 的极大冲突子集中势最小. 定义

$$p(S) = \left\{ N \in [\mathscr{H}_\lambda]^\omega \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} S \in N \prec \mathscr{H}_\lambda \wedge \\ ((\exists A \in N \cap W\ (N \cap \omega_1 \in A)) \leftrightarrow N \notin S) \end{array} \right) \right\}.$$

那么 $p(S)$ 是 $[\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 的一个投影荟萃子集.

应用投影荟萃集光影原理, 令 $\langle N_\alpha \in p(S) \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ 为来自 $p(S)$ 中的一个长度为 ω_1 的单调递增连续的 $\in$-序列.

断言　S 是荟萃集的充分必要条件是集合 $\{\alpha < \omega_1 \mid N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \in S\}$ 是荟萃集.

设 S 是荟萃集. 假设 $\{\alpha < \omega_1 \mid N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \in S\}$ 不是荟萃集. 这个集合的补集包含一个无界闭集. 由此得到

$$\forall A \in W \, \exists \alpha < \omega_1 \ (A \in N_\alpha).$$

令 $f : \omega_1 \to W$ 为一个满射. 对于 $\alpha < \omega_1$, 令 $C_\alpha \subset [\mathscr{H}_\lambda]^\omega$ 为一个满足 $C_\alpha \cap S_{f(\alpha)}$ 为空集的无界闭集. 令

$$C = \{ N \in [\mathscr{H}_\lambda]^\omega \mid N \prec \mathscr{H}_\lambda \wedge \forall \alpha < N \cap \omega_1 \ (N \in C_\alpha)\}.$$

那么 $(C \downarrow \mathscr{H}_\kappa) \cap S$ 是荟萃集, 并且下述集合 T 是 ω_1 的荟萃子集:

$$T = ((C \downarrow \mathscr{H}_\kappa) \cap S) \downarrow \omega_1 = \{ N \cap \omega_1 \mid N \in (C \downarrow \mathscr{H}_\kappa) \cap S\}.$$

令 $\alpha \in T$ 具备下列性质:

(a) $\forall A \in N_\alpha \cap W \, \exists \beta < \alpha \, (A = f(\beta))$;

(b) $\forall \beta < \alpha \ (f(\beta) \in N_\alpha)$;

(c) $\alpha = N_\alpha \cap \omega_1$.

那么 $N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \in S$. 这便是一个矛盾.

设 S 不是荟萃集. 根据势的极小性, $|W| = 1$. 这样 W 中唯一的元素就是一个无界闭集. 根据同质性, N_0 中就有这样一个无界闭集 D. 于是

$$\forall \alpha < \omega_1 \ (N_\alpha \cap \omega_1 \in D).$$

因此, $\forall \alpha < \omega_1 \ (N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \notin S)$. □

推论 2.3 (Foreman-Magidor-Shelah) 假设马丁极大原理成立, 那么定理 2.33 中的结论 (1)~(4) 都成立.

在我们的投影荟萃集光影原理提出之前, 托多切菲奇[25] 在谢旯工作的基础上提炼出一个强荟萃集光影原理, 并且证明了 Foreman-Magidor-Shelah 在马丁极大原理下证明的结论 (1)~(4) 可以由强荟萃集光影原理导出, 而强荟萃集光影原理又是马丁极大原理的一个推论.

我们是在探讨如下问题时发现我们的投影荟萃集光影原理的. 根据众所周知的荟萃集光影原理, 任何一个上层空间上的荟萃集总会在一个势为 $\aleph_1$ 的下空间上留下荟萃集光影. 我们感兴趣的问题是: 什么样的荟萃集会在一个小空间上留下无界闭子光影? 自然而然地这个问题将我们引导投影荟萃集的概念以及投影荟萃集光影原理. 有趣的是, 殊途同归: 这两个光影原理事实上对等. 现在我们就来看看托多切菲奇提出的强荟萃集光影原理.

定义 2.36 (Todorcevic) **强荟萃集光影原理**(SRP[26]) 是下述命题:

对于每一个不可数的基数 κ, 对于每一个 $S \subset [\kappa]^\omega$, 以及每一个严格大于 κ 的正则基数 θ, 存在 $\mathscr{H}_\theta$ 的可数同质子模型的一个长度为 ω_1 的具备下述特点的单调递增连续的 $\in$-序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$:

$$\forall \alpha < \omega_1 \left(N_\alpha \cap \kappa \in S \leftrightarrow \exists M \prec \mathscr{H}_\theta \begin{pmatrix} |M| = \aleph_0 \ \wedge \ N_\alpha \subset M \ \wedge \\ M \cap \omega_1 = N_\alpha \cap \omega_1 \ \wedge \ M \cap \kappa \in S \end{pmatrix} \right).$$

现在我们来证明这两个光影原理对等.

定理 2.34 (冯-Jech) 投影荟萃集光影原理 (PSRP) 当且仅当强荟萃集光影原理 (SRP).

证明 $\Leftarrow$. 令 $S \subset [\mathscr{H}_\kappa]^\omega$ 为一个投影荟萃集合. 令 $\theta = |\mathfrak{P}(\mathscr{H}_\kappa)|^+$. 令 $\langle N_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ 为强荟萃集光影原理所提供的 $\mathscr{H}_\theta$ 的判定 S 的可数同质子模型的单调递增连续的 $\in$-序列.

断言一 集合 $\{\alpha < \omega_1 \mid N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \in S\}$ 包含 ω_1 的一个无界闭集.

假设不然. 令 $T = \{\alpha < \omega_1 \mid N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \notin S \wedge \alpha = N_\alpha \cap \omega_1\}$. 那么 T 是荟萃集.

25 Stevo Todorcevic.

26 Strong Reflection Principle.

如下定义 D:

$$D = \{ N \in [\mathscr{H}_\theta]^\omega \mid \mathscr{H}_\kappa \in N \wedge \forall \beta < N \cap \omega_1 \ (N_\beta \in N) \}.$$

根据正规性, D 一定包含 $[\mathscr{H}_\theta]^\omega$ 的一个无界闭集.

由于 S 是投影荟萃集, 令 $N \in D$ 具备下述特点:

(a) $N \cap \omega_1 \in T$;

(b) $N \cap \mathscr{H}_\kappa \in S$;

(c) $N \prec \mathscr{H}_\theta$.

令 $\alpha = N \cap \omega_1$. 因为对于 $\beta < \alpha$ 必有 $N_\beta \subset N$,

$$N_\alpha \cap \omega_1 = \alpha = N \cap \omega_1 \wedge N_\alpha \subset N.$$

依据 N_α 的特点, $N_\alpha \cap \mathscr{H}_\kappa \in S$. 这就是一个矛盾.

断言一得证.

$\Rightarrow$. 设 $\kappa \geqslant \omega_1$. 令 $\theta > \kappa$ 为一个足够大的正则基数. 设 $S \subset [\kappa]^\omega$. 对于 $N \in [\mathscr{H}_\theta]^\omega$, 令 $N \in S^*$ 当且仅当下述条件成立:

(a) $N \prec (\mathscr{H}_\theta, \in \Delta)$;

(b) $\exists M \prec (\mathscr{H}_\theta, \in \Delta) \left(\begin{array}{l} N \subset M \wedge |M| = \aleph_0 \wedge \\ N \cap \omega_1 = M \cap \omega_1 \wedge \\ (M \cap \kappa \in S \to N \cap \kappa \in S) \end{array} \right)$.

其中, 以及下述讨论中, Δ 为相应结构上的秩序.

断言二　S^* 是 $[\mathscr{H}_\theta]^\omega$ 的投影荟萃子集.

令 $g : \mathscr{H}_\theta^{<\omega} \to \mathscr{H}_\theta$, 以及 $T \subset \omega_1$ 为荟萃集. 令 $\lambda = |\mathfrak{P}(\mathscr{H}_\theta)|^+$.

令 $N' \prec (\mathscr{H}_\lambda, \in, \Delta)$ 为一个具备下述特点的可数同质子模型: $N' \cap \omega_1 \in T$, 以及 $\{\kappa, \theta, S, g\} \subset N'$.

假设存在可数的 $M \prec (\mathscr{H}_\theta, \in \Delta)$ 以至于下述事实成立:

(a) $M \cap \omega_1 = N' \cap \omega_1$;

(b) $N' \cap \mathscr{H}_\theta \subset M$;

(c) $M \cap \kappa \in S$.

(如果不存在这样的 M, 那么 $N' \cap \mathscr{H}_\theta \in S^*$, 我们就得到所期望的). 令 N 为集合 $N' \cup (M \cap \kappa)$ 在模型 $(\mathscr{H}_\lambda, \in, \Delta)$ 中的斯科伦闭包. 下面我们将证明 $N \cap \kappa = M \cap \kappa$. 在此基础上, 就有 $N \cap \mathscr{H}_\theta \in S^*$.

现在我们来证明 $N \cap \kappa = M \cap \kappa$. 设 $\alpha \in N \cap \kappa$. 令 τ 为一个斯科伦项. 设 $a \in N'$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in M \cap \kappa$ 实现 $\alpha = \tau(a, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

如下定义 $h:\kappa^m\to\kappa$ 如下: 对于 $x_1,\cdots,x_m\in\kappa$, 令

$$h(x_1,\cdots,x_m)=\begin{cases}\tau(a,x_1,\cdots,x_n) & \text{当 } \tau(a,x_1,\cdots,x_m)<\kappa,\\ 0 & \text{当 } \tau(a,x_1,\cdots,x_m)\geqslant\kappa.\end{cases}$$

这样, $h\in N'$. 于是, $h\in N'\cap\mathscr{H}_\theta\subset M$. 因此, $\alpha=h(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in M\cap\kappa$.

断言二得证.

应用投影荟萃集光影原理, 令 $\langle N_\alpha\in S^*\mid\alpha<\omega_1\rangle$ 为来自 S^* 的单调递增连续的 $\in$-序列. 这就是对 S 判定的序列. □

2.8 练　　习

练习 2.1 设 κ 是一个不可达基数, $|P|<\kappa$ 是一个力迫构思. 验证: 如果 G 是 $\mathbb{P}$ 的 V-泛型滤子, 那么 V$[G]$ 中的每一个 κ 的无界闭子集 C 都一定包含 κ 的在 V 中的无界闭子集 D.

练习 2.2 如果 κ 是一个不可达基数, $\theta<\kappa$ 是一个正则基数. 如果 κ 之上存在一个 θ-饱和的 κ-完全的包括 κ 在内的所有单点子集的理想 I, 那么必然存在一个 $Z\in I^+$ 以至于 $I\restriction_Z=\{X\subset Z\mid X\in I\}$ 是一个 κ-完全的非平凡的素理想, 从而 κ 一定是一个可测基数.

[提示] 假设那样的 $Z\in I^+$ 不存在. 构造 κ 上的 I^+ 中的集合的分裂二叉树: 从 κ 开始作为树根; 在第 α 层上每一个节点 $X\in I^+$ 处, 将其分裂成两个互不相交的 I^+ 中的元素: $X=X_0\cup X_1$, $X_0\in I^+$, $X_1\in I^+$, $X_0\cap X_1=\varnothing$, 这样得到第 $\alpha+1$ 层; 当 α 是一个极限序数时, 考虑所有那些长度为 α 的在树递减关系 $\supset$ 下的树枝, 如果沿着本树枝的所有集合的交集依旧在 I^+ 中, 则将该树枝以这个交集作为在第 α 层的节点; 否则该树枝便没有可延伸之物. 最后, 考虑所构造之树的那些具有非空交的树枝的集合. 这些树枝的交集形成对 κ 的一个分划, 并且都是 I 中的元素. 利用 $\theta<\kappa$ 以及 I^+ 中没有 θ 个彼此模 I 几乎不相交的元素序列存在之 θ-饱和性以及 I 的 κ-可加性和 κ 的不可达基数性质, 得到一个矛盾.

练习 2.3 设 κ 是一个可测基数, $|P|<\kappa$ 是一个力迫构思. 令 U 是 κ 之上的非平凡的 κ-完全的超滤子. 在 V$[G]$ 中, 令

$$W=\{X\subseteq\kappa\mid\exists Y\in U\,(Y\subseteq X)\}.$$

验证: 在 V$[G]$ 中, W 是 κ 上的非平凡的 κ-完全的超滤子.

练习 2.4 设 κ 是一个不可达基数. 证明: 存在一个势为 κ 的具备下述特点的力迫构思 $\mathbb{P}=(P,<)$: 对于每一个 $\alpha<\kappa$, $\mathbb{P}$ 满足 (α,∞)-分配律以及

$$\Vdash_{\mathbb{P}}\{\alpha<\kappa\mid\mathrm{cf}(\alpha)<\alpha\}\text{ 是}\kappa\text{的一个无界闭子集.}$$

练习 2.5　证明: 如果 κ 是一个可测基数, $\mathbb{P}$ 是一个 κ-完全的 (或者满足 (κ,∞)-分配律的) 偏序, 那么 κ 在 V 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张中还是一个可测基数.

练习 2.6　验证: 在普利克瑞力迫构思泛型扩张模型中, 下述事实成立: 如果 $\lambda<\kappa$, $F:[\kappa]^{<\omega}\to\lambda$, 那么

$$\exists H\in[\kappa]^{\kappa}\ \left(\left|F\left[[H]^{<\omega}\right]\right|\leqslant\aleph_0\right).$$

练习 2.7　证明: 如果存在一个超紧基数是与 ZFC 相容的, 那么 ZFC 与存在一个满足下述不等式的奇异基数 κ

$$2^{\mathrm{cf}(\kappa)}<\kappa\wedge\kappa^{+}<\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}<2^{\kappa}$$

也是相容的.

练习 2.8　设 M 和 N 是 ZF 的传递模型, 并且选择公理在它们其中之一成立. 如果它们具有完全相同的序数的集合, 即

$$\mathfrak{P}^{M}\left(\mathrm{Ord}^{M}\right)=\mathfrak{P}^{N}\left(\mathrm{Ord}^{N}\right),$$

那么 $M=N$.

练习 2.9　如果 P_α 是一个迭代力迫, $P_\beta=P_\alpha\restriction_\beta$, 那么 $\mathrm{V}^{P_\beta}\subset\mathrm{V}^{P_\alpha}$.

练习 2.10　设 I 是 α 上的一个 κ-可加理想. 设 P_α 是 $\left\langle\dot{Q}_\beta\;\middle|\;\beta<\alpha\right\rangle$ 的以 I-支撑的迭代力迫构思. 如果对于每一个 $\beta<\alpha$ 都有 $\mathbf{1}\Vdash_\beta\dot{Q}_\beta$ 是 $<\kappa$-封闭的, 那么 P_α 也一定是 $<\kappa$-封闭的.

练习 2.11　设 P_α 与 P'_α 分别是 $\left\langle\dot{Q}_\beta\;\middle|\;\beta<\alpha\right\rangle$ 和 $\left\langle\dot{Q}'_\beta\;\middle|\;\beta<\alpha\right\rangle$ 的可数支撑迭代. 假设对 $\beta<\alpha$, 由条件 $\mathbb{B}(P_\beta)=\mathbb{B}\left(P'_\beta\right)$ 一定得到 $\mathbf{1}\Vdash_\beta\mathbb{B}\left(\dot{Q}_\beta\right)=\mathbb{B}\left(\dot{Q}'_\beta\right)$, 那么 $\mathbb{B}(P_\alpha)=\mathbb{B}(P'_\alpha)$.

练习 2.12　设 $\kappa>\omega_1$ 是一个正则基数. 设 P 是一个可数支撑的长度为 κ 的迭代力迫构思, 并且对每一个 $\beta<\kappa$, $P\restriction_\beta$ 都有一个势小于 κ 的稠密子集. 那么 P 满足 κ-链条件.

练习 2.13　设 $\mathcal{I}$ 是 κ 上的一个 κ-完全的非平凡的 κ^{+}-饱和的理想. 验证: $\mathfrak{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ 是一个完备布尔代数.

练习 2.14　设一般连续统假设成立. 设 $\mathcal{I}$ 是 κ 上的一个 κ-完全的非平凡的理想. 验证: 如果 $\mathfrak{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ 是一个完备布尔代数, 那么 $\mathcal{I}$ 是 κ^{+}-饱和的.

练习 2.15　设 $\mathcal{I}$ 是 κ 上的一个 κ-完全的非平凡的理想. 验证: 如果 $\mathcal{I}$ 是正规的, 那么 $\mathfrak{P}(\kappa)/\mathcal{I}$ 是一个 κ^{+}-完备布尔代数.

练习 2.16　设 κ 是一个超紧基数. 令 $\mathbb{P}=\mathrm{Col}\left(\omega_1,<\kappa\right)$ 为莱维力迫构思以可数条件将 κ 减势为 ω_2. 令 G 为 V 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 验证: 在 $\mathrm{V}[G]$ 中下述

事实成立:

$$\forall\lambda \geqslant \omega_2\, \forall S \subset [\lambda]^\omega \ (S\text{ 是荟萃集} \to \exists X \in [\lambda]^{\omega_1}\ (S \cap [X]^\omega\text{ 是荟萃集}))\,.$$

练习 2.17 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思, $p \in P$ 是一个条件. 定义如下恰当性赛事: 在第 $n < \omega$ 步, 张三先展示一个序数的名字 $\dot{\alpha}_n$; 李四则以一个序数 β_n 应对. 在完成 ω 步之后, 李四赢得本局当且仅当

$$\exists q \leqslant p\ \left(q \Vdash \left(\forall n < \check{\omega}\, \exists k < \check{\omega}\ \left(\dot{\alpha}_n = \check{\beta}_k\right)\right)\right)\,.$$

证明: $\mathbb{P}$ 是一个恰当力迫构思的充分必要条件是对于任意的 $p \in P$, 在上述恰当性赛事中, 李四总有一个稳赢策略.

第 3 章　大基数下集合 $\mathrm{V}_{\omega+2}$ 的内涵

大基数下集合 $\mathrm{V}_{\boldsymbol{\omega+2}}$ 的内涵

本章将运用迄今为止积累起来的工具分析 $\mathrm{V}_{\omega+2}$ 中所包括的内容. 传统上, 对 $\mathrm{V}_{\omega+2}$ 的探讨称为描述集合论. 这样称呼的根本理由就在于描述集合论的主要内容是应用集合论的手段探讨 $\mathrm{V}_{\omega+1}$ 上的可定义子集合的基本性质. 这种分析几乎完全集中在贝尔空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 或者它的笛卡尔乘积空间之上.

3.1　实数集可定义子集分析

在对实数子集合正则性分析的古典理论中, 我们曾经专门探讨过解析集的一些优良性质, 比如勒贝格可测性、贝尔性质、完备子集性质. 在那里我们也留下了一系列问题, 最简单的问题是关于余解析集的完备集性质问题. 在那里 (见第 I.262 页), 我们也引入了更为复杂的投影集层次, 并用古典的通用集的方法证明了这个投影集层次是一个非平凡的层次. 在这里, 我们将应用可定义性概念来重新审视投影集层次, 并在这个基础上对它们展开分析. 我们将看到不同于古典理论朴素之美的更为精彩的图画.

回顾一下, 我们所定义的有理数集 $\mathbb{Q}$ 是彻底有限集合之集 V_ω 的子集, 也就是说, 我们用彻底有限集合来表示有理数; 然后用有理数子集来表示实数. 这样, 每一个实数便是 V_ω 的一个子集; 一个从自然数集合到自然数集合的函数也是这样. 因此, $\mathbb{R} \subset \mathrm{V}_{\omega_1}$, $\mathcal{N} \subset \mathrm{V}_{\omega+1}$. 按照可定义性分析, 它们都是传递模型 $(\mathrm{V}_{\omega+1}, \in)$ 上的可定义子集; 同时它们也都是传递模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1}, \in)$ 上的可定义子集. 自然, 它们也就都在 $\mathrm{V}_{\omega+2}$ 之中. 现在, 我们就将古典理论中的投影集层次纳入这些模型上的可定义子集的范畴来分析. 这样, 前面所积累起来的集合论的基本理论就都可以在对实数子集的分析中发挥作用.

3.1.1　投影集合精细分层

我们从对投影层次的更为精细的分层开始. 为了明晰和具体起见, 我们将专注于贝尔空间 $\mathcal{N}$. 尽管如此, 实际上下面的分析同样适用于它的乘积空间以及离散空间 ω, ω^m 和 $\omega^k \times \mathcal{N}^r$. 我们将这种一般性留给读者去想象.

前面用 "黑体" 字符 $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 以及 $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ 来标识第 n 层的投影集合. 欲将这样的层次进一步精细分层, 我们将使用 "简体" 字符 Σ^1_n 以及 Π^1_n 来标识新的层次. 具体

如下：

定义 3.1 设 $a \in \mathcal{N}$. 设 $1 \leqslant k \in \omega$.

(1) (i) 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 Σ^1_1 集合当且仅当存在一个满足下述对等关系的递归集合 $R \subset \bigcup_{n<\omega} (\omega^n \times \omega^n)$:

$$\forall x \in \mathcal{N}\ (x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\ (R\,(x\restriction_n, y\restriction_n)))\,.$$

(ii) 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 $\Sigma^1_1(a)$ 集合 (以 a 为基础的 Σ^1_1 集合) 当且仅当存在一个满足下述对等关系

$$\forall x \in \mathcal{N}\ (x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\ (R\,(x\restriction_n, y\restriction_n, a\restriction_n)))$$

的相对于 a 来说递归的集合 $R \subset \bigcup_{n<\omega} (\omega^n \times \omega^n \times \omega^n)$.

(2) 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 Π^1_k 集合当且仅当 $(\mathcal{N} - A)$ 是一个 Σ^1_k 集合; 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 $\Pi^1_k(a)$ 集合当且仅当 $(\mathcal{N} - A)$ 是一个 $\Sigma^1_k(a)$ 集合.

(3) 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 Σ^1_{k+1} 集合当且仅当 A 是 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 上的某个 Π^1_k 集合 B 的投影, $A = \mathrm{TY}(B)$; 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 $\Sigma^1_{k+1}(a)$ 集合当且仅当 A 是 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 上的某个 $\Pi^1_k(a)$ 集合 B 的投影, $A = \mathrm{TY}(B)$.

(4) 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 Δ^1_k 集合当且仅当 A 既是一个 Σ^1_k 集合, 又是一个 Π^1_k 集合; 贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 $\Delta^1_k(a)$ 集合当且仅当 A 既是一个 $\Sigma^1_k(a)$ 集合, 又是一个 $\Pi^1_k(a)$ 集合.

由上述定义可知, 记号 Σ^1_n 中上标 1 标志着在实数子集合的定义式中除了涉及自然数变元量词之外还涉及实数变元存在量词, 其下标 $n \geqslant 1$ 则标志着涉及实数的量词从存在量词开始, 接着全称量词, 再接着存在量词, 等等, 交错 n 次; 记号 Π^1_n 中的上标 1 也是标志定义式中涉及实数变元量词, 其下标 n 则标志着涉及实数的量词从全称量词开始, 交错 n 次; 至于 $\Sigma^1_n(a)$ 和 $\Pi^1_n(a)$ 则具有同样的标志含义, 只是额外增添了一个固定的实数参数 a.

仔细观察一下 Σ^1_1 集合的定义, 我们发现在涉及实数的存在量词 $\exists y \in \mathcal{N}$ 后面是一个只涉及自然数变元量词的表达式: $\forall n \in \mathbb{N}\ (R\,(x\restriction_n, y\restriction_n))$. 应用这个表达式, 我们可以定义如下集合:

$$B = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ (R\,(x\restriction_n, y\restriction_n))\}\,.$$

由于递归谓词 R 是一个在 $(V_\omega, \in)$ 上由有界量词表达式所定义的, B 的定义式只带一个涉及自然数的全称量词的表达式, 即一个 Π^0_1 表达式, 其中上标 0 标志着只

涉及自然数变元量词, 不涉及实数变元量词; 下标 1 标志着只涉及同一类量词, 没有交错; Π 则标志着所涉及的是以全称量词开始. B 的补集

$$\mathcal{N}\times\mathcal{N}-B=\{(x,y)\in\mathcal{N}\times\mathcal{N}\mid\exists n\in\mathbb{N}\,(\neg\,(R\,(x\restriction_n,y\restriction_n)))\}$$

的定义式则是一个 Σ_1^0 表达式. 应用 $\mathcal{N}$ 的拓扑, 可见 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}-B$ 是一个开集：设 $(x,y)\in\mathcal{N}\times\mathcal{N}-B$, 取 $n<\omega$ 为一个证据, 那么 $N_{x\restriction n}\times N_{y\restriction n}\subset\mathcal{N}\times\mathcal{N}-B$. 于是 B 便是一个闭集, 而 A 是 B 的投影. 这样, 我们自然而然地用 $\Sigma_1^0(a)$ 来记以 a 为参数、以一个 Σ_1^0 表达式所定义的开集的全体; 用 $\Pi_1^0(a)$ 来记以 a 为参数、以一个 Π_1^0 表达式所定义的闭集的全体. 如此一来, $\Sigma_1^1(a)$ 则是那些 $\Pi_1^0(a)$ 集合的投影的全体. 于是

$$\boldsymbol{\Sigma}_1^1=\bigcup_{a\in\mathcal{N}}\Sigma_1^1(a).$$

更一般地, 对于 $1\leqslant n<\omega$, 我们有

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^1=\bigcup_{a\in\mathcal{N}}\Sigma_n^1(a)\text{ 以及 }\boldsymbol{\Pi}_n^1=\bigcup_{a\in\mathcal{N}}\Pi_n^1(a).$$

这便是本小节开始时所说的投影集精细分层的本义：我们将投影集合按照固定参数下的定义式的复杂性进行精细分层, 而且各层次恰好与表达式的复杂层次吻合. 这样精细分层之后也顺便对投影集合记号 $\boldsymbol{\Sigma}_n^1$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_n^1$ 中的上标以及为什么使用黑体字符给出了合适的理由：黑体表示在定义式中使用实数参数; 上标 1 表示定义式中使用了实数变元量词. 那么在博雷尔集的层次结构中所使用的开始的 ω 层记号 $\boldsymbol{\Sigma}_n^0$ 以及 $\boldsymbol{\Pi}_n^0$ 则意味着它们的定义式中有不涉及实数变元量词只涉及自然数变元量词的表达式; 黑体自然是因为使用实数参数.

我们给投影集合进行精细分层的目的并不只是为了解释投影集合记号的含义, 更主要的是可以对每一个投影集层次进行系统分析. 因为表达式是由简到繁经过布尔运算以及量词添加而得到的, 所以各层次内会有相应的封闭特性. 这种封闭特性通常在分析的应用中很有用处. 下述引理就记录这样的封闭特性.

引理 3.1 设 $1\leqslant n<\omega$.

(1) 设 A 和 B 是贝尔空间上的两个 $\Sigma_n^1(a)$ 关系. 那么下述组合也都是 $\Sigma_n^1(a)$ 关系：

$$A\wedge B;\ A\vee B;\ (\exists x\in\mathcal{N}\,A);\ (\exists m\in\mathbb{N}\,A);\ (\forall m\in\mathbb{N}\,A).$$

(2) 设 A 和 B 是贝尔空间上的两个 $\Pi_n^1(a)$ 关系. 那么下述组合也都是 $\Pi_n^1(a)$ 关系：

$$A\wedge B;\ A\vee B;\ (\forall x\in\mathcal{N}\,A);\ (\exists m\in\mathbb{N}\,A);\ (\forall m\in\mathbb{N}\,A).$$

(3) 如果 A 是 $\Sigma_n^1(a)$, 那么 $(\neg A)$ 是 $\Pi_n^1(a)$;

如果 A 是 $\Pi_n^1(a)$, 那么 $(\neg A)$ 是 $\Sigma_n^1(a)$.

(4) 如果 A 是 $\Sigma_n^1(a)$, B 是 $\Pi_n^1(a)$, 那么 $(A \to B)$ 是 $\Pi_n^1(a)$;

如果 A 是 $\Pi_n^1(a)$, B 是 $\Sigma_n^1(a)$, 那么 $(A \to B)$ 是 $\Sigma_n^1(a)$.

(5) 设 A 和 B 是贝尔空间上的两个 $\Delta_n^1(a)$ 关系. 那么下述组合也都是 $\Delta_n^1(a)$ 关系:

$$(\neg A);\ A \wedge B;\ A \vee B;\ (A \to B);\ (A \leftrightarrow B);\ (\exists m \in \mathbb{N}\ A);\ (\forall m \in \mathbb{N}\ A).$$

证明 我们证明 $n=1$ 的情形. 一般情形由归纳法得到. 结论 (2)~(5) 都由 (1) 推出. 所以我们专注于 (1).

设 A 是 $\Sigma_1^1(a)$. 先证 $\exists x\, A$ 是 $\Sigma_1^1(a)$. 不妨设 A 是一个二元关系. 我们有

$$(x,y) \in A \leftrightarrow \exists z\, \forall n\ (x\restriction_n, y\restriction_n, z\restriction_n, n) \in R,$$

其中, R 是一个递归集合. 于是,

$$y \in (\exists x\, A) \leftrightarrow \exists x\, \exists z\, \forall n\ (x\restriction_n, y\restriction_n, z\restriction_n, n) \in R.$$

我们需要将涉及实数的两个量词 $\exists x\, \exists z$ 融合成一个涉及实数的量词.

给定 $u \in \mathcal{N}$, 令 $(u^+, u^-) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 由下式确定:

$$\forall n\ \left(u^+(n) = u(2n) \wedge u^-(n) = u(2n+1)\right).$$

映射 $\mathcal{N} \ni u \mapsto (u^+, u^-) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 是一个递归同胚映射. 令 R' 为依下述关系式所确定的递归关系:

$$\begin{array}{l} (s,t,n) \in R' \leftrightarrow \\ \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) = n \wedge \exists k \leqslant n \\ \left(\begin{array}{l} (n = 2k \vee n = 2k+1) \wedge \\ (\langle s(0), \cdots, s(2k-2)\rangle, \langle t(0), \cdots, t(k-1)\rangle, \langle s(1), \cdots, s(2k-1)\rangle, k) \in R \end{array} \right). \end{array}$$

对于 $u, y \in \mathcal{N}$, 总有

$$[\forall n\ (u\restriction_n, y\restriction_n, n) \in R'] \iff \left[\forall k\ \left(u^+\restriction_k, y\restriction_k, u^-\restriction_k, k\right) \in R\right].$$

因此, 对于 $y \in \mathcal{N}$,

$$y \in (\exists x\, A) \leftrightarrow (\exists u\, \forall n\ (u\restriction_n, y\restriction_n, n) \in R').$$

这表明 $(\exists x\, A)$ 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 集合.

现在设 A 和 B 是两个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系：

$$x \in A \leftrightarrow \exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_1,$$

$$x \in B \leftrightarrow \exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_2,$$

其中 R_1 与 R_2 是 a 之上的递归集合.

关于 $A \wedge B$, 我们有

$$\begin{aligned}
& x \in (A \wedge B) \\
\leftrightarrow\ & (\exists z_1\, \forall n\ (x \restriction_n, z_1 \restriction_n, n) \in R_1) \wedge (\exists z_2\, \forall m\ (x \restriction_m, z_2 \restriction_m, m) \in R_2) \\
\leftrightarrow\ & (\exists z_1\, \exists z_2\ ((\forall n\ (x \restriction_n, z_1 \restriction_n, n) \in R_1) \wedge (\forall m\ (x \restriction_m, z_2 \restriction_m, m) \in R_2))) \\
\leftrightarrow\ & (\exists z_1\, \exists z_2\ (\forall n \forall m\ ((x \restriction_n, z_1 \restriction_n, n) \in R_1) \wedge ((x \restriction_m, z_2 \restriction_m, m) \in R_2))) \\
\leftrightarrow\ & \exists z_1\, \exists z_2\, \forall n\ [(x \restriction_n, z_1 \restriction_n, n) \in R_1 \wedge (x \restriction_n, z_2 \restriction_n, n) \in R_2]\,.
\end{aligned}$$

用上面融合涉及实数变元的两个存在量词的方式融合存在量词 $\exists z_1\, \exists z_2$ 成涉及一个实数变元的存在量词 $\exists z$, 得到一个 a 之上的递归集合 R 来实现关系式：

$$x \in (A \wedge B) \leftrightarrow \exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R.$$

从而 $(A \wedge B)$ 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系.

关于 $A \vee B$, 我们有

$$\begin{aligned}
& x \in (A \vee B) \\
\leftrightarrow\ & (\exists z_1\, \forall n\ (x \restriction_n, z_1 \restriction_n, n) \in R_1) \vee (\exists z_2\, \forall m\ (x \restriction_m, z_2 \restriction_m, m) \in R_2) \\
\leftrightarrow\ & ((\exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_1) \vee (\exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_2))\,.
\end{aligned}$$

考虑下述技巧：对于 $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ 和 $m, n \in \mathbb{N}$, 令

$$(s, m, t, n) \in R \leftrightarrow ((m = 1 \wedge (s, t, n) \in R_1) \vee (m = 2 \wedge (s, t, n) \in R_2))\,.$$

那么 R 是一个 a 之上的递归关系, 并且下述对等式成立：

$$\begin{aligned}
& ((\exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_1) \vee (\exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, z \restriction_n, n) \in R_2)) \\
\leftrightarrow\ & (\exists m\, \exists z\, \forall n\ (x \restriction_n, m, z \restriction_n, n) \in R)\,.
\end{aligned}$$

令 C 为下述关系：对于 $x \in \mathcal{N}$, 以及 $m \in \mathbb{N}$,

$$(m, x) \in C \leftrightarrow (\exists z\ (\forall n\ (x \restriction_n, m, z \restriction_n, n) \in R))\,.$$

那么 C 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系, 并且

$$x \in (A \vee B) \leftrightarrow x \in (\exists m\, C).$$

现在我们需要做的是融合一个涉及自然数变元的存在量词 $\exists m$ 以及一个涉及实数变元的存在量词 $\exists z$ 成一个涉及实数变元的存在量词. 这种融合可以如下实现：令 $\mathbf{S}:\mathbb{N}\ni k\mapsto k+1\in\mathbb{N}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的后继函数; 下述等式确定从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathbb{N}\times\mathcal{N}$ 的递归拓扑同胚映射 h: 对于任意的 $u\in\mathcal{N}$,

$$h(u)=(u(0),u\circ\mathbf{S}).$$

据此, 由 a 之上的递归关系 R, 我们定义一个新的 a 之上的递归关系 R' 如下：对于 $s,t\in\mathbb{N}^{<\omega}$, 以及 $n\in\mathbb{N}$, 令

$$(s,t,n)\in R'\leftrightarrow(\mathrm{dom}(s)=\mathrm{dom}(t)=n\wedge\forall k<n\ (s\restriction_k,t(0),(t\circ\mathbf{S})_k,k)\in R).$$

那么 R' 是 a 之上的一个递归关系, 并且

$$\forall u\in\mathcal{N}\,\forall x\in\mathcal{N}\ [(\forall n\ (x\restriction_n,u\restriction_n,n)\in R')\leftrightarrow(\forall k\ (x\restriction_k,u(0),(u\circ\mathbf{S})\restriction_k,k)\in R)].$$

这样, 对于 $x\in\mathcal{N}$,

$$x\in(A\vee B)\leftrightarrow x\in(\exists m\,C)\leftrightarrow(\exists u\forall n\ (x\restriction_n,u\restriction_n,n)\in R').$$

所以, $(A\vee B)$ 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系; 并且 $\exists m\,A$ 也是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系.

最后, 我们来证明当 A 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系时, $\forall m\,A$ 也是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系.

设 A 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 关系, 并且设 R 是一个 a 之上的递归集合来保证下述关系式成立：对于 $x\in\mathcal{N}$, 以及 $m\in\mathbb{N}$,

$$(x,m)\in A\leftrightarrow\exists z\,\forall n\ ((x\restriction_n,m,z\restriction_n,n)\in R).$$

于是, 对于 $x\in\mathcal{N}$,

$$x\in(\forall m\,A)\leftrightarrow(\forall m\,\exists z\,\forall n\ ((x\restriction_n,m,z\restriction_n,n)\in R)).$$

我们需要将量词 $\forall m\,\exists z$ 逻辑对等地交换成 $\exists z\,\forall m$, 然后将 $\forall m\,\forall n$ 融合成 $\forall k$.

考虑一个递归配对函数 $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 以及由等式

$$\forall u\in\mathcal{N}\,\forall m\in\mathbb{N}\,\forall n\in\mathbb{N}\,((H(u)(m))(n)=u(g(m,n)))$$

所确定的递归拓扑同胚映射 $H:\mathcal{N}\ni u\mapsto H(u)\in\mathcal{N}^\omega$. 在理论 $\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}_\omega$ 的基础上, 我们有

$$(\forall m\,\exists z\,\forall n\ ((x\restriction_n,m,z\restriction_n,n)\in R))\leftrightarrow(\exists u\,\forall m\,\forall n\ ((x\restriction_n,m,(H(u)(m))\restriction_n,n)\in R)).$$

这样实现了将量词 $\forall m\,\exists z$ 对等地交换成 $\exists u\,\forall m$.

接下来, 我们需要将 $\forall m \forall n$ 融合成一个 $\forall k$. 设 $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和 $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为配对函数 g 的左、右逆函数：若 $g(m,n) = k$, 则 $\alpha(k) = m, \beta(k) = n$, 即

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (g(\alpha(k), \beta(k)) = k).$$

应用这两个函数, 我们有：对于 $x \in \mathcal{N}$,

$$x \in (\forall m\, A) \leftrightarrow \left(\exists u \forall k\ \left(\left(x \restriction_{\alpha(k)}, \beta(k), (H(u)(\beta(k))) \restriction_{\alpha(k)}, \alpha(k)\right) \in R\right)\right).$$

断言　存在一个 a 之上的递归集合 $R' \subset \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega} \times \mathbb{N}$ 来实现下述对等式：对于任意的 $u, x \in \mathcal{N}$, 都有

$$(\forall k\ (x \restriction_k, u \restriction_k, k) \in R') \leftrightarrow \left(\forall k\ \left(\left(x \restriction_{\alpha(k)}, \beta(k), (H(u)(\beta(k))) \restriction_{\alpha(k)}, \alpha(k)\right) \in R\right)\right).$$

我们将这个断言的证明留作练习.

这样, $\forall m\, A$ 就是一个 $\Sigma^1_1(a)$ 关系, 因为对于 $x \in \mathcal{N}$, 都有

$$x \in (\forall m\, A) \leftrightarrow (\exists u \forall k\ (x \restriction_k, u \restriction_k, k) \in R'). \qquad \square$$

由引理 I.3.19 我们得知存在通用 $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合. 这个引理可以有下述加强版本：

引理 3.2　对于每一个 $1 \leqslant n < \omega$, 都有一个作为通用 $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合的简体 Σ^1_n 集合 $U_n \subset \mathcal{N}^2$.

证明　由引理 I.3.15 和引理 I.3.19 的证明, 事实上我们得到一个通用 Σ^0_1 集合 U_1, 并且这个 Σ^1_1 集合还是一个通用 $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合; 在它的基础上, 我们递归地得到一系列的 Σ^1_n 集合 U_n, 并且它们都分别是通用 $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合. $\square$

3.1.2　余解析集合

在这一小节里, 我们应用 3.1.1 小节中得到的解析集树表示来对余解析集进行分析. 这里的分析将为后面揭示余解析集的完备子集特性与大基数的关联奠定基础.

根据贝尔空间上闭子集的树表示定理 (定理 I.3.26), 每一个闭集都是树 $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leqslant)$ 的某棵子树的无穷树枝的集合; 再根据解析集合的特征引理 (引理 I.3.17), 每一个解析集都是一个闭集的投影. 将这两个结论整合起来, 便可以得到解析集合与余解析集合的新的特征定理：有限序列树的无穷树枝的存在与否.

解析集树表示

先将一维树 $(\mathbb{N}^{<\omega}, \leqslant)$ 概念推广到高维树 $\left((\mathbb{N}^{<\omega})^k, \leqslant\right)$ 概念. 注意, 在讨论实数子集性质的时候, 我们的树关系是**向下**的, 不是向上的.

定义 3.2 设 $1 \leqslant k < \omega$.

(1) 令 $\mathrm{Seq} = \mathbb{N}^{<\omega}$, 以及

$$\mathrm{Seq}_k = \left\{ (s_1, \cdots, s_k) \in \left(\mathbb{N}^{<\omega}\right)^k \;\middle|\; \mathrm{dom}\,(s_1) = \cdots = \mathrm{dom}\,(s_k) \right\}.$$

Seq_k 是笛卡尔乘积空间 $(\mathbb{N}^{<\omega})^k$ 中的那些各分量具有相同长度的序列的全体构成的集合.

(2) 对于 $s = (s_1, \cdots, s_k) \in \mathrm{Seq}_k$ 和 $t = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathrm{Seq}_k$, 定义

$$s \leqslant_k t \leftrightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant k \ \left(s_i = (t_i) \restriction_{\mathrm{dom}(s_i)}\right).$$

(3) 称 $T \subseteq \mathrm{Seq}_k$ 是一棵 k-维树当且仅当

$$\forall (s_1, \cdots, s_k) \in T \, \forall n \leqslant \mathrm{dom}\,(s_1) \ (s_1 \restriction_n, \cdots, s_k \restriction_n) \in T.$$

也就是说, T 关于 $\leqslant_k$ 是前段封闭的:

$$\forall t \in T \, \forall s \in \mathrm{Seq}_k \ (s \leqslant_k t \to s \in T).$$

(4) 对于一棵 k-维树 T, 令

$$[T] = \left\{ (a_1, \cdots, a_k) \in \mathcal{N}^k \;\middle|\; \forall n < \omega \ (a_1 \restriction_n, \cdots, a_k \restriction_n) \in T \right\}.$$

(5) 称一棵 k-维树 T 是一棵**有秩树**当且仅当 $[T] = \varnothing$; 称一棵 k-维树 T 是一棵**无秩树**当且仅当 $[T] \neq \varnothing$.

(6) 设 T 是一棵 $(k+1)$-维树, 以及 $x \in \mathcal{N}$. 令

$$T(x) = \left\{ (s_1, \cdots, s_k) \in \mathrm{Seq}_k \;\middle|\; \left(x \restriction_{\mathrm{dom}(s_1)}, s_1, \cdots, s_k\right) \in T \right\}.$$

引理 3.3 设 $1 \leqslant k < \omega$.

(1) 如果 $T \subset \mathrm{Seq}_k$ 是一棵 k-维树, 那么 $[T]$ 是 $\mathcal{N}^k$ 的一个闭子集; 反之, 若 $F \subseteq \mathcal{N}^k$ 是一个闭子集, 那么必有一棵 k-维树 T 来实现 $A = [T]$.

(2) $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个解析集合的充分必要条件是有一棵 2-维树 $T \subseteq \mathrm{Seq}_2$ 来实现等式 $A = \mathrm{TY}([T])$, 从而

$$\forall x \in \mathcal{N} \, (x \in A \leftrightarrow T(x) \text{ 是一棵无秩树}).$$

更一般地, 若 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个 $\Sigma^1_1(a)$ 集合, R 是 a 上的一个递归集合,

$$\forall x \in \mathcal{N} \ (x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N} \, \forall n < \omega \ (x \restriction_n, y \restriction_n) \in R),$$

令

$$T=\{(t,s)\in \mathrm{Seq}_2 \mid \forall n\leqslant \mathrm{dom}(s)\ (t\restriction_n, s\restriction_n)\in R\},$$

那么 T 是一棵在 a 上的 2-维递归树, 并且

$$\forall x\in\mathcal{N}\,(x\in A\leftrightarrow T(x)\text{ 是一棵无秩树}).$$

反之, 如果有 a 上的一棵 2-维递归树 T 来实现 $A=p[T]$, 那么 A 必是一个 $\Sigma^1_1(a)$ 集合.

证明　(练习.) □

树表示引理的一个应用

应用上述解析集的树表示引理 (引理 3.3), 我们来给出解析集具有开区分特性定理 (定理 I.3.32) 的第二个证明:

如果 $A\subset\mathbb{R}$ 是一个解析集, 那么 A 具有开区分特性.

回顾一下开区分特性的定义 (定义 I.3.35).

设 $X\subseteq\mathbb{R}$ 非空. 将 $[X]^2$ 与实平面 $\mathbb{R}$ 中主对角线上面的点等同起来, 即

$$[X]^2=\{(a,b)\mid a\in X\ \wedge\ b\in X\ \wedge\ a<b\}.$$

称 $K\subset[X]^2$ 为一个相对开集当且仅当存在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个开集 B 来实现等式 $K=B\cap[X]^2$.

应用开–闭–整齐子集的术语, 一个集合 $X\subset\mathbb{R}$ 具有开区分特性当且仅当对于任意相对开集 $K\subset[X]^2$ 而言, 要么 X 包含一个完备开整齐子集, 要么 X 是可数个闭整齐子集的并.

证明　不失一般性, 我们对贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的解析子集来证明定理. 设 $A\subset\mathcal{N}$ 为一个解析集合. 令 $T\subset\omega^{<\omega}\times\omega^{<\omega}$ 为 A 的一棵表示树, 即 $A=p[T]$.

设 K 是 $[A]^2$ 的一个相对开子集. 假设 A 不是可数个闭整齐子集的并. 我们来寻找 A 的一个完备开整齐子集.

对于 $(s,t)\in T$, 令

$$T_{(s,t)}=\{(s',t')\in T\mid (s',t')\leqslant(s,t)\ \vee\ (s,t)\leqslant(s',t')\}.$$

这是 T 的由节点 (s,t) 所确定的一棵子树.

对于 $(s,t)\in T$, 令 $(s,t)\in T'$ 当且仅当 $p\left[T_{(s,t)}\right]$ 不是可数个闭整齐子集的并.

对于 $(s,t)\in T'$, 令 $T'_{(s,t)}=T'\cap T_{(s,t)}$.

断言一　如果 $(s,t)\in T'$, 那么 $p\left[T'_{(s,t)}\right]$ 不是可数个闭整齐子集的并.

假设不然. 设 $(s,t)\in T'$ 为一个反例, 即 $p\left[T'_{(s,t)}\right]$ 是可数个闭整齐子集的并. 对于 $(\sigma,\tau)\in\left(T_{(s,t)}-T'\right)$, $p\left[T_{(\sigma,\tau)}\right]$ 是可数个闭整齐子集的并. 对于 $x\in p\left[T_{(s,t)}\right]$, 或者 $x\in p\left[T'_{(s,t)}\right]$, 或者

$$\exists(\sigma,\tau)\in\left(T_{(s,t)}-T'\right)\ \left(x\in p\left[T_{(\sigma,\tau)}\right]\right).$$

因此, $p\left[T_{(s,t)}\right]$ 是可数个闭整齐子集的并. 可是, $(s,t)\in T'$. 这是一个矛盾.

断言二 如果 $(s,t)\in T'$, 那么 $T'_{(s,t)}$ 中必有满足下述要求的两个节点 (s_0,t_0) 和 (s_1,t_1):

$$s_0\perp s_1\ \wedge\ p\left[T_{(s_0,t_0)}\right]\times p\left[T_{(s_1,t_1)}\right]\subset K.$$

为此, 设 $(s,t)\in T'$. 由于 $p\left[T'_{(s,t)}\right]$ 不是可数个闭整齐子集的并, 必有

$$x_0,x_1\in p\left[T'_{(s,t)}\right]$$

满足下述要求: $x_0\neq x_1\wedge\{x_0,x_1\}\in K$. 由于 K 是相对开子集, 令 $n<\omega$ 足够大以至于 $x_0\restriction_n\perp x_1\restriction_n$, 并且

$$\forall x\,\forall y\ ((x\in A\ \wedge\ y\in A\ \wedge\ x\restriction_n=x_0\restriction_n\ \wedge y\restriction_n=x_1\restriction_n)\to\{x,y\}\subset K).$$

令 $s_0=x_0\restriction_n$ 以及 $s_1=x_1\restriction_n$. 因为 $x_0,x_1\in p\left[T'_{(s,t)}\right]$, 令 t_0,t_1 满足

$$(s_0,t_0)\in T'_{(s,t)}\ \wedge\ (s_1,t_1)\in T'_{(s,t)}.$$

这样, $p\left[T_{(s_0,t_0)}\right]\times p\left[T_{(s_1,t_1)}\right]\subset K$.

由于 T' 非空, 应用断言二以及递归定义, 我们就可以得到一棵完备子树

$$T^*\subset\omega^{<\omega}$$

来实现下述不等式: $[T^*]\subset p[T]\ \wedge\ [[T^*]]^2\subset K$. □

余解析集规范形式

现在我们回到本小节的重点上来. 根据上面的解析集表示引理 (引理 3.3), 我们立即得到下述余解析集的表示定理: Π^1_1-规范形式定理.

定理 3.1 (Π^1_1-规范形式) (1) $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个简体 Π^1_1 集合的充分必要条件是存在一棵 2-维递归树 $T\subseteq\mathrm{Seq}_2$ 以至于映射 $\mathcal{N}\ni x\mapsto T(x)\subseteq\mathrm{Seq}$ 是一个递归映射, $T(x)\subseteq\mathrm{Seq}_1$ 是一棵 x 之上的递归树, 并且

$$\forall x\in\mathcal{N}\,(x\in A\leftrightarrow T(x)\text{ 是一棵有秩树}).$$

(2) 更一般地, 对于 $1 \leqslant k < \omega$, $\mathcal{N}^k$ 的一个子集合 A 是一个简体 Π_1^1 集合的充分必要条件是存在一棵 $(k+1)$-维递归树 $T \subseteq \mathrm{Seq}_{k+1}$ 以至于映射

$$\mathcal{N}^k \ni \vec{x} \mapsto T(\vec{x}) \subseteq \mathrm{Seq}_k$$

是一个递归映射, $T(\vec{x}) \subseteq \mathrm{Seq}_1$ 是一棵 $\vec{x}$ 之上的递归树, 并且

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{N}^k \ (\vec{x} \in A \leftrightarrow T(\vec{x}) \text{ 是一棵有秩树}).$$

自然, 这个定理的结论可以相对化到每一个实数参数 $a \in \mathcal{N}$.

余解析集的这种规范形式的一个重要并且很有用的推论就是它们的对于足够强的集合理论的传递模型而言的内外一致性 (绝对不变性).

定理 3.2　设 T_0 是一个足够强的集合理论以至于下述命题是 T_0 的一个定理:

每一个有秩树都有一个赋秩函数.

如果 P 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 性质, $M \models T_0$ 是一个传递模型, 并且 $a \in M$, 那么 P 相对于 M 而言就是一种内外一致的性质.

证明　给定 P, a, M 如定理的条件所示. 设 $T \in M$ 是一棵定义 P 的树:

$$P = \{x \in \mathcal{N} \mid T(x) \text{ 是一棵无秩树}\}.$$

设 $x \in \mathcal{N} \cap M$. 如果 $M \models T(x)$ 是无秩树, 那么 $T(x)$ 在 M 中的无穷树枝在 V 中依旧是一根无穷树枝, 所以在 V 中, $T(x)$ 也是一棵无秩树; 如果 $M \models T(x)$ 是有秩树, 那么在 M 中, $T(x)$ 有一个赋秩函数 $\rho : T(x) \to \mathrm{Ord}$, 因为 $M \models T_0$. 此 ρ 在 V 中依旧是 $T(x)$ 的一个赋秩函数, 所以, $T(x)$ 在 V 中还是有秩树. □

完全余解析集

现在我们回过来对两个特殊的 Π_1^1 集合展开分析.

定义 3.3　(1) 对于 $x \in \mathcal{N}$, 令 $E_x \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 由下述关系式确定:

$$\forall m \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, ((m, n) \in E_x \leftrightarrow x(\Gamma(m, n)) = 0),$$

其中 $\Gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ 是任意固定的一个递归配对双射; 称 x **记录关系** E_x.

(2) $\mathrm{WF} = \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ 记录一个有秩关系}\}$; 对于 $x \in \mathrm{WF}$, 令

$$\|x\| = \text{它所记录的有秩关系 } E_x \text{ 的高度}.$$

(3) $\mathrm{ZX} = \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ 记录 } \mathbb{N} \text{ 上的一个秩序}\} = \{x \in \mathcal{N} \mid E_x \in \mathrm{Wo}(\mathbb{N})\}$; 对于 $x \in \mathrm{ZX}$, 令

$$\|x\| = \mathrm{ot}(\mathbb{N}, E_x).$$

(4) $\mathrm{LO} = \{x \in \mathcal{N} \mid x \text{ 记录 } \mathbb{N} \text{ 上的一个线性序}\}$.

因为 ZX $\subset$ WF, 所以

$$\forall \omega \leqslant \alpha < \omega_1 \, \exists x \in \mathrm{ZX} \, (\|x\| = \alpha),$$

以及 $\forall x \in \mathrm{WF}, (\|x\| \in \omega_1)$.

引理 3.4 集合 LO 是一个算术集合; 集合 WF 与 ZX 都是 Π_1^1 集合.

证明 我们将验证 LO 是一个算术集合的工作留作练习. 由于 $\mathrm{ZX} = \mathrm{WF} \wedge \mathrm{LO}$, 根据引理 3.1, 如果 WF 是 Π_1^1 集合, 那么 ZX 也是. 所以, 关键是验证 WF 是 Π_1^1 集合.

我们知道 E_x 是一个有秩关系的充分必要条件是不存在 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 来满足

$$\forall n < \omega \, (f(n+1), f(n)) \in E_x.$$

于是, 对于 $x \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{WF} &\leftrightarrow \forall z \in \mathcal{N} \, \exists k \in \omega \, ((z(k+1), z(k)) \notin E_x) \\ &\leftrightarrow \forall z \in \mathcal{N} \, \exists k \in \omega \, (x(\Gamma(z(k+1), z(k))) \neq 0). \end{aligned}$$

令

$$A = \{(x, z) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \exists k \in \omega \, (x(\Gamma(z(k+1), z(k))) \neq 0)\}.$$

那么 A 是一个算术关系:

$$\begin{aligned} &(x, z) \in A \leftrightarrow \\ &\exists n \in \omega \, \exists m \in \omega \, \exists i \in \omega \, \exists j \in \omega \, \exists k \in \omega \left(\begin{array}{l} i = (z \restriction_n)(k+1) \wedge j = (z \restriction_n)(k) \wedge \\ m = \Gamma(i, j) \wedge (x \restriction_n)(m) \neq 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

于是, $\mathrm{WF} = \forall x \, A$. 根据引理 3.1, WF 便是一个 Π_1^1 集合. □

不仅如此, 集合 WF 和 ZX 的定义不可能进一步简化, 也就是说, 它们不可能是博雷尔集. 当然, 我们需要验证它们都不是 Σ_1^1 集合. 但是它们的任何秩有界部分都是博雷尔集合.

引理 3.5 对于每一个序数 $\alpha < \omega_1$, 下述秩有界子集都是博雷尔集合:

$$\mathrm{WF}_\alpha = \{x \in \mathrm{WF} \mid \|x\| \leqslant \alpha\}, \quad \mathrm{ZX}_\alpha = \{x \in \mathrm{ZX} \mid \|x\| \leqslant \alpha\}.$$

证明 先证 ZX_α 是博雷尔集. 注意集合

$$\{(x, n) \in \mathcal{N} \times \mathbb{N} \mid n \in (\mathrm{dom}\,(E_x) \cup \mathrm{rng}\,(E_x))\}$$

是一个算术集合, 因而是一个博雷尔集合. 对于 $\alpha < \omega_1$, 以及 $(x, n) \in \mathcal{N} \times \mathbb{N}$, 令

$$(x, n) \in B_\alpha \leftrightarrow E_x \text{ 限制在 } \{m \in \mathbb{N} \mid (m, n) \in E_x\} \text{ 上是一个序型不超过} \alpha \text{的秩序}.$$

对 $\alpha < \omega_1$ 施归纳, 我们来验证 B_α 是博雷尔集合.

当 $\alpha = 0$ 时, $(x,n) \in B_0 \leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}\,(x(\Gamma(m,n)) \neq 0)$, 所以, B_0 是一个算术集合.

设 $0 < \alpha < \omega_1$, 并且假设 $\forall \beta < \alpha, B_\beta$ 是博雷尔集合. 于是 $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta$ 是博雷尔集合. 由此得到 B_α 也是博雷尔集合, 因为

$$(x,n) \in B_\alpha \leftrightarrow \left(\forall m \in \omega \left((m,n) \in E_x \to (x,m) \in \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta\right)\right).$$

因此, 每一个 ZX_α 都是博雷尔集合, 因为

$$x \in \mathrm{ZX}_\alpha \leftrightarrow \left(\forall n \in \omega \left(n \in (\mathrm{dom}\,(E_x) \cup \mathrm{rng}\,(E_x)) \to (x,n) \in \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta\right)\right).$$

再来看看 WF_α. 首先, 对于任意的二元关系 E, 都可以如下定义 E 的赋秩函数 ρ_E:

$$\begin{aligned}&\rho_E(u) = \alpha \leftrightarrow \\ &((\forall v\ ((v,u) \in E \to \exists \beta < \alpha\, \rho_E(v) = \beta)) \wedge \alpha = \sup\{\,\rho_E(v) + 1 \mid (v,u) \in E\}).\end{aligned}$$

其次, 在此基础上, 对于 $\alpha < \omega_1$, 令

$$C_\alpha = \{(x,n) \in \mathcal{N} \times \mathbb{N} \mid \exists \beta \leqslant \alpha\ (\rho_{E_x}(n) = \beta)\}.$$

对 $\alpha < \omega_1$ 施归纳, 我们来验证 C_α 是博雷尔集合. 当 $\alpha = 0$ 时, C_0 是一个算术集合. 假设对于 $\beta < \alpha$ 集合 B_β 是博雷尔集合. 那么 C_α 就是博雷尔集合, 因为

$$(x,n) \in C_\alpha \leftrightarrow \forall m \in \omega \left((m,n) \in E_x \to (x,m) \in \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\right).$$

于是, 每一个 C_α 都是博雷尔集合. 据此我们得到每一个 WF_α 都是博雷尔集合, 因为

$$x \in \mathrm{WF}_\alpha \leftrightarrow \forall n < \omega \left(n \in (\mathrm{dom}\,(E_x) \cup \mathrm{rng}\,(E_x)) \to (x,n) \in \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta\right). \qquad \square$$

推论 3.1　设 $\alpha < \omega_1$. 那么

(1) 集合 $\{x \in \mathrm{WF} \mid \|x\| = \alpha\}$ 以及集合 $\{x \in \mathrm{WF} \mid \|x\| < \alpha\}$ 都是博雷尔集合;

(2) 集合 $\{x \in \mathrm{ZX} \mid \|x\| = \alpha\}$ 以及集合 $\{x \in \mathrm{ZX} \mid \|x\| < \alpha\}$ 都是博雷尔集合.

证明 $\{x\in\mathrm{WF} \mid \|x\| < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{WF}_\beta$, 以及 $\{x\in\mathrm{ZX} \mid \|x\| < \alpha\} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{ZX}_\beta$. □

接下来我们证明这两个 Π_1^1 集合具有很好的典型特性: 每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合可以经由一个连续函数归结到它们上来, 也就是说, 它们在所有的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合中具备最高的复杂性, 也因此称它们为 $\mathbf{\Pi}_1^1$-**完全**集合.

定理 3.3 (完全性) 如果 C 是一个黑体 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合, 那么一定有一个连续函数 $f:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 将 C 归结到 WF 上去, 即 $C = f^{-1}[\mathrm{WF}]$; 也一定有一个连续函数 $g:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 将 C 归结到 ZX 上去, 即

$$C = g^{-1}[\mathrm{ZX}].$$

证明 只对 WF 证明归结定理, 将类似的有关 ZX 的证明留给读者去品味.

设 C 是一个 $\Pi_1^1(a)$ 集合. 根据规范形式定理 (定理 3.1) 的参数化结论, 令 $T\subseteq \mathrm{Seq}_2$ 为一棵在 a 之上的递归树来表示 C:

$$\forall x\in\mathcal{N}\,(x\in C\leftrightarrow T(x)\,\text{没有无穷树枝}).$$

令

$$\{t_0, t_1, \cdots, t_n, \cdots\} = \mathrm{Seq}$$

为 Seq 的一个递归单一列表. 对于 $x\in\mathcal{N}$, 令 $y = f(x)$ 为依据下述等式所确定的 y: 对于 $m, n\in\mathbb{N}$,

$$y(\Gamma(m,n)) = \begin{cases} 0 & \text{若 } t_m\in T(x)\wedge t_n\in T(x)\wedge t_m < t_n, \\ 1 & \text{若 } (\neg(t_m\in T(x)\wedge t_n\in T(x)\wedge t_m < t_n)), \end{cases}$$

其中 $\Gamma:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是定义 3.3 中所固定的递归配对双射. 根据定义可见由 y 所记录的关系 E_y 与树 $(T(x),\leqslant)$ 同构, 因此, $y\in\mathrm{WF}$ 当且仅当 $T(x)$ 没有无穷树枝. 因此, 对于 $x\in\mathcal{N}$,

$$x\in C\leftrightarrow T(x)\,\text{没有无穷树枝}\leftrightarrow f(x)\in\mathrm{WF}.$$

我们还需要证明 f 是连续函数. 这由下述结论立即给出: 依据 $T(x)$ 的定义, 我们有

$$\forall s\in 2^{<\omega}\,\exists t\in\mathrm{Seq}\,((t\subset x\wedge y = f(x))\to y\restriction_{\mathrm{dom}(s)} = s).$$

因此, f 是连续的. □

根据这个归结定理, 我们就得到集合 WF 和 ZX 不是 Σ_1^1 集合, 因此也就不是博雷尔集合.

推论 3.2 WF 不是 Σ_1^1; ZX 也不是 Σ_1^1.

证明　否则, 每一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合就都连续地归结到一个 Σ^1_1 集合; 而任何解析集合在连续函数作用下的逆像集合都还是解析集合; 可是又存在着不是解析集合的余解析集合. 这就会是矛盾. □

推论 3.3 (有界性引理)　*如果 $B \subset \mathrm{ZX}$ 是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 子集, 那么*

$$\exists\alpha < \omega_1\,\forall x \in B\,(\|x\| < \alpha).$$

证明　否则, 令 B 是一个反例, 我们就会有

$$\mathrm{ZX} = \{x \in \mathcal{N} \mid \exists z \in \mathcal{N}\ (z \in B\ \wedge\ \|x\| \leqslant \|z\|)\}.$$

从而对 $x, z \in \mathcal{N}$ 而言, $\|x\| \leqslant \|z\|$ 就意味着 $(z \notin \mathrm{ZX}\ \vee\ \|x\| \leqslant \|z\|)$; 而表达式

$$(z \notin \mathrm{ZX}\ \vee\ \|x\| \leqslant \|z\|)$$

是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 关系式. 因此, ZX 就是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合. 这与前面的推论 3.2 的结论不符. □

推论 3.4　*每一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合都是 $\aleph_1$ 个博雷尔集合之并.*

证明　设 C 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$. 令 $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为一个将 C 归结到 WF 的连续函数. 由等式

$$C = f^{-1}[\mathrm{WF}]\ \wedge\ \mathrm{WF} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{WF}_\alpha,$$

我们立即得到

$$C = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f^{-1}\left[\mathrm{WF}_\alpha\right].$$

而每一个 $f^{-1}\left[\mathrm{WF}_\alpha\right]$ 都是一个博雷尔集合的连续逆像, 所以都是博雷尔集合. □

由这个推论我们立即得到关于余解析集的势的结论:

推论 3.5　*假设选择公理成立. 那么每一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合之势或者至多可数, 或者为 $\aleph_1$, 或者为 $2^{\aleph_0}$.*

类似地, 每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合也是 $\aleph_1$ 个博雷尔子集的并:

引理 3.6　*每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合都是 $\aleph_1$ 个博雷尔子集的并.*

证明　设 A 为一个解析集. 令 $T \subseteq \mathrm{Seq}_2$ 为一棵 2-维树来实现等式 $A = p[T]$.

应用对 $\alpha < \omega_1$ 的归纳法, 我们有

$$\forall t \in \mathrm{Seq}\,\forall\alpha < \omega_1\ \big(\{x \in \mathcal{N} \mid \|T(x)/t\| \leqslant \alpha\}\ \text{是一个博雷尔集}\big).$$

事实上, $\{x \in \mathcal{N} \mid \|T(x)\| \leqslant 0\} = \big\{x \in \mathcal{N}\ \big|\ \big(x \restriction_{\mathrm{dom}(t)}, t\big) \notin T\big\}$ 是博雷尔集, 以及对于 $0 < \alpha < \omega_1$,

$$\|T(x)/t\| \leqslant \alpha \leftrightarrow \forall n < \omega\,\exists\beta < \alpha\ (\|T(x)/(t + \langle n\rangle)\| \leqslant \beta),$$

依归纳假设便得到所要的结论, 其中 $s = t + \langle n\rangle$ 是 t 到 $\mathrm{dom}(t)+1$ 的延伸：

$$s\restriction_{\mathrm{dom}(t)} = t \text{ 以及 } s(\mathrm{dom}(t)) = n.$$

对于 $\alpha < \omega_1$, 定义 B_α 如下：对于 $x \in \mathcal{N}$, 令

$$x \in B_\alpha \leftrightarrow ((\neg(\|T(x)\| < \alpha)) \wedge \forall t \in T(x)\,(\neg(\|T(x)/t\| = \alpha))).$$

根据上面的结论, 每一个 B_α 都是博雷尔集合. 我们现在来证明下面的等式：

$$A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha.$$

设 $x \in A$. 于是 $T(x)$ 是一棵无秩树, 所以 $\forall \alpha < \omega_1\,(\neg(\|T(x)\| < \alpha))$. 如果

$$\forall \alpha < \omega_1\,\exists t \in T(x)\,(\|T(x)/t\| = \alpha)$$

成立, 那么根据数数原则, 必有 $\alpha < \beta < \omega_1$ 以及 $t \in T(x)$ 来实现等式

$$\|T(x)/t\| = \alpha < \beta = \|T(x)/t\|.$$

这自然是矛盾的. 于是

$$\exists \alpha < \omega_1\,\forall t \in T(x)\,(\|T(x)/t\| \neq \alpha).$$

所以 $x \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$.

再设 $x \notin A$. 因而 $T(x)$ 是有秩树. 设 $\alpha < \omega_1$. 那么或者 $\|T(x)\| < \alpha$, 或者 $\|T(x)\| \geqslant \alpha$ 并且 $\exists t \in T(x)\,(\|T(x)/t\| = \alpha)$. 因此, $x \notin B_\alpha$. 这样, $x \notin \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. □

准秩序与标尺

利用树表示分析, 下面我们来进一步展示 $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 集合所持有的一些良好性质. 在此先引进一对有关实数子集合的重要概念：**范数**与**准秩序**.

定义 3.4 设 $A \subseteq \mathcal{N}$. 称定义在 A 上的在序数范围内取值的函数为 A 上的**一个范数**; 称 A 上的一个二元关系 $\preceq$ 为 A 上的**一个准秩序**当且仅当

(1) $\preceq$ 是传递的, 即 $\forall a, b, c \in A\,((a \preceq b \wedge b \preceq c) \rightarrow a \preceq c)$;

(2) $\preceq$ 是可比较的, 即 $\forall a, b \in A\,(a \preceq b \vee b \preceq a)$;

(3) 对于 $a, b \in A$, 令 $a \prec b \leftrightarrow a \preceq b \wedge (\neg(b \preceq a))$, 那么 $\prec$ 是一个有秩关系.

练习 3.1 揭示出如何引进准秩序的奥秘 (在选择公理缺失的世界里它可以发挥作用) 以及范数与准秩序之间的关联. 应用范数或者准秩序概念, 我们来证明每一个 Π^1_1 集合都有一个 Π^1_1-范数.

定理 3.4　对于每一个 Π^1_1 集合 A, 必有一个具备下述特点的 A 的范数 φ: 分别存在一个 Π^1_1 二元关系 P 和一个 Σ^1_1 二元关系 Q 来实现下述对等关系式:

$$\forall y \in A\, \forall x\, ((x \in A \wedge \varphi(x) \leqslant \varphi(y)) \leftrightarrow P(x,y) \leftrightarrow Q(x,y)).$$

(具备上述特点的范数称为一个 Π^1_1-范数; 借用这一术语, 定理便可简单地叙述为: 每一个 Π^1_1 集合都有一个 Π^1_1-范数; 进而简称为 Π^1_1 **准秩序性质**.)

Π^1_1 准秩序性质可以相对化: 每一个 $\Pi^1_1(a)$ 集合都有一个 $\Pi^1_1(a)$-范数 (其中的 P 和 Q 也都分别是 $\Pi^1_1(a)$ 和 $\Sigma^1_1(a)$).

证明　设 A 为一个 Π^1_1 集合. 令 T 为 $\omega \times \omega$ 上的一棵树以至于对于 $x \in \mathcal{N}$ 总有

$$x \in A \leftrightarrow T(x)\,\text{没有无穷树枝}.$$

对于 $x \in A$, 令 $\varphi(x) = \|T(x)\|$ 为有秩树 $T(x)$ 的高度 (这是一个可数序数). 这样定义的 φ 自然是 A 上的一个范数.

所需要的 Σ^1_1 二元关系 Q 定义如下：对于 $(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, 令

$$Q(x,y) \leftrightarrow \exists f\, (f : T(x) \to T(y) \wedge \forall s,t \in T(x)\, (s \leqslant t \to f(s) \leqslant f(t))).$$

如此定义的 Q 自然是一个 Σ^1_1 二元关系; 它之所以满足对等式的要求是因为如下命题成立 (证明留作练习)：

$$\text{存在从 } T(x) \text{ 到 } T(y) \text{ 的保序映射当且仅当} \begin{pmatrix} \text{或者 } T(y) \text{ 有一根无穷树枝}, \\ \text{或者} \|T(x)\| \leqslant \|T(y)\| \end{pmatrix}.$$

所需要的 Π^1_1 二元关系 P 定义如下：对于 $(x,y) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, 令

$$P(x,y) \leftrightarrow \\ \forall s \in (\mathrm{Seq} - \{\varnothing\}) \left(\neg \left(\exists f \begin{pmatrix} f : T(y) \to T(x)/s \wedge \\ \forall \sigma,\tau \in T(y)\, (\sigma \leqslant \tau \to f(\sigma) \leqslant f(\tau)) \end{pmatrix} \right) \right).$$

如此定义的 P 是一个 Π^1_1 二元关系; 它断言 $T(x)$ 是一个有秩树, 以及并非

$$\|T(y)\| < \|T(x)\|.$$

□

定理 3.4 所揭示的 Π^1_1 准秩序性质可以进一步得到加强. 为此我们需要引进另外一个重要概念：**标尺**.

在正式引进标尺概念之前, 让我们先转换一个角度重新审视 Π^1_1 集合的树表示：设 A 为一个 Π^1_1 集合. 令 U 为 $\omega \times \omega$ 上的一个递归树以至于它的投影就是 A, 即

$A = p[U]$. 那么对于 $x \in \mathcal{N}$ 总有

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow U(x) \text{ 是有秩的} \\ &\leftrightarrow \exists g\ (g : U(x) \to \omega_1 \wedge \forall s, t \in U(x)\,(s \subset t \to g(s) > g(t)))\,. \end{aligned}$$

令 $\langle u_n \mid n \in \omega \rangle = \mathrm{Seq}$ 为一个单一列表, 并且满足一个额外要求:

$$\forall n < \omega\ (\mathrm{dom}\,(u_n) \leqslant n)\,.$$

如下定义 $T \subset \omega^{<\omega} \times \omega_1^{<\omega}$:

$$(s, h) \in T \leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(h) \wedge \\ \forall m, n < \mathrm{dom}(s) \left(\begin{array}{l} \left(u_m \supset u_n \wedge \left(s \restriction_{\mathrm{dom}(u_m)}, h \restriction_{\mathrm{dom}(u_m)}\right) \in U\right) \\ \to h(m) < h(n) \end{array} \right) \end{array} \right).$$

如此定义的 T 是 $\omega \times \omega_1$ 上的一棵树, 并且

$$A = p[T] = \{x \in \mathcal{N} \mid \exists f\ (f : \omega \to \omega_1 \wedge \forall n < \omega\ (x \restriction_n, f \restriction_n) \in T)\}\,.$$

不仅如此, 而且对于 $x \in p[T]$, 树 $T(x)$ 的所有无穷树枝中有一根**最小**无穷树枝

$$g \in [T(x)],$$

即对于任意 $f \in [T(x)]$ 总有 $\forall n < \omega\,(g(n) \leqslant f(n))$. 事实上, 可以如下定义这根最小无穷树枝: 对于 $n < \omega$, 令

$$g_x(n) = \begin{cases} \rho_{U(x)}\,(u_n) & \text{如果 } u_n \in U(x), \\ 0 & \text{如果 } u_n \notin U(x). \end{cases}$$

由于 $x \in A \leftrightarrow U(x)$ 是有秩的, 所以对于 $x \in p[T]$, $\rho_{U(x)}$ 是最小的赋秩函数. 从而 $g_x \in [T(x)]$, 而且也是最小的无穷树枝.

于是, 对于 $x \in A$, 令 $g_x \in [T(x)]$ 为最小无穷树枝. 然后, 对于 $n < \omega$, 令 $\varphi_n : A \to \omega_1$ 为依下式确定的 A 的范数: $\forall x \in A\ \ (\varphi_n(x) = g_x(n))$. 如此定义的 A 的范数序列 $\langle \varphi_n \mid n < \omega \rangle$ 还具备如下强制收敛性质 (拓扑收敛加范数收敛): 如果 $\langle x_i \in A \mid i < \omega \rangle$ 收敛于 x, 即 $x = \lim\limits_{i \to \infty} x_i$, 并且对于每一个 $n < \omega$ 都有序列 $\langle \varphi_n(x_i) \mid i < \omega \rangle$ 自某一个 i 之后都取常值序数 α_n, 那么 $x \in A$, 并且

$$\forall n < \omega\ (\varphi_n(x) \leqslant \alpha_n)\,.$$

将这些性质抽象出来, 我们引进标尺的概念:

定义 3.5 $A \subseteq \mathcal{N}$ 上的一根**标尺**是 A 上的一个具备下述强制收敛性质的范数序列 $\langle \varphi_n \mid n < \omega \rangle$: 如果 $\langle x_i \in A \mid i < \omega \rangle$ 收敛于 x, 即 $x = \lim_{i \to \infty} x_i$, 并且对于每一个 $n < \omega$ 都有序列 $\langle \varphi_n(x_i) \mid i < \omega \rangle$ 自某一个 i 之后取常值序数 α_n, 那么 $x \in A$, 并且 $\forall n < \omega \ (\varphi_n(x) \leqslant \alpha_n)$.

将上面关于 Π_1^1 的分析连同上面 Π_1^1 准秩序性质的证明综合起来, 我们得到下面的**标尺性质**: 每一个 Π_1^1 集合都有一根 Π_1^1 标尺.

定理 3.5 每一 Π_1^1 集合 A 上都配置着一根具备下述额外性质的标尺 $\langle \varphi_n \mid n < \omega \rangle$: 分别存在一个 Π_1^1 三元关系 P 和一个 Σ_1^1 三元关系 Q 来实现下述对等关系式:

$$\forall n < \omega \, \forall y \in A \, \forall x \ ((x \in A \wedge \varphi_n(x) \leqslant \varphi_n(y)) \leftrightarrow P(n, x, y) \leftrightarrow Q(n, x, y)) \, .$$

展示函数性质

应用 Π_1^1 标尺性质, 我们可以证明下述**展示函数性质**. 我们知道对于非空集合 X 上的任何二元关系 $R \subseteq X^2$, 应用选择公理, 一定可以在 R 中画出一个与 R 具有相同定义域的函数图形来. 对于关注可定义性的人们来说, 总希望做得更好些: 如果一个二元关系是足够简单的, 那么即使在选择公理缺失的前提下, 是否总能够画出一个同定义域的函数图形来? 下面近藤基吉[1] 的展示函数定理表明 Π_1^1 二元关系具备 Π_1^1 展示函数.

定义 3.6 一个集合 $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ **携带一个展示函数** F 当且仅当 $F \subseteq R$, F 是一个函数, 并且 $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(R)$.

定理 3.6 (展示函数定理) 每一个 Π_1^1 二元关系 $A \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 都携带一个 Π_1^1 展示函数. 简而言之, Π_1^1 集合具有**展示函数性质**[2].

我们来证明展示函数定理的一个特殊情形, 而将一般的证明留给读者去发挥.

命题 3.1 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 为一个非空的 Π_1^1 集合. 那么 A 必有一个 Π_1^1 单点子集 $\{a\} \subset A$.

证明 设 $A \subset \mathcal{N}$ 为非空的 Π_1^1 集合. 应用定理 3.5, 令 $\langle \varphi_n \mid n < \omega \rangle$ 为配置在 A 上的一根 Π_1^1 标尺. 我们依照下述过程来寻找所需要的 $a \in A$:

令 $A_0 = A$; 以及对于 $n < \omega$, 令

$$A_{2n+1} = \left\{ x \in A_{2n} \mid \varphi_n(x) \text{是最小的} \right\},$$

$$A_{2n+2} = \left\{ x \in A_{2n+1} \mid x(n) \text{是最小的} \right\}.$$

这样我们定义了一个 $\supset$- 单调下降的序列 $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$. 它们的交至多包含一个元素. 对 $i < \omega$, 令 $x_i \in A_{2i+2}$. 那么这是一个收敛序列: 令

---

1 Motokiti Kondô.

2 Uniformization property of Π_1^1.

$a=\lim\limits_{i\to\infty}x_i$. 对于每一个 $n<\omega$, 序列

$$\langle\varphi_n(x_i)\mid i<\omega\rangle$$

自某个 i 之后必为一个常值. 根据标尺的定义 3.5, $a\in A$, 于是 $\{a\}=\bigcup\limits_{n<\omega}A_n$.

根据定理 3.5, 我们得知 $\{a\}$ 是一个 Π_1^1 集合. □

推论 3.4 以及引理 3.6 表明每一个解析集或者余解析集都是 $\aleph_1$ 个博雷尔集之并. 那么一个自然的问题就是对于 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 集合而言是否也会有这样的结论? 后面我们会将注意力转向 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 集合以期解答这个问题.

目前我们希望应用 WF 这个具体的 Π_1^1 集合来建立起投影集层次与模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)$ 上可定义的实数子集之间的对应关系. 这样的结论自然有趣, 因为它就如同一座桥梁将涉及实数的貌似不相干的拓扑概念与逻辑概念紧密地联结起来.

引理 3.7　贝尔空间 $\mathcal{N}$ 的一个子集 A 是一个 Σ_2^1 集合当且仅当它在模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)$ 上是一个 Σ_1 可定义的集合. 因此, 对于 $1\leqslant n<\omega$, $A\subseteq\mathcal{N}$ 是 Σ_{n+1}^1 当且仅当它在模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)$ 上是一个 Σ_n 可定义的集合.

证明　设 A 在模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)$ 上是一个 Σ_1 可定义的集合. 令 $\varphi(v_1,v_2)$ 为一个彰显自由变元的 Σ_0 表达式来实现对等式:

$$x\in A\leftrightarrow(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)\models\exists u\,\varphi(u,x)\leftrightarrow\exists u\in\mathscr{H}_{\omega_1}\ (\mathscr{H}_{\omega_1},\in)\models\varphi[u,x].$$

注意, 根据相关选择原理, 对于 $x,u\in\mathscr{H}_{\omega_1}$, $\mathcal{TC}(\{,x,u\})$ 是一个可数传递集合, 所以 $\mathcal{TC}(\{x,u\})\in\mathscr{H}_{\omega_1}$. 由于 $\varphi[u,x]$ 是一个 Σ_0 语句, 它在 $\mathcal{TC}(\{x,u\})$ 与 $\mathscr{H}_{\omega_1}$ 之间是真相绝对不变的. 因此, 我们有下述对等式:

$$x\in A\leftrightarrow\exists\text{一个可数传递集合}\,M\,\exists u\in M\,(x\in M\ \wedge\ (M,\in)\models\varphi[u,x]).$$

因为 “M 是一个可数传递集合” 与 “E 是一个自同一的有秩关系, π_E 是 E 的传递化映射, M 是 E 的传递化” 是逻辑上对等的两个语句, 所以我们就有下述对等式:

$$x\in A\leftrightarrow\left(\begin{array}{l}\exists\omega\text{ 上的一个自同一有秩关系 }E\text{ 以至于}\\ \exists n\in\omega\,\exists m\in\omega\,(\pi_E(m)=x\ \wedge\ (\omega,E)\models\varphi[n,m])\end{array}\right),$$

其中, $\pi_E:(\omega,E)\cong(M,\in)$ 为典型传递化映射. 应用定义 3.3 中以实数记录有秩关系的记号以及 WF 的定义, 我们得到下述对等式:

$$x\in A\leftrightarrow\exists z\in\mathcal{N}\left(\begin{array}{l}z\in\mathrm{WF}\ \wedge\ (\omega,E_z)\models\text{同一律}\ \wedge\\ \exists n\in\omega\,\exists n\in\omega\ (\pi_{E_z}(m)=x\ \wedge\ (\omega,E_z)\models\varphi[n,m])\end{array}\right).$$

上述对等式的右端表达式中有一个等式 $\pi_E(m)=x$ 和两个模型满足表达式 $(\omega,E_z)\models$ 同一律, 以及 $(\omega,E_z)\models\varphi[n,m]$. 我们需要确定它们的形式复杂性: 它们都是以 E 为参数的算术表达式.

令 $E = E_z$. 表达式 "$(\omega, E) \models$ 同一律" 事实上就是下述表达式:

$$\forall i \in \omega \, \forall j \in \omega \, (i = j \leftrightarrow \forall k \in \omega \, ((k, i) \in E \leftrightarrow (k, j) \in E)).$$

用 Σ_0 表达式 $\varphi(v_1, v_2)$ 的复杂性的归纳法就能验证表达式 "$(\omega, E) \models \varphi[n, m]$" 是以 E 为参数的算术表达式. 我们将详细验证留给读者. 剩下的是验证传递化等式是一个以 E 为参数的算术表达式: 设 $k \in \omega$. 那么

$$\pi_E(m) = k \leftrightarrow \exists t \in \mathrm{Seq} \begin{pmatrix} \mathrm{dom}(t) = k + 1 \wedge m = t(k) \wedge (\omega, E) \models t(0) = \varnothing \\ \wedge \forall i < k \, (\omega, E) \models (t(i+1) = t(i) \cup \{t(i)\}) \end{pmatrix}.$$

对于 $x \subseteq \omega$, 我们有

$$\pi_E(m) = x \leftrightarrow \forall n \in \omega \, \left((n, m) \in E \leftrightarrow \pi_E(n) \in x\right).$$

对于 $x \in \mathcal{N}$, 类似的以 E 为参数的算术表达式就由读者写出来.

这样, A 的确是 Σ^1_2.

反过来, 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个 Σ^1_2 集合. 令 $P(y, x)$ 为一个 Π^1_1 性质来实现下述等式:

$$A = \{x \in \mathcal{N} \mid \exists y \in \mathcal{N} \, P(y, x)\}.$$

根据定理 3.2, $x \in A$ 当且仅当存在足够强的可数传递模型 $M \ni x$ 来见证

$$\exists y \in M \, (M, \in) \models P(y, x).$$

这样的 $M \in \mathscr{H}_{\omega_1}$, 而上述的充要条件是一个 Σ_1 表达式.

这就证明了引理的第一个命题: 当 $n = 1$ 时. 引理的第二个结论由归纳法而得. □

3.1.3　$\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合

前面关于 Π^1_1 和 Σ^1_1 集合的树特征定理很自然地可以推广, 因为我们所考虑的树都是以自然数乘积空间上的有限序列为节点的树. 这不应当是事物的全部, 因为我们手头还有许许多多取之不尽用之不竭的无穷序数. 事实上, 正像我们已经在引入标尺和建立 Π^1_1 集合的 Π^1_1 标尺性质时已经经历了的那样, Π^1_1-规范形式定理已经为我们提供了利用 ω_1 来对 $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合实现树表示的可能, 因为每一个可数有秩树的高度都是一个可数序数. 现在我们就来探讨一种包含 $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合在内的自然推广.

定义 3.7　设 X 是一个非空集合.

(1) 对于 $s, t \in X^{<\omega}$, 令 $s \leqslant t \leftrightarrow \left(\mathrm{dom}(s) \leqslant \mathrm{dom}(t) \wedge s = t \restriction_{\mathrm{dom}(s)}\right)$; 以及令 $s + t$ 是 X 上的由下式计算出来的有限序列: $\mathrm{dom}(s + t) = \mathrm{dom}(s) + \mathrm{dom}(t)$, 以及

对于 $i < \mathrm{dom}(s+t)$ 都有

$$(s+t)(i) = \begin{cases} s(i) & \text{当 } i < \mathrm{dom}(s) \text{ 时}, \\ t(i-\mathrm{dom}(s)) & \text{当 } \mathrm{dom}(s) \leqslant i < \mathrm{dom}(s+t) \text{ 时}. \end{cases}$$

(2) $T \subseteq X^{<\omega}$ 是 X 上的一棵树当且仅当 $\forall t \in T\, \forall n \leqslant \mathrm{dom}(t)\ (t\restriction_n) \in T$, 并且 T 继承 $X^{<\omega}$ 上的偏序 $\leqslant$.

(3) 对于 X 上的一棵树 T, 对于 $s \in T$, 令 $T/s = \{t \in X^{<\omega} \mid s+t \in T\}$.

(4) 如果 X 上的树 T 是一棵有秩树 (即它没有无穷树枝), 令 ρ_T 为 T 上的典型赋秩函数, 并且对于 $t \in T$, 称 $\rho_T(t)$ 为 t 在树 $(T,\leqslant)$ 上的秩; 以及令

$$\|T\| = \sup\{\rho_T(t)+1 \mid t \in T\}$$

为树 T 的高度.

(5) $[T] = \{f \in X^\omega \mid \forall n < \omega\ (f\restriction_n \in T)\}$.

关于有秩树之间的高低比较我们有下述引理. 注意, 这个引理的证明以及赋秩函数的存在性的证明用到相关选择原理.

引理 3.8 如果 S 和 T 都是非空集合 X 上的有秩树, 那么不等式 $\|S\| \leqslant \|T\|$ 成立的充分必要条件是存在从 S 到 T 的保序映射.

证明 充分性: 设 $f : S \to T$ 为一个保序映射. 设 ρ_S 和 ρ_T 分别为 S 和 T 的典型赋秩函数. 依据关于 $s \in S$ 的秩 $\rho_S(s)$ 的归纳法便可得到 $\|S\| \leqslant \|T\|$.

必要性: 我们对树的高度 $\|T\|$ 施归纳. 设 $\|S\| \leqslant \|T\|$. 对于每一个长度为 1 的节点 $\langle a\rangle \in S$, 有

$$\|S/\langle a\rangle\| < \|S\| \leqslant \|T\|,$$

因而 T 中必有一个非空节点 $t_a \in T$ 来实现不等式: $\|S/\langle a\rangle\| \leqslant \|T/\langle t_a\rangle\|$. 根据树高的归纳假设, 令 $f_a : S/\langle a\rangle \to T/\langle t_a\rangle$ 为一个保序映射. 依据这些保序映射, 如下定义 $f : S \to T$:

$$f(\varnothing) = \varnothing;\ \forall(\langle a\rangle + s) \in S\ \ (f(\langle a\rangle + s) = t_a + f_a(s)).$$

这样定义的 f 就是一个保序映射. □

推论 3.6 设 S 与 T 是非空集合 X 上的两棵树. 那么存在一个从 S 到 T 的保序映射当且仅当或者 T 有一根无穷树枝, 或者 $\|S\| \leqslant \|T\|$.

证明 设 $f : S \to T$ 是一个保序映射. 如果 T 有一根无穷树枝, 结论成立; 否则, T 是有秩的, 应用 T 的赋秩函数和保序映射, 得知 S 也是有秩的, 所以, 根据引理 3.8, $\|S\| \leqslant \|T\|$.

反之, 如果 T 有一根无穷树枝, 自然可以将 S 的每一层都映射到 T 的无穷树枝的某一个节点上以保持序关系, 从而存在从 S 到 T 的保序映射; 否则, 自有 S 和 T 都是有秩的并且 $\|S\| \leqslant \|T\|$. 由引理 3.8 就得到所要的保序映射. □

我们将 X 限制在一定范围内：比如 $X = \omega^k \times K$, 其中 $1 \leqslant k < \omega$, K 是某个携带某种秩序的集合. 令 $\mathrm{Seq}(K) = K^{<\omega}$. $T \subseteq \mathrm{Seq} \times \mathrm{Seq}(K)$ 是 $\omega \times K$ 上的一棵树当且仅当

$$\forall (s,t) \in T \ (\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) \wedge \forall i \leqslant \mathrm{dom}(s) \ (s\restriction_i, t\restriction_i) \in T).$$

对于 $\omega \times K$ 上的一棵树 T 以及 $x \in \mathcal{N}$, 令

$$T(x) = \left\{ t \in \mathrm{Seq}(K) \ \middle| \ \left(x\restriction_{\mathrm{dom}(t)}, t\right) \in T \right\},$$

那么 $T(x)$ 是 K 上的一棵树. 当 T 是 $\omega \times K$ 上的一棵树时, 令

$$\begin{aligned} p[T] &= \left\{ x \in \mathcal{N} \mid T(x) \text{ 有一根无穷树枝} \right\} \\ &= \{ x \in \mathcal{N} \mid [T(x)] \neq \varnothing \} \\ &= \{ x \in \mathcal{N} \mid \exists f \in K^\omega \, \forall n < \omega \ (x\restriction_n, f\restriction_n) \in T \}. \end{aligned}$$

称 $p[T]$ 是树 T 的投影集. $\omega^k \times K$ 上的树 T 及其投影集 $p[T]$ 也以类似的方式定义, 这里就不细说了. 当 K 是某个无穷基数 κ 时, 我们就更感兴趣一些.

定义 3.8 设 κ 是一个无穷基数. $\mathcal{N}$ 的一个子集合 A 是一个 **κ-苏斯林集合**当且仅当 A 是 $\omega \times \kappa$ 上的一棵树 T 的投影: $A = p[T]$.

例 3.1 如果 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个 $\Sigma_1^1(a)$ 集合, 那么 A 是 $\omega \times \omega$ 上的在 a 之上递归的树 T 的投影. 所以每一个解析集都是一个 ω-苏斯林集合.

下面的定理将例 3.1 推广到下一个层次上.

定理 3.7 每一个 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合都是一个 ω_1-苏斯林集合. 事实上, 如果 A 是 $\Sigma_2^1(a)$, 那么一定有一棵具备下述特性的 $\omega \times \omega_1$ 上的树 T:

(1) 树 T 在相对于实数 a 的可构造集论域 $L[a]$ 之中;

(2) $A = p[T]$.

注 结论中的 ω_1 是 V 中的第一个不可数基数, 它有可能大于 $L[a]$ 中的第一个不可数基数.

证明 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个 $\Sigma_2^1(a)$ 集合. 根据 $\Pi_1^1(a)$ 集合的规范形式定理 (定理 3.1), 令 $U \subseteq \mathrm{Seq}_3$ 为一棵在 a 之上递归的 3-维树来实现关系式:

$$\forall x \in \mathcal{N} \ (x \in A \leftrightarrow (\exists y \in \mathcal{N} \, \forall z \in \mathcal{N} \, \exists n \in \omega \ (x\restriction_n, y\restriction_n, z\restriction_n) \notin U)).$$

对等的说法就是

$$\forall x \in \mathcal{N} \ \left(x \in A \leftrightarrow \left(\exists y \in \mathcal{N} \, U(x,y) \text{ 是一棵有秩树}\right)\right).$$

一个可数偏序关系是有秩关系的充分必要条件就是它上面存在一个到 ω_1 中的保序映射. 因此, 对于 $x \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \exists f \left(\begin{array}{l} f : U(x,y) \to \omega_1 \wedge \\ \forall u \in U(x,y)\, \forall v \in U(x,y)\, (u \subset v \to f(v) < f(u)) \end{array} \right) \\ &\leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \exists f \, \left(f : \mathrm{Seq} \to \omega_1 \ \wedge\ f \restriction_{U(x,y)} \text{是保序映射}\right). \end{aligned}$$

令 $\langle u_n \mid n < \omega \rangle$ 为 Seq 的满足下述要求的递归单一列表：

$$\forall n < \omega \ (\mathrm{dom}\,(u_n) \leqslant n)\,.$$

对于 $f : \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{N} \to \omega_1$, 令 $D(f) = \{u_n \mid n \in \mathrm{dom}(f)\}$ 以及令 $f^* : D(f) \to \omega_1$ 为由下述等式所确定的函数：

$$\forall n \in \mathrm{dom}(f) \ (f^*\,(u_n) = f(n))\,.$$

经过这样一种迁移, 我们有：对于 $x \in \mathcal{N}$,

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}\, \exists f \, \left(f : \omega \to \omega_1 \ \wedge\ f^* \restriction_{U(x,y)} \text{是一个保序映射}\right).$$

现在我们来定义 $\omega \times \omega \times \omega_1$ 上的一棵树 T' 如下：对于 $s, t \in \mathrm{Seq}$, 以及 $h \in \mathrm{Seq}\,(\omega_1)$,

$$(s,t,h) \in T' \leftrightarrow \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) = \mathrm{dom}(h) \ \wedge\ h^* \restriction_{U_{(s,t)}} \text{是一个保序映射},$$

其中 $U_{(s,t)} = \left\{u \in \mathrm{Seq} \;\middle|\; \mathrm{dom}(u) \leqslant \mathrm{dom}(s) \wedge \left(s \restriction_{\mathrm{dom}(u)}, t \restriction_{\mathrm{dom}(u)}, u\right) \in U \right\}$. 如此定义的 T' 是 $\omega^2 \times \omega_1$ 上的一棵树.

现在看这棵树为我们提供了什么信息：设 $x, y \in \mathcal{N}$. 我们断言：如果

$$(x \restriction_n, y \restriction_n, h) \in T',$$

那么 h^* 是 $U(x,y)$ 上的一个在其定义域范围内的保序映射. 这是因为, 如果

$$u, v \in \mathrm{dom}\,(h^*) \cap U(x,y),$$

那么一定有 $i, j < n$ 来见证 $u = u_i$, $v = u_j$. 于是, $\mathrm{dom}(u) < n$, $\mathrm{dom}(v) < n$, 从而 $u, v \in U_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}$. 由此得到

$$f \in T'(x,y) \leftrightarrow \forall n < \omega \ (f \restriction_n)^* \restriction_{U(x,y)} \text{是一个保序映射}.$$

对于 $f : \omega \to \omega_1$ 而言, f 满足上述关系式右端要求的充分必要条件是 $f^* \restriction_{U(x,y)}$ 是一个保序映射. 于是, 综合起来就有

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow \exists y\, \exists f \ (f : \omega \to \omega_1 \ \wedge\ f \in T'(x,y)) \\ &\leftrightarrow \exists y\, \exists f \ (f : \omega \to \omega_1 \ \wedge\ \forall n < \omega \ (x \restriction_n, y \restriction_n, f \restriction_n) \in T')\,. \end{aligned}$$

下一步, 将树 T' 转换成 $\omega \times K = \omega \times (\omega \times \omega_1)$ 上的树 T'': 将等长序列的三元组

$$(\langle s(0), \cdots, s(n-1)\rangle, \langle t(0), \cdots, t(n-1)\rangle, \langle h(0), \cdots, h(n-1)\rangle)$$

变换成等长序列的有序对:

$$(\langle s(0), \cdots, s(n-1)\rangle, \langle (t(0), h(0)), \cdots, (t(n-1), h(n-1))\rangle).$$

经过这样一个转换, 就有

$$x \in A \leftrightarrow \exists g \; (g : \omega \to (\omega \times \omega_1) \wedge \forall n < \omega \; (x \restriction_n, g \restriction_n) \in T'').$$

利用一个从 $\omega \times \omega_1$ 到 ω_1 的双射, 我们再将 T'' 转换成 $\omega \times \omega_1$ 上的树 T 来实现关系式: 对于 $x \in \mathcal{N}$, 总有

$$x \in A \leftrightarrow \exists g \; (g : \omega \to \omega_1 \wedge \forall n < \omega \; (x \restriction_n, g \restriction_n) \in T).$$

也就是, $A = p[T]$.

注意, 经过这样几步所得到的树 T 是一棵由树 U 可构造的树, 从而 $T \in L[a]$. □

应用这一表示定理 (定理 3.7), 我们就可以将推论 3.4 以及引理 3.6 的结论加强. 这个加强版被命名为谢尔品斯基 (Wacław Sierpiński) 定理.

定理 3.8 (Sierpiński)　*每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合都是 $\aleph_1$ 个博雷尔集合的并.*

证明　设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是 $\mathbf{\Sigma}^1_2$. 根据表示定理 (定理 3.7), A 是 $\omega \times \omega_1$ 上某棵树 T 的投影. 对于 $\gamma < \omega_1$, 令

$$T^\gamma = \{(s, h) \in T \mid h \in \mathrm{Seq}(\gamma)\}.$$

由于每一个 $f : \omega \to \omega_1$ 都在 ω_1 中有界, 我们自然就有

$$A = \bigcup_{\gamma < \omega_1} p\,[T^\gamma].$$

对于每一个 $\gamma < \omega$, 令 $k_\gamma : \gamma \to \omega$ 为一个单射, 并利用此单射将树 T^γ 同构地转化成 $\omega \times \omega$ 上的一棵树 S^γ 以至于 $p\,[T^\gamma] = p\,[S^\gamma]$. 从而, 每一个 $p\,[T^\gamma]$ 就是一个解析集, 因此, 根据引理 3.6, 便是 $\aleph_1$ 个博雷尔集之并. 所以, A 就是 $\aleph_1$ 个博雷尔集合之并.

事实上, 引理 3.6 的证明给出了一个一般的分解方法. 在这里具体应用这一方法, 我们就有: 对于 $\gamma < \omega_1$, 以及 $x \in \mathcal{N}$, 令

$$x \in B^\gamma_\alpha \leftrightarrow ((\neg (\|T^\gamma(x)\| < \alpha)) \wedge \forall t \in \mathrm{Seq}(\gamma) \, (\|T(x)/t\| = \alpha)).$$

那么 $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1}\bigcup_{\gamma<\omega_1} B_\alpha^\gamma$. □

$\Sigma_2^1(a)$ 集合的树表示定理 (定理 3.7) 有一个非常漂亮的应用: 熊菲尔德 (Joselph R. Shoenfield) 绝对不变性定理[3]. 它表明任何 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 性质相对于包含命题中实数参数的内模型而言都是真相绝对不变的.

定理 3.9 (Shoenfield 绝对性)　*每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 和 $\Pi_2^1(a)$ 性质相对于包含了集合 $\{a\}\cup\omega_1$ 的 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的传递模型都是绝对不变的. 尤其, Σ_2^1 和 Π_2^1 性质相对于 L 而言是绝对不变的.*

证明　设 $a\in\mathcal{N}$ 以及 $A\subseteq\mathcal{N}$ 是一个 $\Sigma_2^1(a)$ 集合. 令 $A=\{r\in\mathcal{N}\mid\psi[a,r]\}$, 其中 $\psi(v_1,v_2)$ 是一个 Σ_2^1 表达式. 设 $\omega_1\cup\{a\}\subset M\models \mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 为一个传递模型. 我们来证明: 对于 $r\in\mathcal{N}\cap M$,

$$M\models\psi[a,r] \text{ 当且仅当 } \psi[a,r] \text{ 成立.}$$

为此, 令 $U\subset \mathrm{Seq}_3$ 为一棵在 a 之上递归的 3-维树以至于对于任意的 $x\in\mathcal{N}$ 总有

$$x\in A\leftrightarrow\psi[a,x]\leftrightarrow\exists y\in\mathcal{N}\ (U(x,y) \text{ 是一棵有秩树}).$$

这样, 对于 $x\in\mathcal{N}\cap M$,

$$x\in A^M\leftrightarrow\exists y\in\mathcal{N}\cap M\ M\models U(x,y) \text{ 是一棵有秩树},$$

其中 $A^M=\{x\in\mathcal{N}\cap M\mid M\models\psi[a,x]\}$. 对于 $x,y\in\mathcal{N}\cap M$, $U(x,y)$ 在 M 中和在 V 中是同一棵树; 由于 $U(x,y)$ 的有秩性是可以由 $\omega_1\subset M$ 绝对不变地判别的, 我们就有

$$x\in A^M\leftrightarrow\exists y\in\mathcal{N}\cap M\ U(x,y) \text{ 是一棵有秩树}.$$

上式表明: 如果 $x\in A^M$, 那么 $x\in A$. (这也可以根据定理 3.2 以及 $\psi[a,x]$ 是一个 Σ_2^1 命题得到.)

剩下的我们需要证明: 如果 $x\in A\cap M$, 那么 $x\in A^M$.

令 T 为表示定理 (定理 3.7) 的证明中由树 U 所演变得到的 $\omega\times\omega_1$ 之上的 A 的投影树. 此树 $T\in M$, 并且对于 $x\in\mathcal{N}$ 都有

$$x\in A\leftrightarrow T(x) \text{ 有一根无穷树枝}.$$

设 $x\in A\cap M$. 于是 $T(x)\in M$ 有一根无穷树枝. 根据有秩性的绝对性,

$$M\models T(x) \text{ 有一根无穷树枝}.$$

3 R. Shoenfield, The problem of predicativity. In “Essays on the Foundations of Mathematics”(Y. Bar-Hillel et al., eds.). Magnes Press, Hebrew Univ., Jerusalem, 1961,131-139.

也就是说, 在 M 中有一个函数 $g:\omega\to\omega_1$ 满足要求: $\forall n<\omega\ (x\restriction_n, g\restriction_n)\in T$. 从这一处开始, 在 M 中回溯定理 3.7 的证明, 在 M 中得到一个实数 y 以满足要求:

$$M\models U(x,y)\text{ 是有秩树.}$$

所以, $x\in A^M$. □

称 $A\subseteq\mathbb{N}$ 是 $\Sigma^1_2(a)$ 当且仅当 A 可以由一个带参数 $a\in\mathcal{N}$ 的 $\Sigma^1_2(a)$-表达式所定义:

$$\forall n<\omega\,(n\in A\leftrightarrow\exists z\in\mathcal{N}\,\forall y\in\mathcal{N}\ \psi(a,y,z,n)),$$

其中 ψ 是一个不含任何涉及实数变元量词的表达式. 经过适当的记号变更, 定理 3.7 也对自然数集合的 $\Sigma^1_2(a)$ 子集合给出树表示. 由此, 我们得到下面的推论.

推论 3.7 *如果 $A\subseteq\omega$ 是 $\Sigma^1_2(a)$, 那么 $A\in L[a]$. 尤其每一个 Σ^1_2 实数和每一个 Π^1_2 实数都是可构造实数.*

下面的例子表明熊菲尔德定理给出了最好的结论.

例 3.2 *如果 $0^\#$ 存在, 那么存在一个不可构造的 Δ^1_3 实数: $0^\#$; 单点集 $\{0^\#\}$ 是一个 Π^1_2 集合.*

证明 我们将 $0^\#$ 与 $0^\#$ 中语句的哥德尔编码等同起来. 注意到在 $0^\#$ 的定义中涉及序数的全称量词 $\forall\alpha$ 可以被有界序数量词 $\forall\alpha<\omega_1$ 对等地取代. 这样一来, 性质 $A=0^\#$ 就是模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1},\in)$ 上的一个 Π_1 性质, 因此也就是一个 Π^1_2 性质. 这就表明单点集 $\{0^\#\}$ 是一个 Π^1_2 集合. 下面的表达式表明 $0^\#$ 是 Δ^1_3:

$$n\in 0^\#\leftrightarrow\exists z\left(z\in\{0^\#\}\wedge z(n)=1\right)\leftrightarrow\forall z\left(z\in\{0^\#\}\to z(n)=1\right). \qquad □$$

现在我们来看看熊菲尔德绝对性定理的两个有趣的应用. 第一个应用是当可数序数的一个集合的实数编码集合是 Σ^1_2 时, 它便是一个可构造集; 第二个应用则揭示了 Σ^1_2 集合包含完备子集的内涵.

命题 3.2 *设 $S\subseteq\omega_1$. 令 $A=\{x\in\mathrm{ZX}\mid\|x\|\in S\}$. 设 $a\in\mathcal{N}$. 如果 A 是 $\Sigma^1_2(a)$, 那么 $S\in L[a]$.*

证明 令 $S, A(S), a$ 为命题条件所述的集合. 设 $\psi(v_1)$ 是一个彰显自由变元的 $\Sigma^1_2(a)$ 表达式以至于 $A=\{x\in\mathcal{N}\mid\psi[x]\}$.

对于每一个可数序数 α, 令 $\mathbb{P}_\alpha=(\alpha^{<\omega},\leqslant)$. 那么每一个这样的力迫构思 $\mathbb{P}_\alpha\in L$. 在 $L[a]$ 中考虑由 $\mathbb{P}_\alpha$ 所确定的力迫语言以及布尔值模型 $L[a]^{\mathbb{P}_\alpha}$.

断言 $\forall\alpha<\omega_1\left(\alpha\in S\iff L[a]\models\mathbf{1}\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}\left[\exists x\in\check{\mathcal{N}}\ (\psi[x]\wedge\|x\|=\check{\alpha})\right]\right)$.

此断言给出所要的结论: $S\in L[a]$, 因为根据力迫论可定义性引理 (引理 II.3.5), S 可以在 $L[a]$ 中定义出来:

$$\left\{\alpha<\omega_1^{\mathrm{V}}\;\middle|\;\mathbf{1}\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}\left[\exists x\in\check{\mathcal{N}}\ (\psi[x]\wedge\|x\|=\check{\alpha})\right]\right\}.$$

为证明上述断言, 考虑 $\mathbb{P} = (\omega_1^{<\omega}, \leqslant)$. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子. 我们在 V$[G]$ 中分析讨论.

由于 $L[a]$ 是一般连续统假设的模型, 在 V 中有 $\left|\mathfrak{P}\left(\mathbb{P}_\alpha\right)^{L[a]}\right| \leqslant \omega_1$, 所以在 V$[G]$ 中, $L[a]$ 中的力迫构思 $\mathbb{P}_\alpha$ 在 $L[a]$ 中的稠密子集的集合是一个可数集合. 因此, 对于每一个 $p \in \alpha^{<\omega}$, 在 V$[G]$ 中存在一个 $L[a]$ 上的包括 p 在内的 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型滤子 $g \subset \alpha^{<\omega}$. 根据力迫方法的基本定理 (定理 II.3.28), 对于任意的 $\alpha < \omega_1^{\mathrm{V}}$, 对于 $\mathbb{P}_\alpha$-力迫语言中的语句 θ, 以及 $p \in \alpha^{<\omega}$, 下述对等关系成立:

$$L[a] \models (p \Vdash \theta) \text{ 当且仅当如果 } g \ni p \text{ 是 } L[a] \text{ 上的 } \mathbb{P}_\alpha\text{-泛型滤子, 那么 } L[a][g] \models \theta.$$

设 $\alpha < \omega_1^{\mathrm{V}}$. 令 $z \in \mathcal{N}^{\mathrm{V}}$ 实现 $\|z\| = \alpha$. 于是 $\alpha \in S$ 当且仅当下述命题在 V 中成立:

$$\exists x \in \mathcal{N}\,(\psi(x) \wedge \|x\| = \|z\|).$$

由于 ψ 是 $\Sigma_2^1(a)$, 根据封闭性 (引理 3.1), 上述命题是关于 z 的一个 $\Sigma_2^1(a)$ 的性质. 根据熊菲尔德真相不变性定理 (定理 3.9), 上述命题在 V 中成立当且仅当它在 V$[G]$ 中成立. 令 g 为 $L[a]$ 上的 $\mathbb{P}_\alpha$-泛型滤子 (V$[G]$ 中自有这样的集合), 令 $u \in L[a][g]$ 实现 $\|u\| = \alpha$. 由于 V$[G]$ 满足上述命题的充分必要条件是 V$[G]$ 满足如下 $\Sigma_2^1(a)$ 命题:

$$\exists x\,(\psi(x) \wedge \|x\| = \|u\|),$$

再次应用熊菲尔德真相不变性定理, 我们得到结论: $\alpha \in S$ 当且仅当

$$L[a][g] \models \exists x\,(\psi(x) \wedge \|x\| = \|u\|).$$

根据 g 在 V$[G]$ 中的任意性, 我们得到: $\alpha \in S$ 当且仅当

$$\text{如果 } g \text{ 是 } L[a] \text{ 上的 } \mathbb{P}_\alpha\text{-泛型滤子, 那么 } L[a][g] \models \exists x\,(\psi(x) \wedge \|x\| = \alpha).$$

于是断言得证. □

接下来, 我们来解决 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合与 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合是否包含完备子集的问题. 下面的定理被命名为曼斯菲尔德–索洛维 (Mansfield-Solovay) 定理.

定理 3.10 (Mansfield-Solovay) 设 $A \subseteq \mathcal{N}$ 是一个 $\Sigma_2^1(a)$ 集合. 如果 $A - L[a] \neq \varnothing$, 那么 A 包含一个完备子集.

曼斯菲尔德–索洛维定理由下述更一般的结论直接导出.

引理 3.9 设 T 是 $\omega \times K$ 上的一棵树以及 $A = p[T]$. 那么或者 $A \subset L[T]$, 或者 A 包含一个完备子集; 更有甚者, 当 A 包含一个完备子集时, 就会有 ω 上的一棵完备树 $U \in L[T]$ 来实现不等式 $[U] \subset A$.

证明　本引理的证明继续沿用康托尔–本迪克森求导法. 设 T 是 $\omega\times K$ 上的一棵树. 定义

$$\begin{aligned}&(s,h)\in T'\leftrightarrow(s,h)\in T\wedge\\&\exists(s_0,h_0)\in T\,\exists(s_1,h_1)\in T\ (s_0\supset s\wedge s_1\supset s\wedge h_0\supset h\wedge h_1\supset h\wedge s_0\perp s_1).\end{aligned}$$

现在设 T 是 $\omega\times K$ 上的一棵树. 令 $T^{(0)}=T$; $T^{(\alpha+1)}=\left(T^{(\alpha)}\right)'$; 对于极限序数 α, 则令

$$T^{(\alpha)}=\bigcap_{\beta<\alpha}T^{(\beta)}.$$

上述对树求导的定义对于包括树 T 的任何传递模型都是绝对不变的, 尤其对于 $L[T]$ 而言这是一个内外一致的过程. 因此, 对于每一个序数 α 都有 $T^{(\alpha)}\in L[T]$.

令 $\alpha=\min\left\{\beta\in\mathrm{Ord}\ \middle|\ T^{(\beta+1)}=T^{(\beta)}\right\}$.

情形一　$T^{(\alpha)}=\varnothing$.

我们断言此种情形下必有 $p[T]\subset L[T]$. 设 $x\in p[T]$. 令 $f\in K^\omega$ 见证 $(x,f)\in[T]$. 令 $\gamma<\alpha$ 满足要求:

$$(x,f)\in\left[T^{(\gamma)}\right],\ \text{但是}\ (x,f)\notin\left[T^{(\gamma+1)}\right].$$

于是, 令 $(s,h)\in T^{(\gamma)}$ 来见证 $s\subset x, h\subset f$ 以及 $(s,h)\notin T^{(\gamma+1)}$. 根据 $T^{(\gamma+1)}$ 的定义, 这意味着

$$\forall(s_1,h_1)\in T^{(\gamma)}\ ((s\subset s_1\wedge h\subset h_1)\to s_1\subset x).$$

令

$$T^{(\gamma)}_{(s,h)}=\left\{(s_1,h_1)\in T^{(\gamma)}\ \middle|\ s\subset s_1\wedge h\subset h_1\right\}.$$

那么 $T^{(\gamma)}_{(s,h)}\in L[T]$, 并且 $\{x\}=p\left[T^{(\gamma)}_{(s,h)}\right]$. 所以 $x\in L[T]$. 或者, 更直接一些:

$$x=\bigcup\left\{s_1\in\omega^{<\omega}\ \middle|\ \exists h_1\in K^{<\omega}\ \left(s_1\supset s\wedge h_1\supset h\wedge(s_1,h_1)\in T^{(\gamma)}\right)\right\}.$$

情形二　$T^{(\alpha)}\neq\varnothing$.

我们来证明此种情形下必有 ω 上的一棵完备树 $U\in L[T]$ 来实现 $[U]\subset p[T]$.

根据 $T^{(\alpha+1)}$ 的定义以及事实 $T^{(\alpha+1)}=T^{(\alpha)}\neq\varnothing$, 树 $T^{(\alpha)}$ 具备如下性质:

$$T^{(\alpha)}\models\forall(s,h)\,\exists(s_0,h_0)\,\exists(s_1,h_1)\ (s_0\supset s\wedge s_1\supset s\wedge h_0\supset h\wedge h_1\supset h\wedge s_0\perp s_1).$$

树 $T^{(\alpha)}$ 的这一性质对 $L[T]$ 而言是内外一致的. 我们在 $L[T]$ 中应用这一性质来寻找所要的完备树 U.

令 $\left(s_{\langle0\rangle},h_{\langle0\rangle}\right)\in T^{(\alpha)}$ 以及 $\left(s_{\langle1\rangle},h_{\langle1\rangle}\right)\in T^{(\alpha)}$ 满足 $s_{\langle0\rangle}\perp s_{\langle1\rangle}$.

递归地, 对于 $1 \leqslant n < \omega$, 对于 $t \in \{0,1\}^n$, 给定 $(s_t, h_t) \in T^{(\alpha)}$, 令

$$\left(s_{t+\langle 0\rangle}, h_{t+\langle 0\rangle}\right) \in T^{(\alpha)} \text{ 以及 } \left(s_{t+\langle 1\rangle}, h_{t+\langle 1\rangle}\right) \in T^{(\alpha)}$$

满足

$$\left(s_{t+\langle 0\rangle} \supset s_t \wedge s_{t+\langle 1\rangle} \supset s_t \wedge h_{t+\langle 0\rangle} \supset h_t \wedge h_{t+\langle 1\rangle} \supset h_t \wedge s_{t+\langle 0\rangle} \perp s_{t+\langle 1\rangle}\right).$$

然后, 令 $U = \{ s \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid \exists t \in \{0,1\}^{<\omega}\ s \subset s_t\}$. 如此定义的 $U \in L[T]$, 并且 U 是一棵完备树, 以及 $[U] \subset p\left[T^{(\alpha)}\right] \subseteq p[T]$. □

下面我们来展示表明曼斯菲尔德–索洛维定理的条件不可缺失的例子:

如果 $\mathrm{V} = L$, 那么存在不可数的但不包含完备子集的 Π^1_1 集合.

我们从哥德尔关于可构造实数集合的定义复杂性分析开始.

定理 3.11 (哥德尔) 全体可构造实数组成一个 Σ^1_2 集合; 可构造实数之间的关系 $<_L$ 是一个 Σ^1_2 关系.

证明 注意 $\mathbb{R} \cap L \subset \mathscr{H}_{\omega_1}$. 根据推论 II.2.2, 性质 "$x \in \mathbb{R} \cap L$" 在模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1}, \in)$ 之上是一个 Σ_1 性质; 根据哥德尔定理 (定理 II.2.9), $<_L \cap (\mathbb{R} \cap L) \times (\mathbb{R} \cap L)$ 在模型 $(\mathscr{H}_{\omega_1}, \in)$ 之上是一个 Σ_1 可定义的关系. 于是, 根据投影集合与可定义性之间的对应引理 (引理 3.7), 我们就得到所要的结论. □

由此, 我们得到关于勒贝格可测性以及贝尔性质的一个有趣的解答: 定理 I.3.28 中关于这两种正则性质的结论在 ZFC 基础上是最佳结果.

推论 3.8 设 $\mathrm{V} = L$. 那么存在 $\mathbb{R}$ 的一个既非勒贝格可测也不具备贝尔性质的 Δ^1_2 子集;

证明 由于 $\mathbb{R} = \mathbb{R}^L$, $<_L \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 又是一个 Π^1_2 关系: $x <_L y \leftrightarrow y \not\leqslant_L x$. 因此, $<_L \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 是一个 Δ^1_2 集合. 令 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x <_L y\}$. 那么 A 是一个 Δ^1_2 集合.

对于每一个 $y \in \mathbb{R}$, 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$ 是可数的, 所以它既是零测集又是稀疏集. 因此, 如果 A 是可测的, 那么 A 必是零测度集合; 如果 A 具有贝尔性质, 那么 A 也必是稀疏集合.

令 $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leqslant_L x\}$. 同样地, 对于 $x \in \mathbb{R}$, 集合 $\{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in B\}$ 是可数的, 因而既是零测集又是稀疏集. 因此, 如果 B 是可测的, 那么 B 必是零测度集合; 如果 B 具有贝尔性质, 那么 B 也必是稀疏集合.

这些就表明 A 既不是可测的, 又不具备贝尔性质. □

接下来我们还希望指出: 定理 I.3.28 中关于完备子集性质的结论在 ZFC 基础上也是最佳结果. 为此, 我们需要先证两个引理.

回顾一下从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{N}^\omega$ 的典型拓扑同胚映射：令 $\Gamma : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ 为一个递归双射, 对于 $z \in \mathcal{N}$, 对于 $m, n \in \mathbb{N}$, 令

$$z_m(n) = z(\Gamma(m, n)),$$

从而 $\mathcal{N} \ni z \mapsto \langle z_m \mid m < \omega \rangle \in \mathcal{N}^\omega$.

引理 3.10　*下述 $\mathcal{N}$ 上的二元关系 R 是一个 Σ^1_2 关系：对于 $(z, x) \in \mathcal{N}^2$, 令*

$$(z, x) \in R \leftrightarrow \{ z_n \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ y \in \mathcal{N} \mid y <_L x \}.$$

证明　注意, 关系 $\{ z_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq \{ y \in \mathcal{N} \mid y <_L x \}$ 是 Σ^1_2. 因此, 只需证明下述语句是 Σ^1_2：

$$\forall y <_L x \, \exists n < \omega \; (y = z_n).$$

又注意, 有一个具备下述特点的语句 Θ：$\mathrm{ZF} \vdash \Theta$; 如果 $M \models \Theta$ 是一个传递模型, 那么 $<_L$ 相对于 M 就是绝对不变的, 并且如果 $x \in M$ 是可构造的, 那么每一个满足不等式的 $y <_L x$ 就都在 M 之中.

于是, 上面要证明的语句就对等于下述命题：

> 存在包括参数 x, z 和 $\{ z_n \mid n < \omega \}$ 的传递模型 M 以至于
> $M \models \Theta \wedge \forall y <_L x \, \exists n < \omega \; (y = z_n)$.

用类似于引理 3.7 的证明方式便可证明上述语句是 Σ^1_2. 详细讨论留给读者. □

引理 3.11　*如果 $\mathrm{V} = L$, 那么存在一个不包含任何不可数解析子集的 Σ^1_2 集合.*

证明　令

$$\forall x \in \mathcal{N} \; (x \in A \leftrightarrow x \in \mathrm{ZX} \wedge \forall y <_L x \; (\neg(\|y\| = \|x\|))).$$

这样定义的 A 是不可数的：$A \subset \mathrm{ZX}$, 对于 $\alpha < \omega_1$, 恰好有一个 $x \in A$ 满足 $\|x\| = \alpha$.

现在我们来证明 A 是 Σ^1_2：令 R 为引理 3.10 所提供的 Σ^1_2 二元关系, 那么

$$x \in A \leftrightarrow x \in \mathrm{ZX} \wedge \exists z \; (R(z, x) \wedge \forall n < \omega \; (\neg \, (\|z_n\| = \|x\|))).$$

因为 $\neg \, (\|z_n\| = \|x\|)$ 是 Π^1_1, 所以上述表明 A 是 Σ^1_2.

最后, 我们来证 A 不包含任何完备子集. 事实上它不包含任何不可数解析子集. 这一结论由 ZX 的解析集有界性引理 (推论 3.3) 得到：如果 $B \subset A$ 是解析子集, 那么集合 $\{\|x\| \mid x \in B\}$ 就会有界, 因而根据 A 的定义就必然可数. □

推论 3.9　*设 $\mathrm{V} = L$. 那么存在 $\mathcal{N}$ 的一个不可数的但不包含任何完备子集的 Π^1_1 子集.*

证明 令 A 由引理 3.11 的证明所给出. 于是 A 是一个不可数的不包含任何完备子集的 Σ_2^1 集合. 那么 A 是乘积空间 $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 上的某个 Π_1^1 子集合 B 的投影. 根据展示函数定理 (定理 3.6), 令 $f\subset B$ 为一个 Π_1^1 展示函数. 因此, f 的投影集也是 A. 我们断言不可数 Π_1^1 集合 f 就不包含任何完备子集. 如若不然, 令 $P\subset f$ 为一个完备子集. 那么 P 的投影就是 A 的一个解析子集. 因为 $P\subset f$, 所以 P 也就是一个函数. 由于 P 不可数, 它的投影 $\mathrm{dom}(P)$ 也不可数. 可是 $\mathrm{dom}(P)\subset A$ 是解析的, 因此必然可数. 这便是一个矛盾. □

将上述推论 3.9 与曼斯菲尔德–索洛维定理 (定理 3.10) 结合起来, 我们就得到下述将不可数的余解析集是否具备完备子集性质与大基数存在性问题关联起来的特征定理:

定理 3.12 如下命题对等:

(1) $\forall a\subset\omega\ \aleph_1^{L[a]}$ 是一个可数序数;

(2) $\mathcal{N}$ 的每一个不可数的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 子集都包含一个完备子集;

(3) $\mathcal{N}$ 的每一个不可数的 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 子集都包含一个完备子集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3). 设 A 是一个不可数的 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合. 令 $a\in\mathcal{N}$ 来实现 A 是 $\Sigma_2^1(a)$. 由于 $\aleph_1^{L[a]}$ 可数, $\mathbb{R}^{L[a]}$ 是可数集, 所以 A 中必有不在 $L[a]$ 中的实数. 根据定理 3.10, A 包含一个完备子集.

(3) $\Rightarrow$ (2). 每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合都是一个 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合.

(2) $\Rightarrow$ (1). 假设 (1) 不成立. 令 $a\subset\omega$ 见证 $\aleph_1^{L[a]}=\aleph_1$. 我们来证明 (2) 必不成立. 为此, 对于 $x\in\mathcal{N}$, 令

$$x\in A\leftrightarrow x\in L[a]\ \wedge\ x\in \mathrm{ZX}\ \wedge\ \forall y<_{L[a]}x\ (\neg(\|y\|=\|x\|)).$$

那么, A 是 ZX 的一个 $\Sigma_2^1(a)$ 子集合, 并且对于每一个 $\alpha<\omega_1$, A 中恰好有一个元素 x 来满足 $\|x\|=\alpha$. 从此开始, 借用引理 3.11 的证明以及推论 3.9 的证明就可以得到一个势为 $\aleph_1$ 的不包含任何完备子集的 $\Pi_1^1(a)$ 集合. □

利用开区分观念, 曼斯菲尔德–索洛维定理 (定理 3.10) 有着下述自然加强. 我们先做点技术准备. 令 $\langle\tau_n\mid n<\omega\rangle$ 为 $(\omega\times\omega)^{<\omega}$ 的一个递归单一列表. 这个列表就单一地罗列出 $\mathcal{N}^2$ 的所有基本开集 $\langle N_{\tau_n}\mid n<\omega\}$. 对于 $[\mathcal{N}]^2$ 的每一个相对开集 A, 我们自然就有一个实数 $f:\omega\to\omega$ 来实现等式 $A=\bigcup\left\{N_{\tau_{f(n)}}\;\middle|\;n<\omega\right\}$. 称这样的 f 为 A 的一个编码.

定理 3.13 (冯) 设 a 是一个实数. 设 $X\subset\mathbb{R}$ 是一个 $\Sigma_2^1(a)$ 集合. 设 $A\subset[\mathbb{R}]^2$ 为一个开集并且 $K=A\cap[X]^2$. 令 c 是开集 A 的编码. 假设 $c\in L[a]$. 那么, 或者在 $L[a]$ 中有 ω 上的一棵完备树 F 来见证 $[[F]]^2\subset K$, 或者

$$\forall y\in X\ \exists F\in L[a]\,(F\text{ 是 }\omega\text{ 上的一棵树}\ \wedge\ y\in[F]\ \wedge\ [[F]\cap X]^2\cap K=\varnothing).$$

证明 设 $T \in L[a]$ 为 $\omega \times \omega_1$ 上的一棵树来实现 $X = p[T]$. 令 $\varphi(v_0, v_1)$ 为一个彰显自由变元的 Σ^1_2 表达式并且

$$\forall y \in \mathcal{N}\ (y \in X \leftrightarrow \varphi[a, y]).$$

令 $c \in \mathcal{N} \cap L[a]$ 为开集 $A \subset [\mathcal{N}]^2$ 的一个编码, 以及 $K = A \cap [X]^2$.

对于 T 的子树 S, 如下定义 S 的子树 S': 对 $(s,t) \in S$, 令 $(s,t) \in S'$ 当且仅当 S 中存在具有下述性质的两个节点 (s_0, t_0) 和 (s_1, t_1):

(1) $s_0 \perp s_1 \wedge s \subset s_0 \wedge s \subset s_1 \wedge t \subset t_0 \wedge t \subset t_1$;

(2) $\forall x \in \mathcal{N}\, \forall y \in \mathcal{N} \left(\begin{array}{l} (s_0 \subset x \wedge s_1 \subset y \wedge \varphi[a,x] \wedge \varphi[a,y]) \\ \to \exists n < \omega\, (x,y) \in N_{\tau_{c(n)}} \end{array} \right)$.

因为性质 $\forall x \in \mathcal{N}\, \forall y \in \mathcal{N} \left(\begin{array}{l} (s_0 \subset x \wedge s_1 \subset y \wedge \varphi[a,x] \wedge \varphi[a,y]) \\ \to \exists n < \omega\, (x,y) \in N_{\tau_{c(n)}} \end{array} \right)$ 是一个 $\Pi^1_2(a,c)$ 性质, 所以, 根据熊菲尔德绝对不变性, 如果 $S \in L[a]$, 那么 $S' \in L[a]$.

现在我们到内模型 $L[a]$ 中工作. 递归地定义 $T^{(\alpha)}$ 如下:

(1) $T^{(0)} = T$; $T^{(\alpha+1)} = \left(T^{(\alpha)}\right)'$;

(2) 如果 λ 是一个极限序数, 那么 $T^{(\lambda)} = \bigcap \left\{ T^{(\alpha)} \mid \alpha < \lambda \right\}$.

注意, 根据上述分析, 这个定义相对于 V 是不变的. 现在回到 V 中来讨论.

令 α 为满足等式 $T^{(\alpha+1)} = T^{(\alpha)}$ 的最小序数.

断言一 如果 $T(\alpha) = \varnothing$, 那么

$$\forall y \in X\ \exists H \in L[a]\, (H\ \text{是}\ \omega\ \text{上的一棵树} \wedge y \in [H] \wedge [[H] \cap X]^2 \cap K = \varnothing).$$

设 $T(\alpha) = \varnothing$. 固定 $y \in X$ 以及 $f \in \omega_1^\omega$ 来见证 $(y, f) \in [T]$. 令 $\rho < \alpha$ 来满足下述要求:

$$(y, f) \in \left[T^{(\rho)}\right] \wedge (y, f) \notin \left[T^{(\rho+1)}\right].$$

令 $(s,t) \in \left(T^{(\rho)} - T^{(\rho+1)}\right)$ 来满足要求: $s \subset y \wedge t \subset f$.

情形一 $\left| p \left[T^{(\rho)}_{(s,t)} \right] \right| = 1$.

此时 $\{y\} = p\left[T^{(\rho)}_{(s,t)}\right]$. 所以 $y = \bigcup \left\{ s' \leqslant s \mid \exists t' \leqslant t\ (s', t') \in T^{(\rho)} \right\}$. 由于

$$T^{(\rho)} \in L[a],$$

$T^{(\rho)}_{(s,t)} \in L[a]$, 所以, $y \in L[a]$. 此时, 令 $F = \{ y\restriction_n \mid n < \omega \}$. 那么 $y \in [F]$ 以及

$$[[F] \cap X]^2 \cap K = \varnothing.$$

情形二 $\left| p \left[T^{(\rho)}_{(s,t)} \right] \right| > 1$.

此时 $T^{(\rho)}$ 中有两个具备下述性质的节点 (s_0,t_0) 和 (s_1,t_1)：

$$s_0 \perp s_1 \wedge s \subset s_0 \wedge s \subset s_1 \wedge t \subset t_0 \wedge t \subset t_1;$$

并且

$$[(N_{s_0}\cap X)\times(N_{s_1}\cap X)]\cap([X]^2-K)\neq\varnothing.$$

令 $S=T^{(\rho)}_{(s,t)}$. 那么 $S\in L[a]$.

事实 $[N_s\cap p[S]]^2\cap K=\varnothing$.

假设不然. 令 $d,b\in N_s\cap p[S]$ 满足 $b\neq d$ 以及 $\{b,d\}\in K$. 由于 K 是相对开集, 令 $m>\mathrm{dom}(s)$ 满足 $d\restriction_m\neq b\restriction_m$ 以及

$$(N_{d\restriction_m}\cap X)\times(N_{b\restriction_m}\cap X)\subset K.$$

令 t_0,t_1 满足 $(d\restriction_m,t_0)\in T^{(\rho)}_{(s,t)}$ 以及 $(d\restriction_m,t_0)\in T^{(\rho)}_{(s,t)}$. 根据绝对不变性, 我们应当有 $(s,t)\in T^{(\rho+1)}$. 这是一个矛盾.

再次应用绝对不变性, 上述事实在 $L[a]$ 中也成立. 在 $L[a]$ 中, 考虑 $N_s\cap p[S]$. 令 F 为 ω 上的一棵树以至于 $[F]$ 是 $N_s\cap p[S]$ 的闭包. 因为 K 是一个相对开集, 我们自然就有 $[[F]\cap p[T]]^2\cap K=\varnothing$. 回到 V 中, 等式 $[[F]\cap p[T]]^2\cap K=\varnothing$ 依旧成立, 并且 $y\in N_s\cap p[S]\subset[F]$.

断言二 如果 $T(\alpha)\neq\varnothing$, 那么在 $L[a]$ 中有 ω 上的一棵完备树 H 来见证 $[[H]]^2\subset K$.

设 $T(\alpha)\neq\varnothing$. 递归地, 我们来构造 ω 上的一棵完备树 F 以实现下述目标：

$$F\in L[a]\wedge[F]\subset p\left[T^{(\alpha)}\right]\wedge[F]^2\subset K.$$

任取 $(s_\varnothing,t_\varnothing)\in T^{(\alpha)}$.

假设对于 $\sigma\in 2^{<\omega}$, 我们已经定义好了 $(s_\sigma,t_\sigma)\in T^{(\alpha)}$. 根据 $T^{(\alpha+1)}$ 的定义, 在 $T^{(\alpha)}$ 中一定有两个具备下述性质的节点 (s_0,t_0) 和 (s_1,t_1)：

$$s_0\perp s_1\wedge s_\sigma\subset s_0\wedge s_\sigma\subset s_1\wedge t_\sigma\subset t_0\wedge t_\sigma\subset t_1,$$

以及 $(N_{s_0}\cap X)\times(N_{s_1}\cap X)\subset K$. 从 $T^{(\alpha)}$ 中取出长度最小的一对这样的节点 (s_0,t_0) 和 (s_1,t_1), 并且令 $s_{\sigma\widehat{\langle 0\rangle}}=s_0\wedge s_{\sigma\widehat{\langle 1\rangle}}=s_1\wedge t_{\sigma\widehat{\langle 0\rangle}}=t_0\wedge t_{\sigma\widehat{\langle 1\rangle}}=t_1$.

然后, 令 $F=\{s_\sigma\mid\sigma\in 2^{<\omega}\}$. 由定义可知映射

$$2^{<\omega}\ni\sigma\mapsto s_\sigma\in F$$

是一个树同构映射. 所以, F 是 ω 上的一棵二叉完备树. 同样根据定义, $F\in L[a]$, 因为它是依 $T^{(\alpha)}\in L[a]$ 递归定义的; $[F]\subset p\left[T^{(\alpha)}\right]$ 以及 $[F]^2\subset K$. □

我们说过曼斯菲尔德–索洛维定理 (定理 3.10) 是上述定理 3.13 的一种特殊情形：给定 $\Sigma_2^1(a)$ 集合 X, 考虑 $K=[X]^2$. 如果 X 有一个完备开整齐子集, 我们得到了想要的. 如若不然, 根据定理 3.13, 对于 $y\in X$, 必有 ω 上的一棵树 $F\in L[a]$ 来见证 $y\in[F]$ 以及 $[[F]\cap X]^2\cap K=\varnothing$, 从而 $[F]\cap X=\{y\}$. 因此, $y\in L[a]$. 也就是说, 或者 X 包含一个完备子集, 或者 $X\subset L[a]$.

类似于定理 3.12, 我们也有下述推论：

推论 3.10　如下命题对等:

(1) $\forall a\subset\omega\,\aleph_1^{L[a]}$ 是一个可数序数;

(2) $\mathcal{N}$ 的每一个 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 子集都具有开区分特性;

(3) $\mathcal{N}$ 的每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 子集都具有开区分特性.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 3.13 直接得到.

(3) $\Rightarrow$ (1). 因为 (3) 蕴涵每一个不可数的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 子集都包含一个完备子集, 所以根据定理 3.12, (1) 成立. □

曼斯菲尔德–索洛维定理 (定理 3.10) 将 $\Sigma_2^1(a)$ 集合是否包含完备子集问题同其中是否包括相对于 a 不可构造的元素联系起来. 那么自然的问题就是：是否也有类似的关于勒贝格可测性或者贝尔性质的联系存在?

为了解答这个问题, 我们需要一定的技术准备. 这将是一个内模型分析与力迫方法结合应用的过程.

博雷尔代码

由于博雷尔代数是一个由实数的开子集经过任意可数并以及取补运算所生成的 σ-代数, 每一个博雷尔集都可以经过可数步这样运算的迭代得到. 这就意味着每一个实数的博雷尔集合都可以由一个实数来确定, 并且这种对应可以有效地计算出来. 具体而言, 我们引进一个实数的 Π_1^1-集合 BC 以至于每一个 $c\in\mathrm{BC}$ 都标识着唯一的一个博雷尔子集 $A_c\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 以及记录着 A_c 是怎样从基本开子集得到的.

令 $g:\omega\times\omega\cong\omega$ 为一个经典双射 (哥德尔对应). 定义从 $\mathcal{N}=\omega^\omega$ 到 $\mathcal{N}$ 的函数 $u,v_i(i<\omega)$ 如下：对于 $c\in\mathcal{N}$, 令

$$\forall n<\omega\,((u(c)(n)=c(n+1))\ \wedge\ [\forall i<\omega\,(v_i(c)(n)=c(g(i,n)+1))]).$$

对于 $0<\alpha<\omega_1$, 定义 $S_\alpha\subset\mathcal{N}$ 以及 $T_\alpha\subset\mathcal{N}$ 如下：

(a) $S_1=\{c\in\mathcal{N}\mid c(0)>1\}$;

(b) $T_\alpha=\left(\bigcup_{\beta<\alpha}(S_\beta\cup T_\beta)\right)\cup\{c\in\mathcal{N}\mid c(0)=0\ \wedge\ u(c)\in S_\alpha\}$;

(c) 如果 $\alpha > 1$, 那么

$$S_\alpha = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} (S_\beta \cup T_\beta)\right)$$
$$\cup \left\{ c \in \mathcal{N} \;\middle|\; c(0) = 1 \wedge \forall i < \omega \left(v_i(c) \in \bigcup_{\beta<\alpha} (S_\beta \cup T_\beta) \right) \right\}.$$

令

$$\mathrm{BC} = \bigcup_{1\leqslant\alpha<\omega_1} S_\alpha = \bigcup_{1\leqslant\alpha<\omega_1} T_\alpha.$$

如果 $c \in S_\alpha$, 则称 c 为一个 **$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-代码**; 如果 $c \in T_\alpha$, 则称 c 为一个 **$\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-代码**.

根据有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的定义 (定义 I.1.42), 它是 V_ω 的一个 Δ_0-子集, 从而是一个递归子集; 它上面的线性序也是一个递归子集. 现在令

$$O = \{(s_n, t_n) \mid s_n < t_n \wedge s_n \in \mathbb{Q} \wedge t_n \in \mathbb{Q}\}$$

为有理数平面主对角线以上的点的集合. 这是一个递归集合. 用 I_n 来记实数轴上的左端点为 s_n 右端点为 t_n 的开区间. 对于每一个 $c \in \mathrm{BC}$, 定义 A_c 如下：

(a) 如果 $c \in S_1$, 那么 $A_c = \bigcup\{I_n \mid c(n) = 1\}$;

(b) 如果 $c \in T_\alpha$, 并且 $c(0) = 0$, 那么 $A_c = \mathbb{R} - A_{u(c)}$;

(c) 如果 $\alpha > 1$, $c \in S_\alpha$, 并且 $c(0) = 1$, 那么 $A_c = \bigcup\limits_{i<\omega} A_{v_i(c)}$.

引理 3.12 $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \{A_c \mid c \in \mathrm{BC}\}$.

证明 应用关于 $0 < \alpha < \omega_1$ 的归纳法可以验证：

(i) 如果 $c \in S_\alpha$, 那么 $A_c \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$; 如果 $c \in T_\alpha$, 那么 $A_c \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. 所以, 每一个

$$A_v \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

(ii) 如果对于 $i < \omega$ 都有 $c_i \in \bigcup\limits_{1\leqslant\beta<\alpha} T_\beta$, 那么 $\exists c \in S_\alpha\, \forall i < \omega\ (c_i = v_i(c))$.

(iii) 如果 $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, 那么 $\exists c \in S_\alpha\ (A = A_c)$; 如果 $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$, 那么 $\exists c \in T_\alpha\ (A = A_c)$.

□

引理 3.13 *实数的集合 BC 是一个 Π^1_1 集合.*

证明 如下定义 $\mathcal{N}$ 上的一个二元关系 E:

$$(x, y) \in E \iff [(y(0) = 0 \wedge x = u(y)) \vee (y(0) = 1 \wedge \forall i < \omega\ (x = v_i(y)))].$$

E 是一个算术关系.

断言　$y \in \mathrm{BC}$ 当且仅当 E 是集合 $\{x \mid (x,y) \in E\}$ 之上的一个有秩关系; 当且仅当不存在满足如下关系的无穷序列 $\langle z_n \mid n < \omega \rangle$:

$$z_0 = y \text{ 并且 } \forall n < \omega \ ((z_{n+1}, z_n) \in E) .$$

首先注意到

(a) 对于 $y \in \mathcal{N}$, $y \in S_1$ 当且仅当 $\{x \mid (x,y) \in E\} = \varnothing$;

(b) 如果 $y \in T_\alpha$ 并且 $(x,y) \in E$, 那么 $x \in S_\alpha$;

(c) 如果 $y \in S_\alpha (\alpha > 1)$ 并且 $(x,y) \in E$, 那么 $x \in \bigcup_{\beta<\alpha} (S_\beta \cup T_\beta)$.

这就表明, 如果 $y \in \mathrm{BC}$, 那么必然没有满足如下关系的无穷序列 $\langle z_n \mid n < \omega \rangle$:

$$z_0 = y \text{ 并且 } \forall n < \omega \ ((z_{n+1}, z_n) \in E) .$$

反之, 如果 E 是集合 $\{x \mid (x,y) \in E\}$ 之上的一个有秩关系, 令 ρ 为它上面的一个秩函数, 依据关于 $\rho(x)$ 的归纳法可见每一个满足 $(x,y) \in E$ 的 x 都是 BC 中的元素, 从而 $y \in \mathrm{BC}$.

于是, 断言便给出集合 BC 的一个 Π^1_1-定义. □

引理 3.14　集合 BC 上的下列性质都是 BC 上的 Π^1_1-性质:

$$A_c \subseteq A_d;\ A_c = A_d;\ A_c = \varnothing.$$

证明　固定 $x \in \mathcal{N}$. 令

$$D_x = \bigcap \{C \subseteq \mathcal{N} \mid x \in C \ \wedge \ \forall y \in C \, \forall z \, ((z,y) \in E \to z \in C)\}.$$

令 $h_x : D_x \to 2$ 为一个具备下列性质的函数：对于所有的 $y \in D_x$,

(a) 如果 $y(0) > 1$, 那么

$$h_x(y) = 1 \iff \exists n < \omega \, (y(n) = 1 \ \wedge \ x \in I_n);$$

(b) 如果 $y(0) = 0$, 那么 $h_x(y) = 1 \iff h_x(u(y)) = 0$;

(c) 如果 $y(0) = 1$, 那么 $h_x(y) = 1 \iff \exists i < \omega \, (h_x(v_i(y)) = 1)$.

将上述表达式记成 $\psi(x, D, h)$, 其中 $D = D_x$, $h = h_x$.

如果 $x \in \mathrm{BC}$, 那么 D_x 是一个可数集合, 并且 h_x 存在且唯一; 更有如下特点：

$$\forall y \in D_x \ (h(y) = 1 \leftrightarrow x \in A_y) .$$

令 $\varphi(x, D) \leftrightarrow (x \in D \ \wedge \ \forall y \in D \, \forall z \, ((z,y) \in E \to z \in D))$.

定义二元关系 P 和 Q 如下：

$$(x,y) \in P \leftrightarrow \forall D \in [\mathcal{N}]^{\leqslant\omega} \, \forall h \, [(h \in 2^D \ \wedge \ \varphi(x,D) \ \wedge \ \psi(x,D,h)) \to h(y) = 1];$$

以及

$$(x,y)\in Q\leftrightarrow\exists D\in[\mathcal{N}]^{\leqslant\omega}\,\exists h\,[h\in 2^D\,\wedge\,\varphi(x,D)\,\wedge\,\psi(x,D,h)\,\wedge\,h(y)=1].$$

依据定义, 我们有: 如果 $c\in\mathrm{BC}$, 那么对于任意的 $a\in\mathcal{N}$,

$$a\in A_c\leftrightarrow(a,c)\in P\leftrightarrow(a,c)\in Q.$$

现在我们来验证: P 是 Π^1_1; Q 是 Σ^1_1. 这是因为在 $\mathcal{N}^\omega$ 与 $\mathcal{N}$ 之间存在一个 Δ_0 双射, 从而定义式中涉及的量词事实上都等同于关于实数的量词.

现在利用这两个二元关系, 我们就得到

$$A_c\subseteq A_d\leftrightarrow[c\in\mathrm{BC}\,\wedge\,d\in\mathrm{BC}\,\wedge\,\forall a\,((a,c)\in Q\to(a,d)\in P)];$$

$$A_c=A_d\leftrightarrow[c\in\mathrm{BC}\,\wedge\,d\in\mathrm{BC}\,\wedge\,A_c\subseteq A_d\,\wedge\,A_d\subseteq A_c];$$

以及

$$A_c=\varnothing\leftrightarrow[c\in\mathrm{BC}\,\wedge\,\forall a\,((a,c)\notin Q)].$$

□

推论 3.11 设 M 是理论 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的一个传递模型. $c\in M\cap\mathcal{N}$. 那么

$$c\in\mathrm{BC}\iff M\models\left(c\in\mathrm{BC}^M\right);$$

并且对于 $c,d\in\mathrm{BC}^M$,

$$[A_c\subseteq A_d\iff A_c^M\subseteq A_d^M];\wedge[A_c=A_d\iff A_c^M=A_d^M];\wedge[A_c=\varnothing\iff A_c^M=\varnothing];$$

以及对于 $c\in\mathrm{BC}^M$, $A_c^M=A_c\cap M$.

引理 3.15 下列有关博雷尔代码的等式关于理论 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的传递模型 M 都是绝对不变的:

$$A_e=A_c\cup A_d,\quad A_e=A_c\cap A_d,$$
$$A_e=\mathbb{R}-A_c,\quad A_e=A_c\triangle A_d,\quad A_e=\bigcup_{n<\omega}A_{c_n}.$$

其中所涉及的博雷尔代码 e,c,d 以及博雷尔代码序列 $\langle c_n\mid n<\omega\rangle$ 都在 M 之中.

证明 设 $\langle c_n\mid n<\omega>$ 是 M 中的一个博雷尔代码的序列. 令 $c\in\mathcal{N}$ 为满足下述方程组的一个解:

$$c(0)=1\,\wedge\,\forall i<\omega\;(v_i(c)=c_i).$$

那么 $c\in\mathrm{BC}^M$ 并且 $A_c=\bigcup\limits_{n<\omega}A_{c_n}$ 以及 $A_c^M=\bigcup\limits_{n<\omega}A_{c_n}^M$. 因此, 对于 $e\in\mathrm{BC}^M$,

$$A_e^M=\bigcup_{n<\omega}A_{c_n}^M\leftrightarrow A_e^M=A_c^M\leftrightarrow A_e=A_c\leftrightarrow A_e=\bigcup_{n<\omega}A_{c_n}.$$

由于 $A_e=A_c$ 是绝对不变的, 等式 $A_e=\bigcup\limits_{n<\omega}A_{c_n}$ 也是绝对不变的.

其他几个等式的证明完全类似. 因而留作练习. □

内模型之上的随机实数与科恩实数

回顾例 II.3.31 中的随机布尔代数以及例 II.3.30 中的科恩布尔代数：$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 为例 II.3.26 中定义的实数轴上的博雷尔代数; $\mathcal{I}_m^b$ 为例 II.3.29 中定义的 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的零测度集理想; $\mathbb{B}_m = \mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathcal{I}_m^b$ 为例 II.3.31 中给出的随机布尔代数; $\mathcal{I}_c^b$ 为例 II.3.28 中定义的 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的稀疏子集理想; $\mathbb{B}_c = \mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathcal{I}_c^b$ 为例 II.3.30 中给出的科恩布尔代数. 这是两个饱和度都为 $\aleph_1$ 的完备布尔代数, 并且它们上面的无穷和都由下述等式给出：如果 $\langle X_n \mid n < \omega\rangle$ 是实数博雷尔子集的一个序列, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty}[X_n] = \left[\bigcup_{n<\omega} X_n\right].$$

引理 3.16　设 M 是理论 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的一个传递模型, $d \in \mathrm{BC}^M$. 那么

$$\left[A_d \in \mathcal{I}_m^b \iff A_d^M \in \left(\mathcal{I}_m^b\right)^M\right] \wedge \left[A_d \in \mathcal{I}_c^b \iff A_d^M \in \left(\mathcal{I}_c^b\right)^M\right].$$

证明　设 M 是理论 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的一个传递模型.

设 μ 为勒贝格测度.

断言一　如果 $d \in \mathrm{BC}^M$ 是一个 $\boldsymbol{\Sigma}_1^0$-代码, 那么 $\mu^M\left(A_d^M\right) = \mu\left(A_d\right)$.

令 $\langle k_n \mid n < \delta\rangle(\delta \leqslant \omega)$ 为集合 $\{k \in \omega \mid d(k) = 1\}$ 的一个单一列表. 那么

$$A_d = \bigcup_{n<\delta} I_{k_n},$$

其中每一个 I_{k_n} 都是一个以有理点为端点的开区间. 对于每一个 $n < \delta$, 令

$$X_n = I_{k_n} - \left(I_{k_0} \cup I_{k_1} \cup \cdots \cup I_{k_{n-1}}\right).$$

于是,

$$A_d = \bigcup_{n<\delta} X_n, \quad A_d^M = \bigcup_{n<\delta} X_n^M,$$

并且

$$\mu\left(A_d\right) = \sum_{n<\delta} \mu\left(X_n\right), \quad \mu^M\left(A_d^M\right) = \sum_{n<\delta} \mu^M\left(X_n^M\right).$$

因此, 对于每一个 $n < \delta$,

$$\begin{aligned} I_{k_n} \cap M = I_{k_n}^M \text{ 以及 } X_n \cap M = X_n^M \text{ 并且 } \mu\left(I_{k_n}\right) \\ = \mu^M\left(I_{k_n}^M\right) \wedge \mu\left(X_n\right) = \mu^M\left(X_n^M\right). \end{aligned}$$

从而 $\mu\left(A_d\right) = \mu^M\left(A_d^M\right)$.

断言二 如果 $d \in \mathrm{BC}^M$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^0$-代码, 那么 $\mu^M\left(A_d^M\right) = \mu\left(A_d\right)$.

证明与断言一的证明类似.

根据勒贝格测度的基本性质, 任给一个可测集 X.

(i) X 是一个零测集当且仅当对于每一个自然数 n 都存在一个覆盖 X 的测度小于等于 $\dfrac{1}{n+1}$ 的开集 $G \supseteq X$;

(ii) $\mu(X) > 0$ 当且仅当 X 包含一个具有正测度的闭子集 $F \subseteq X$.

现在设 $d \in \mathrm{BC}^M$.

设 $M \models A_d$ 是一个零测集. 那么

$$M \models \forall n < \omega\, \exists e \left(e \in S_1 \wedge, A_d \subseteq A_e \wedge \mu\left(A_e\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\right).$$

于是, 任给 $n < \omega$, 令 $e \in S_1^M$ 来见证

$$M \models \left(e \in S_1 \wedge, A_d \subseteq A_e \wedge \mu\left(A_e\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\right),$$

根据博雷尔代码的绝对不变性推论 (推论 3.11) 以及上面的断言一, 下述命题在 V 中成立:

$$\left(e \in S_1 \wedge, A_d \subseteq A_e \wedge \mu\left(A_e\right) \leqslant \frac{1}{n+1}\right),$$

因此, 在 V 中, A_d 是一个零测集.

设 $M \models A_d$ 是一个具有正测度的集合. 那么

$$M \models \exists e\left(e \in T_1 \wedge, A_e \subseteq A_d \wedge \mu\left(A_e\right) > 0\right).$$

令 $e \in T_1^M$ 为一个证据. 根据博雷尔代码的绝对不变性推论 (推论 3.11) 以及上面的断言二, 下述命题在 V 中成立:

$$\left(e \in T_1 \wedge, A_e \subseteq A_d \wedge \mu\left(A_e\right) > 0\right).$$

所以, 在 V 中, A_d 是一个正测度集合.

现在我们来考虑稀疏性.

断言三 如果 $d \in \mathrm{BC}^M$, I 是一个以有理数为端点的开区间, 那么 A_d 在 I 上是稠密的当且仅当 $M \models A_d$ 在 I 上是稠密的.

断言四 如果 $d \in \mathrm{BC}^M$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^0$-代码, 那么 A_d 是无处稠密的当且仅当 $M \models A_d$ 是无处稠密的.

因为给定 $d \in T_1^M$, 那么 $u(d) \in S_1^M$. 断言三给出断言四.

设 $d \in \mathrm{BC}^M$. 设 $M \models A_d$ 是一稀疏子集. 那么

$$M \models \exists f : \omega \to T_1 \left((\forall n < \omega\, (f(n)\, \text{是无处稠密的})) \wedge A_d \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_{f(n)} \right).$$

令 $f \in M$ 满足

$$M \models f : \omega \to T_1 \left((\forall n < \omega\, (f(n)\, \text{是无处稠密的})) \wedge A_d \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_{f(n)} \right).$$

根据博雷尔代码的绝对不变性推论 (推论 3.11) 以及上面的断言四, 下述命题在 V 中成立:

$$f : \omega \to T_1 \left((\forall n < \omega\, (f(n)\, \text{是无处稠密的})) \wedge A_d \subseteq \bigcup_{n<\omega} A_{f(n)} \right).$$

所以, 在 V 中, A_d 是一个稀疏子集.

设 $M \models A_d$ 并非稀疏子集. 那么

$$M \models \exists a\, \exists e \in \mathrm{BC}\, \left(a \in S_1 \wedge A_a \neq \varnothing \wedge A_e = A_a \triangle A_d \wedge A_e\, \text{是稀疏子集}\right).$$

令 $a \in S_1^M$ 以及 $e \in \mathrm{BC}^M$ 满足上述条件. 根据博雷尔代码的绝对不变性推论 (推论 3.11) 以及上面的分析, 在 V 中下述命题成立:

$$\left(e \in \mathrm{BC} \wedge a \in S_1 \wedge A_a \neq \varnothing \wedge A_e = A_a \triangle A_d \wedge A_e\, \text{是稀疏子集}\right).$$

这就表明在 V 中, A_d 不是稀疏子集. □

引理 3.17 设 $M \models \mathrm{ZF} + \mathrm{DC}$ 为一个传递模型. 设 $\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_m^M$, $\mathbb{B}_c = \mathbb{B}_c^M$.

(1) 如果 G 是 M 之上的一个 $\mathbb{B}_m$-泛型滤子, 那么在 $M[G]$ 中存在唯一的一个实数 x_G (称之为 M 之上的一个**随机实数**) 来满足下述要求:

$$\forall d \in \mathrm{BC}^M \left(x_G \in A_d^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_d^M\right] \in G\right),$$

并且 $G = \left\{ \left[A_d^M\right] \mid x_G \in A_d^{M[G]} \wedge d \in \mathrm{BC}^M \right\}$, 以及 $M[G] = M\left[x_G\right]$.

(2) 如果 G 是 M 之上的一个 $\mathbb{B}_c$-泛型滤子, 那么在 $M[G]$ 中存在唯一的一个实数 x_G (称之为 M 之上的一个**科恩实数**) 来满足下述要求:

$$\forall d \in \mathrm{BC}^M \left(x_G \in A_d^{M[G]} \leftrightarrow [A] \in G\right),$$

并且 $G = \left\{ \left[A_d^M\right] \mid x_G \in A_d^{M[G]} \wedge d \in \mathrm{BC}^M \right\}$, 以及 $M[G] = M\left[x_G\right]$.

证明 (1) 设 G 是 M 之上的一个 $\mathbb{B}_m$-泛型滤子. 我们在 $M[G]$ 中来讨论. 为了简便起见, 对于 $d \in \mathrm{BC}^M$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^M$ 满足等式 $A = A_d^M$, 用 A^* 来记集合 $A_d^{M[G]}$. 根据前面的分析, 我们知道 $A = A^* \cap M$, 并且这个博雷尔集与它的博雷尔代码的选取无关.

断言一 在 $M[G]$ 中至多存在一个满足下述要求的实数 x:

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^M \ \ (x \in A^* \leftrightarrow [A]_m \in G)\,.$$

假设 x 满足上述要求. 那么

$$x \in \bigcap \left\{ A^* \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{M[G]} \ \middle|\ [A^* \cap M]_m \in G \right\}.$$

如果有两个实数 $x < y$ 都在上面的交集之中, 令 r 为在它们中间的一个有理数, 即 $x < r < y$. 令 $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z > r\}$. 那么, 或者 $[A \cap M]_m \in G$, 或者 $[(\mathbb{R} - A) \cap M]_m \in G$, 但不会都成立. 根据定义, $x \notin A$ 并且 $y \notin (\mathbb{R} - A)$.

断言二 在 $M[G]$ 中存在一个满足下述要求的实数 x:

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^M \ \ (x \in A^* \leftrightarrow [A]_m \in G)\,.$$

首先, 集合 $\{r \in \mathbb{Q} \mid [(r, \infty) \cap M] \in G\}$ 有上界. 这是因为在 M 中的集合

$$D = \{[A \cap (-\infty, r)] \mid A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \ \wedge\ \mu(A) > 0 \ \wedge\ \mu(A \cap (-\infty, r)) > 0 \ \wedge\ r \in \mathbb{Q}\}$$

是一个在 $\mathbb{B}_m^+$ 中稠密的子集. 所以, $\exists r \in \mathbb{Q}\, [(r, \infty) \cap M] \notin G$.

其次, 令 $x = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid [(r, \infty) \cap M] \in G\}$. 自然 $x \notin M$. 因为如果 $x \in M$, 那么对于每一个比 x 大的有理数 s 以及对于任何一个比 x 小的有理数 r 而言都有

$$[(r, s) \cap M] \in G,$$

所以, 根据 G 的泛型性,

$$\left(\bigcap\{[(r, s) \cap M] \mid r < x < s \ \wedge\ r \in \mathbb{Q} \ \wedge\ s \in \mathbb{Q}\}\right) \in G.$$

可是

$$\mu\left(\bigcap\{[(r, s) \cap M] \mid r < x < s \ \wedge\ r \in \mathbb{Q} \ \wedge\ s \in \mathbb{Q}\}\right) = \mu(\{x\}) = 0.$$

我们来验证此 x 合乎断言二的需求. 为此, 我们应用 M 中关于博雷尔代码定义复杂性的归纳法来证明对于每一个 $d \in \mathrm{BC}^M$, 都有

$$x \in A_d^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_d^M\right] \in G.$$

先假设 $d \in S_1^M$ 是单个有理区间的博雷尔代码, 即 $\{n < \omega \mid d(n) = 1\}$ 是一个单点集, 比如, d 是有理区间 $I_n = (r, s)$ 的博雷尔代码. 那么

$$\begin{aligned} x \in A_d^{M[G]} &\iff r < x < s \\ &\iff r < \sup\{p \in \mathbb{Q} \mid \ [(p, \infty) \cap M] \in G\} < s \\ &\iff [(r, \infty) \cap M] \in G \wedge [(s, \infty) \cap M] \notin G \\ &\iff [(r, s) \cap M] \in G \\ &\iff \left[A_d^M\right] \in G. \end{aligned}$$

再设 $d \in S_1^M$ 且集合 $\{k < \omega \mid d(k) = 1\} = \{k_n \mid n < \delta_d\}$ 不是单点集 $(1 < \delta_d \leqslant \omega)$. 那么

$$A_d^M = \bigcup_{n<\delta_d} I_{k_n}^M.$$

于是,

$$\begin{aligned} x \in A_d^{M[G]} &\iff x \in \bigcup_{n<\delta_d} I_{k_n}^{M[G]} \iff \exists n < \delta_d \left(x \in I_{k_n}^{M[G]}\right) \\ &\iff \exists n < \delta_d \left(\left[I_{k_n}^M\right] \in G\right) \iff \left(\sum_{n<\delta_d} \left[I_{k_n}^M\right]\right) \in G \\ &\iff \left[\bigcup_{n<\delta_d} I_{k_n}^M\right] \in G \iff \left[A_d^M\right] \in G. \end{aligned}$$

现在设 $1 \leqslant \alpha < \omega_1^M$ 以及 $d \in T_\alpha^M$, 并且归纳假设对于每一个 $e \in S_\alpha^M$ 都有

$$x \in A_e^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_e^M\right] \in G.$$

因而假设 $d(0) = 0$. 这样 $u(d) \in S_\alpha^M$ 以及 $A_{u(d)}^M = (\mathbb{R} - A_d)^M$. 因此,

$$\begin{aligned} x \in A_d^{M[G]} &\iff x \notin A_{u(d)}^{M[G]} \\ &\iff \left[A_{u(d)}^M\right] \notin G \iff \left[A_d^M\right] \in G. \end{aligned}$$

现在设 $1 < \alpha < \omega_1^M$ 以及 $d \in S_\alpha^M$, 并且归纳假设对于每一个 $e \in T_\alpha^M$ 都有

$$x \in A_e^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_e^M\right] \in G.$$

因而假设 $d(0) = 1$. 这样

$$\forall i < \omega \left(v_i(d) \in \bigcup_{\beta<\alpha} (S_\beta \cup T_\beta)^M\right),$$

以及 $A_d^M = \bigcup_{i<\omega} A_{v_i(d)}^M$. 于是,

$$
\begin{aligned}
x \in A_d^{M[G]} &\iff x \in \bigcup_{i<\omega} A_{v_i(d)}^{M[G]} \iff \exists i < \omega \left(x \in A_{v_i(d)}^{M[G]} \right) \\
&\iff \exists i < \omega \left(\left[A_{v_i(d)}^M \right] \in G \right) \iff \left(\sum_{i<\omega} \left[A_{v_i(d)}^M \right] \right) \in G \\
&\iff \left[\bigcup_{i<\omega} A_{v_i(d)}^M \right] \in G \iff \left[A_d^M \right] \in G.
\end{aligned}
$$

于是断言二得证.

综合断言一与断言二, 我们就得到 (1).

(2) 的证明是完全一样的, 故留作练习. □

引理 3.18 (特征引理) 设 $M \models \mathrm{ZF} + \mathrm{DC}$ 为一个传递内模型. 设 $\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_m^M$, $\mathbb{B}_c = \mathbb{B}_c^M$. 设在 V 中存在 M 之上的 $\mathbb{B}_m$-泛型滤子, 以及也存在 M 之上的 $\mathbb{B}_c$-泛型滤子. 那么

(1) 一个实数 x 是 M 上的随机实数当且仅当对于每一个 $d \in \mathrm{BC}^M$ 而言, 若 A_d^M 是一个零测集, 那么 $x \notin A_d$;

(2) 一个实数 x 是 M 上的科恩实数当且仅当对于每一个 $d \in \mathrm{BC}^M$ 而言, 若 A_d^M 是一个稀疏集, 那么 $x \notin A_d$.

从而集合

$$
R(M) = \mathbb{R} - \bigcup \{ A_e \mid e \in \mathrm{BC}^M \wedge A_e \in \mathcal{I}_m \}
$$

是全体 M 之上的随机实数的集合; 集合

$$
C(M) = \mathbb{R} - \bigcup \{ A_e \mid e \in \mathrm{BC}^M \wedge A_e \in \mathcal{I}_c \}
$$

是全体 M 之上的科恩实数的集合.

证明 设 $x \in \mathbb{R}$ 是 M 之上的一个随机实数 (科恩实数). 令 G 为 M 之上的 $\mathbb{B}_m^M$-泛型滤子 ($\mathbb{B}_c$-泛型滤子) 来见证

$$
\forall d \in \mathrm{BC}^M \left(x \in A_d^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_d^M \right] \in G \right).
$$

设 $d \in \mathrm{BC}^M$. 如果 A_d^M 在 M 中是一个零测集 (稀疏集), 那么 $\left[A_d^M \right] \notin G$, 因此, $x \notin A_d^{M[G]} = A_d \cap M[G]$, 从而 $x \notin A_d$.

设 $x \in \mathbb{R}$ 满足要求: 对于每一个 $d \in \mathrm{BC}^M$ 而言, 若 A_d^M 是一个零测集, 那么 $x \notin A_d$. 令

$$
G = \left\{ \left[A_e^M \right] \mid x \in A_e \wedge e \in \mathrm{BC}^M \right\}.
$$

注意, 如果 $d, e \in \mathrm{BC}^M$, 并且 $\left[A_e^M\right] = \left[A_d^M\right]$, 那么 $A_e^M \triangle A_d^M$ 是 M 中的零测度集, 从而 $A_e \triangle A_d$ 是零测度集, 于是 $x \in A_e \iff x \in A_d$. 所以, G 的定义是没有歧义性的.

首先, G 是 $\mathbb{B}_m^M$ 的一个滤子：若 $e, d \in \mathrm{BC}^M$, 且 $\left[A_e^M\right] \in G$ 以及 $\left[A_d^M\right] \in G$, 那么 $x \in A_d \cap A_e$, 从而 $\left[A_e^M \cap A_d^M\right] \in G$; 若 $e, d \in \mathrm{BC}^M$, 且 $\left[A_e^M\right] \in G$ 以及 $\left[A_e^M\right] \leqslant \left[A_d^M\right]$, 那么 $x \in A_e^M$ 以及 $A_e^M - A_d^M$ 是一个零测集, 因而, $x \notin \left(A_e^M - A_d^M\right)$, 于是 $x \in A_d^M$, 从而 $\left[A_d^M\right] \in G$.

其次, 我们来验证：G 是 M 之上的 $\mathbb{B}_m^M$-泛型滤子. 由于在 M 中, 完备布尔代数 $\mathbb{B}_m^M$ 满足可数链条件, 我们只需证明下述事实即可：对于任意的可数序列

$$\langle e_n \mid n < \omega\rangle \in \left(\mathrm{BC}^M\right)^\omega \cap M,$$

都有

$$\left(\sum_{n<\omega} \left[A_{e_n}^M\right]\right) \in G \Rightarrow \exists n < \omega \ \left(\left[A_{e_n}^M\right] \in G\right).$$

而这一事实由下述等式表明：

$$\sum_{n<\omega} \left[A_{e_n}^M\right] = \left[\bigcup_{n<\omega} A_{e_n}^M\right] \wedge \left(\left(x \in \bigcup_{n<\omega} A_{e_n}\right) \leftrightarrow \exists n < \omega \ (x \in A_{e_n})\right).$$

最后, 由 G 的定义, 博雷尔代码及其解释的绝对不变性, 我们知道 x 是由 G 所确定的随机实数, 即 $x \in M[G]$, $M[x] = M[G]$, 并且

$$\forall d \in \mathrm{BC}^M \ \left(x \in A_d^{M[G]} \leftrightarrow \left[A_d^M\right] \in G\right).$$

这就完成了 (1) 的证明.

(2) 的证明完全类似. 故留作练习. □

索洛维实数集合

设 M 是 ZFC 的一个传递模型. 设 S 是实数的一个集合. 称 S 是 M 之上的一个**索洛维实数集合**当且仅当存在一个集合论纯语言的彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_{n+1})$, 以及 $a_1, \cdots, a_n \in M$, 来实现如下对等关系式：

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (x \in S \leftrightarrow M[x] \models \varphi[a_1, \cdots, a_n, x]).$$

引理 3.19 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为传递模型, 并且 $R(M)$ 和 $C(M)$ 都非空. 设 S 为 M 之上的一个索洛维实数集合. 那么必然存在两个博雷尔集合 A 与 B 来实现下述等式:

$$S \cap R(M) = A \cap R(M) \text{ 以及 } S \cap C(M) = B \cap C(M),$$

其中 $R(M)$ 是 M 之上的全体随机实数的集合, $C(M)$ 是 M 之上的全体科恩实数的集合.

证明 让我们对随机实数来证明引理, 将科恩实数的情形留给读者. 考虑 M 中的由 $\mathbb{B}_m$ 所确定的力迫语言. 令 $\dot{G}$ 为 $\mathbb{B}_m$-泛型滤子的典型名字. 令 $\dot{a}$ 为一个随机实数的典型名字, 即令 $\dot{a} \in M^{\mathbb{B}_m}$ 为按照引理 3.17 中的方式由 $\dot{G}$ 所定义的随机实数 x_G 的典型名字: $\|\dot{a} = x_{\dot{G}}\| = \mathbf{1}$.

令 φ 以及 $a_1, \cdots, a_n \in M$ 来实现对 S 的定义

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (x \in S \leftrightarrow M[x] \models \varphi[a_1, \cdots, a_n, x].$$

令 $A_c \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ 满足等式 $[A_c] = \|\varphi\,[\check{a}_1, \cdots, \check{a}_n, \dot{a}]\|$, 令 $A = A_c^*$. 那么 A 在 V 中是一个博雷尔集合.

我们断言: 对于任意的 $x \in R(M)$, $x \in S \leftrightarrow x \in A$. 这是因为, 如果 $x \in R(M)$, 令 G 为 M 之上的 $\mathbb{B}_m$-泛型滤子以至于 $x = x_G$, 那么 $\dot{a}$ 就是此 x 的典型名字, 并且我们有

$$\begin{aligned} x \in S \leftrightarrow M[x] \models \varphi[a_1, \cdots, a_n, x] &\leftrightarrow M[G] \models \varphi[a_1, \cdots, a_n, x] \\ &\leftrightarrow \|\varphi\,[\check{a}_1, \cdots, \check{a}_n, \dot{a}]\| \in G \leftrightarrow [A_c] \in G \\ &\leftrightarrow x \in A_c^*. \end{aligned}$$ □

推论 3.12 设 $M \models \mathrm{ZFC}$ 为传递模型. 设 S 为 M 之上的索洛维实数集合. 那么

(1) 如果 $\mathbb{R} - R(M)$ 是一个零测度集合, 那么 S 一定是勒贝格可测的;

(2) 如果 $\mathbb{R} - C(M)$ 是一个稀疏集合, 那么 S 一定具备贝尔性质.

证明 令 A 和 B 如引理 3.19 所给定. 那么 $S \triangle A$ 是零测集; $S \triangle B$ 是稀疏集. □

现在我们可以证明下述索洛维特征定理:

定理 3.14 设 $a \in \mathcal{N}$. 那么

(1) 每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都是勒贝格可测集的充分必要条件是 $\mathbb{R} - R(L[a])$ 是一个零测集;

(2) 每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都具备贝尔性质的充分必要条件是 $\mathbb{R} - C(L[a])$ 是一个稀疏集.

证明 我们仅证明 (1), 因为 (2) 的证明类似.

首先我们证明每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都是 $L[a]$ 之上的索洛维实数集合. 设 A 为 $\Sigma_2^1(a)$. 令 $T \in L[a]$ 为 $\omega \times \omega_1$ 上的一棵树以至于 $A = p[T]$, 即对于 $x \in \mathcal{N}$, 总有

$$x \in A \leftrightarrow T(x)\,\text{有无穷树枝}.$$

依据有秩性的绝对不变特性, 我们就有, 对于 $x \in \mathcal{N}$,

$$x \in A \leftrightarrow L[a][x] \models T(x) \text{有无穷树枝}.$$

这就表明 A 是 $L[a]$ 之上的索洛维实数集合.

如果 $\mathbb{R} - R(L[a])$ 是一个零测集, 那么上述结论以及推论 3.12 就给出每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都是勒贝格可测集.

现在假设每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都是勒贝格可测集. 考虑

$$B = \bigcup \left\{ A_c \mid c \in \mathrm{BC} \wedge c \in L[a] \wedge A_c \text{一零测集} \right\}.$$

我们来验证 B 是零测集.

对于 $x, c \in \mathcal{N}$, 令

$$C(x,c) \leftrightarrow c \in \mathrm{BC} \wedge A_c \text{是零测集} \wedge x \in A_c,$$

以及

$$D(x,c) \leftrightarrow C(x,c) \wedge c \in L[a] \wedge \forall d \left(d <_{L[a]} c \rightarrow (\neg C(x,d)) \right).$$

对于 $x, y \in B$, 令

$$x \preceq y \leftrightarrow \exists c \, \exists d \left(D(x,c) \wedge D(x,d) \wedge c \leqslant_{L[a]} d \right).$$

于是, 集合 B 和关系 $C, D, \preceq$ 都是 $\Sigma_2^1(a)$, 并且 $\preceq$ 是 B 上的准秩序. 根据我们的可测性假设, B 是勒贝格可测的, $\preceq$ 是 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 的勒贝格可测子集.

$\mathcal{N}^{L[a]}$ 的 $<_{L[a]}$- 序型是 $\omega_1^{L[a]} \leqslant \omega_1$. 于是对于每一个 $y \in B$, 集合

$$\{x \in B \mid x \preceq y\}$$

是可数个零测集之并, 因此为一个零测集. 这样, 根据勒贝格测度理论的傅比尼定理[4], $\preceq$ 是零测集. 同样的分析表明 $B \times B - \preceq$ 也是零测集. 于是, $B \times B$ 是零测集. 因此, B 是零测集. □

综合起来我们有下述关于 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 集合的正则性结论.

推论 3.13　(1) 设 $a \in \mathcal{N}$. 如果 $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$, 那么每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都是勒贝格可测集, 并且每一个 $\Sigma_2^1(a)$ 实数集合都具备贝尔性质.

(2) 如果 $\forall a \in \mathcal{N} \left(\omega_1^{L[a]} < \omega_1 \right)$, 那么

(a) 每一个 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 实数集合都是勒贝格可测集;

(b) 每一个 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 实数集合都具备贝尔性质;

(c) 每一个不可数的 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 实数集合都包含一个完备子集.

4 Fubini's Theorem.

3.1.4 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合

当集合论论域中存在一个可测基数时, $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合的树表示定理 (定理 3.7) 可以推广到 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 集合上去. 由此我们可以在适当的大基数假设下得到 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合的正则性. 马丁和索洛维在 1969 年的文章[5]中用以实数为参数的内模型 $L[x]$ 的银杰–无差别元来分析 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合. 这便开起了应用大基数资源来发展古典描述集合论方法的大门. 下面的 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 树表示定理则隐含在他们的文章之中. 曼斯菲尔德 (Richard B. Mansfield)1971 年应用可测基数将它明确展示[6]出来. 毫无疑问, 这是一个富有启示意义的定理.

为了证明在可测基数下的 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合树表示定理以及后面的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合的稳赢性, 我们需要关于 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合的新的特征.

回顾一下 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的布劳威尔–克林序[7] $<_{\mathrm{BK}}$: 对于 $s,t\in\mathbb{N}^{<\omega}$, $s<_{\mathrm{BK}}t$ 当且仅当

$$s\supset t\ \vee\ \exists n<\min\{\mathrm{dom}(t),\mathrm{dom}(s)\}\,(s\restriction_n=t\restriction_n\ \wedge s(n)<t(n))\,.$$

这是 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的一个线性序.

引理 3.20 *设 $T\subset\mathbb{N}^{<\omega}$ 是一棵树. 那么 T 是一棵有秩树 (即 $[T]=\varnothing$) 当且仅当序 $<_{\mathrm{BK}}$ 在 T 上的限制是一个秩序.*

证明 设 $[T]\neq\varnothing$. 令 $y\in[T]$. 那么序列 $\langle y(n)\mid n<\omega\rangle$ 就是在序 $<_{\mathrm{BK}}$ 下的严格单调递减序列, 所以布劳威尔–克林序在 T 上的限制不是一个秩序.

现在设布劳威尔–克林序在 T 上的限制不是一个秩序. 设 $\langle t_i\in T\mid i<\omega\rangle$ 是在序 $<_{\mathrm{BK}}$ 下的严格单调递减序列.

断言 对于 $m\in\omega$,

(a) $|\{i<\omega\mid\mathrm{dom}\,(t_i)<m\}|<\omega$;

(b) $\exists t\in T\,\exists k<\omega\,\forall i\geqslant k\ (t_i\restriction_m=t)$.

当 $m=0$ 时, (a) 和 (b) 自然成立. 现假设 (a) 和 (b) 对 m 成立. 令 i_m 满足下述要求:

$$\forall i\geqslant i_m\ (\mathrm{dom}\,(t_i)\geqslant m\ \wedge\ t_i\restriction_m=t_{i_m}\restriction_m)\,.$$

根据严格单调递减的假设, 至多有一个 $i\geqslant i_m$ 来见证 t_i 是 $t_{i_m}\restriction_m$, 并且如果存在, 则必定就是 i_m. 这样, 对于 $i>i_m$, 必有 $\mathrm{dom}\,(t_i)\geqslant m+1$. 由 $<_{\mathrm{BK}}$ 的定义,

$$t_{i_m+1}(m)\geqslant t_{i_m+2}(m)\geqslant\cdots\,.$$

---

5 D. Martin and R. Solovay, A basis theorem for $\mathbf{\Sigma}_3^1$ sets of reals. Anna. of Math., (2) 89 (1969), 138-159.

6 Richard B. Mansfield, A Souslin operation for $\mathbf{\Pi}_2^1$. Israel J. Math., 9 (1971), 367-379.

7 Brouwer-Kleene ordering.

所以, $\exists k\in\omega\,\forall j\geqslant k\ (t_{i_m+j}(m)=t_{i_m+k}(m))$. 取这样一个 k. 则对于 $i>i_m+k$ 必有 $t_i\restriction_{m+1}=t_{i_m+k}\restriction_{m+1}$. 从而 (a) 和 (b) 对 $m+1$ 也成立.

对于 $m<\omega$, 令 $y(m)$ 为断言所给出的极限 $\lim\limits_{i\to\infty} t_i(m)$. 于是对于每一个 $n<\omega$, $y\restriction_n$ 是某个 t_i 的延伸. 这样 $y\in[T]$. 从而 $[T]\neq\varnothing$. □

定理 3.15　设 $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么下述命题对等:

(1) A 是 $\mathbf{\Pi}_1^1$.

(2) 存在一个具备下述特点的关系 $R\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}\times\mathbb{N}^{<\omega}$:

(a) $R(\varnothing,\varnothing)$ 成立;

(b) $\forall s\in\mathbb{N}^{<\omega}\,\forall t\in\mathbb{N}^{<\omega}\,(R(s,t)\to\mathrm{dom}(s)=\mathrm{dom}(t))$;

(c) $\forall t\in\mathbb{N}^{<\omega}\,\forall s\in\mathbb{N}^{\mathrm{dom}(t)}\,\forall n<\mathrm{dom}(t)\ (R(t,s)\to R\,(t\restriction_n,s\restriction_n))$;

(d) $\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \big(x\in A\leftrightarrow\forall y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\exists n<\omega\ (\neg R\,(x\restriction_n,y\restriction_n))\big)$.

(3) 存在一个定义在 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 上的具备下述特点的函数 $s\mapsto<_s$:

(a) $\forall s\in\mathbb{N}^{<\omega}$ ($<_s$ 是 $\mathrm{dom}(s)$ 上的一个线性序, 并且 0 是最大元(当 $s\neq\varnothing$));

(b) 如果 $s\subset t$, 那么 $<_s=<_{t\restriction\mathrm{dom}(s)}$;

(c) 对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $<_x=\bigcup\{<_{x\restriction_n}\mid n<\omega\}$; 那么

$$\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ (x\in A\leftrightarrow<_x \text{ 是一个秩序}).$$

证明　我们将 (1) 与 (2) 对等的证明留作练习.

我们来证明 (1) 与 (3) 对等.

先证 (1) ⇒ (3). 设 A 是 $\mathbf{\Pi}_1^1$.

令 $\langle s_n\mid n<\omega\rangle$ 为 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 的具备下述特点的单一罗列: 如果 $s_m\subset s_n$, 那么 $m<n$. 也就是说, 在第 n 步罗列 s 时, 必须已经将它的所有的真前段完全罗列在前面了.

令 $R\subset\mathbb{N}^{<\omega}\times\mathbb{N}^{<\omega}$ 为 (2) 所提供. 对于 $k<\omega$, 对于 $p\in\mathbb{N}^k$, 以及 $m,n\in k$, 令 $m<_p n$ 当且仅当下列条件之一成立:

(i) $\big(\neg R\,(p\restriction_{\mathrm{dom}(s_m)},s_m)\big)\ \wedge\ R\,(p\restriction_{s_n},s_n)$;

(ii) $m<n\ \wedge\ \big(\neg R\,(p\restriction_{\mathrm{dom}(s_m)},s_m)\big)\ \wedge\ \big(\neg R\,(p\restriction_{\mathrm{dom}(s_n)},s_n)\big)$;

(iii) $s_m<_{\mathrm{BK}}s_n\ \wedge\ R\,(p\restriction_{s_m},s_m)\ \wedge\ R\,(p\restriction_{s_n},s_n)$.

直观上, 我们将 $\mathrm{dom}(p)$ 中的满足 $\neg R\,(p\restriction_{\mathrm{dom}(s_m)},s_m)$ 的那些 m 放在 $<_p$ 的开始部分, 并且保持它们的自然顺序; 然后再将剩下的那些元素 n 依照布劳威尔–克林序对于 s_n 的序来同构地决定它们的序.

根据我们的单一罗列的特点, 对于每一个 $p\in\mathbb{N}^{<\omega}$, $<_p$ 的定义是毫无歧义的, 并且的确是 $\mathrm{dom}(p)$ 上的一个线性序. 由于 $s_0=\varnothing$, $\varnothing$ 是序 $<_{\mathrm{BK}}$ 下的最大元, 以及 R 所具备的性质 (a), 0 自然是 $<_p$ 中的最大元. 所以 (3)(a) 成立.

(3)(b) 由 $<_p$ 的定义自然成立.

我们来验证 (3)(c) 成立. 固定 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 令

$$T = \left\{ t \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid R\left(x \restriction_{\mathrm{dom}(t)}, t\right) \right\}.$$

关系 R 的性质 (b) 和 (c) 保证 T 是 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 的一棵子树; 关系 R 的性质 (d) 保证

$$x \in A \leftrightarrow [T] = \varnothing.$$

根据引理 3.20, $[T] = \varnothing$ 当且仅当 $<_{\mathrm{BK}}$ 在 T 上的限制是一个秩序. 根据定义, $<_{\mathrm{BK}}$ 在 T 上的限制是一个秩序当且仅当 $<_x$ 是一个秩序.

这就完成了 (1) $\Rightarrow$ (3) 的证明.

我们将 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明留作练习. □

下面来证明可测基数为我们提供的 $\boldsymbol{\Sigma}_3^1$ 实数集合树表示定理. 这个定理证明中的树构造重点是从 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 实数集合的树去构造它的补集的表示树, 也就是 $\boldsymbol{\Pi}_2^1$ 实数集合的表示树. 这里, 可测基数将发挥关键作用. 这里的补集的表示树定义将在后面得到进一步推广. 当然, 是在更强的大基数环境下.

定理 3.16 (Martin-Solovay, Mansfield) *设存在一个可测基数.*

(1) 如果 A 是一个 $\boldsymbol{\Pi}_2^1$ 实数集合, 那么存在一个序数 λ 以及 $\omega \times \lambda$ 上的一棵树 T 来实现等式 $A = p[T]$.

(2) 如果 A 是一个 $\boldsymbol{\Sigma}_3^1$ 实数集合, 那么存在一个序数 λ 以及 $\omega \times \lambda$ 上的一棵树 T 来实现等式 $A = p[T]$.

证明 我们只需证明 (1), 因为 (2) 中所需要的树可以从 (1) 所提供的树得到, 就如同从 $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ 实数集合的树得到 $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ 实数集合的树那样.

设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ 集合.

令 $\langle s_n \mid n < \omega \rangle$ 为 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 的具备下述特点的单一罗列：如果 $s_m \subset s_n$, 那么 $m < n$.

令 ℓ 为定理 3.15 证明中 (1)$\Rightarrow$(3) 的证明中所确定的定义在 $\mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$ 上的具备下述特点的函数 $s \odot t \mapsto \ell(s \odot t) =<_{s\odot t}$:

(a) $\forall s \odot t \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega} \left(\begin{array}{l} <_{s\odot t} \text{ 是} |s| \text{上的一个线性序, 并且} \\ 0 \text{是最大元(当} s \odot t \neq \langle \varnothing, \varnothing \rangle) \end{array} \right)$;

(b) 如果 $s \odot t \subset s' \odot t'$, 那么 $<_{s\odot t} =<_{s'\odot t'} t \restriction_{|s|}$;

(c) 对于 $(x, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $<_{x,y} = \bigcup \{ <_{x\restriction_n \odot y \restriction_n} \mid n < \omega \}$; 那么

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left((x, y) \in A \leftrightarrow <_{x,y} \text{ 是一个秩序} \right).$$

设 κ 是一个可测基数. 设 U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子.

如下定义在 $\omega\times\omega\times\kappa$ 上的一棵树 T^*：对于 $(\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega})\times\kappa^{<\omega}$ 中满足等式 $|w|=|s|$ 的元素 $(s\odot t,w)$, 令

$$(s\odot t,w)\in T^*\leftrightarrow\forall i<|s|\,\forall j<|s|\ (w(i)<w(j)\leftrightarrow i<_{s\odot t}j)\,.$$

对于 $s\odot t\in\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega}$, 令

$$T^*_{s,t}=\left\{u\in\kappa^{<\omega}\ \mid (s\odot t,u)\in T^*\right\}.$$

对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$T^*_x=\{(t,w)\ \mid\exists m<\omega\ ((x\restriction_m\odot t,w)\in T^*)\}\,.$$

关于树 T^*, 下述事实成立：

事实 3.1.1　(1) $\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\left(\begin{array}{l}(\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,((x,y)\in A))\\ \leftrightarrow\left(\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\exists g\in\kappa^{\omega}\ ((x,y,g)\in[T^*])\right)\end{array}\right)$.

(2) 设 $s\odot t\in\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega}$. 那么对于 $w\in T^*_{s,t}$, $\mathrm{rng}(w)\in[\kappa]^{|s|}$; 并且

$$\forall u\in[\kappa]^{|s|}\,\exists!w\in T^*_{s,t}\ (\mathrm{rng}(w)=u)\,.$$

从而 $T^*_{s,t}\ni w\mapsto\mathrm{rng}(w)\in[\kappa]^{|s|}$ 是一个双射.

证明　(练习.) □

对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $x\in B\leftrightarrow(\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,((x,y)\in A))$. 那么 B 是一个 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 实数集合. 令 $C=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-B$. 于是, C 便是一个 $\mathbf{\Pi}^1_2$ 集合. 因此,

$$\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\left(x\in C\leftrightarrow T^*_x\text{ 是有秩的}\right).$$

对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 在 $T^*_x=\{(t,w)\ \mid\exists m<\omega\ ((x\restriction_m\odot t,w)\in T^*)\}$ 上定义一个严格线性序 $<^x_{\mathrm{BK}'}$：

$$\begin{array}{l}(t,w)<^x_{\mathrm{BK}'}(\bar t,\bar w)\\ \leftrightarrow\left(\begin{array}{l}(t=w=\varnothing\wedge|\bar t|=|\bar w|>0)\vee\\ (t\supset\bar t\wedge w\supset\bar w)\vee\\ \left(\exists m<|t|\left(\begin{array}{l}t\restriction_m=\bar t\restriction_m\wedge w\restriction_m=\bar w\restriction_m\wedge\\ \left(\begin{array}{l}(w(m)<\bar w(m))\vee\\ (w(m)=\bar w(m)\wedge t(m)<\bar t(m))\end{array}\right)\end{array}\right)\right)\end{array}\right).\end{array}$$

事实 3.1.2　对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 下述命题等价:

(1) T^*_x 是有秩的;

(2) $\left(T^*_x,<^x_{\mathrm{BK}'}\right)\cong(\kappa,\in)$;

(3) $\exists f\left(\mathrm{dom}(f)=T^*_x-\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle\}\wedge\mathrm{rng}(f)\subseteq\kappa\wedge f\text{ 是 }<^x_{\mathrm{BK}'}\text{ 保序映射}\right)$.

证明 (练习.) □

对于 $s\odot t\in\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega}$, 如下定义 $T^*_{s,t}$ 上的超滤子 $U_{s\odot t}$:

$$X\in U_{s\odot t}\leftrightarrow X\subseteq T^*_{s,t}\wedge\exists Z\in U\left([Z]^{|s|}\subseteq\{\mathrm{rng}(w)\mid w\in X\}\right).$$

根据上面事实 3.1.1 中的 (2), $T^*_{s\odot t}\in U_{s\odot t}$. 由于 U 是一个正规超滤子, 根据定理 1.6 的证明知道: 对于任意的 $f:[\kappa]^{<\omega}\to\{0,1\}$, 都有一个 $X\in U$ 来见证下述事实:

$$\forall n<\omega\ (|f[[X]^n]|=1).$$

因此, $U_{s\odot t}$ 是 $T^*_{s\odot t}$ 上的一个 κ-完全的超滤子. (我们容许 $U_{\varnothing\odot\varnothing}=\{\{\varnothing\}\}$ 作为唯一的例外.) 于是, 令

$$i'_{s,t}:\mathrm{V}\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_{s\odot t})\,;\ \pi_{s,t}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_{s\odot t})\cong M_{s,t},$$

以及 $i_{s,t}=\pi_{s,t}\circ i'_{s,t}:\mathrm{V}\prec M_{s,t}$. ($i_{\varnothing,\varnothing}$ 为 V 上的恒等映射.)

这些超滤子具有下述投影特性:

事实 3.1.3 如果 $s\odot t$ 和 $s'\odot t'$ 是 $\omega^{<\omega}\times\omega^{<\omega}$ 中的元素, 并且 $s\odot t\subset s'\odot t'$, 即

$$\exists m\leqslant n=|s'|\ (s=s'\restriction_m\ \wedge t=t'\restriction_m)\,,$$

那么, 对于 $X\subseteq T^*_{s,t}$, 总有

$$X\in U_{s\odot t}\leftrightarrow\left\{w\in T^*_{s',t'}\ \middle|\ w\restriction_{|s|}\in X\right\}\in U_{s'\odot t'},$$

因此, 如下定义的映射是典型嵌入映射 $k_{s\odot t,s'\odot t'}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_{s\odot t})\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_{s'\odot t'})$:

$$k_{s\odot t,s'\odot t'}\left([\![f]\!]_{U_{s\odot t}}\right)=[\![f^*]\!]_{U_{s'\odot t'}},$$

其中, $f:T^*_{s\odot t}\to\mathrm{V}$, $f^*:T^*_{s'\odot t'}\to\mathrm{V}$ 由下式确定:

$$\forall w\in T^*_{s'\odot t'}\ \left(f^*(w)=f\left(w\restriction_{|s|}\right)\right);$$

并且有等式 $i_{s',t'}=j_{s\odot t,s'\odot t'}\circ i_{s,t}$, 其中

$$j_{s\odot t,s'\odot t'}=\pi_{s',t'}\circ k_{s\odot t,s'\odot t'}\circ\pi^{-1}_{s,t}.$$

这是因为对于 $Z\in U$,

$$[Z]^{|s|}\subseteq\{\mathrm{rng}(w)\mid w\in X\}\leftrightarrow[Z]^{|s'|}\subseteq\left\{u\in[\kappa]^{|s'|}\ \middle|\ [u]^{|s|}\subset\{\mathrm{rng}(w)\mid w\in X\}\right\}.$$

令 $\lambda=\sup\{j_{s,t}(\kappa)\mid s\odot t\in\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega}\}$.

如下定义 $\omega\times\lambda$ 上的树 $T^\dagger$: 对于 $(s,u)\in\omega^{<\omega}\times\lambda^{<\omega}$, 令 $(s,u)\in T^\dagger$ 当且仅当

$$|s|=|u|\wedge\forall n,m<|s|\ \left(\varnothing\neq s_m\subset s_n\to u(n)<j_{s\restriction_{|s_m|}\odot s_m,s\restriction_{|s_n|}\odot s_n}(u(m))\right).$$

事实 3.1.4 $C = p\left[T^{\dagger}\right]$.

证明 令 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 只需证明 $p\left[T^{\dagger}\right] \subseteq C$.

设 $x \in p\left[T^{\dagger}\right]$. 我们来证明 $x \in C$. 令 $g : \omega \to \lambda$ 来见证 $(x, g) \in \left[T^{\dagger}\right]$.

对于 $n < \omega$, 令 $h_n : T^*_{x\restriction_{|s_n|}, s_n} \to \mathrm{Ord}$ 来实现等式:

$$g(n) = \pi_{x\restriction_{|s_n|}, s_n}\left(\llbracket h_n \rrbracket_{U_{\left(x\restriction_{|s_n|}\right)\odot s_n}}\right).$$

根据 $T^{\dagger}$ 的定义, 对于 $\varnothing \neq s_m \subset s_n$,

$$\left\{ w \in T^*_{x\restriction_{|s_n|}, s_n} \;\middle|\; h_n(w) < h_m\left(w\restriction_{|s_m|}\right)\right\} \in U_{\left(x\restriction_{|s_n|}\right)\odot s_n}.$$

因此, 在 U 中可以找到一个 X_{nm} 来见证下述事实: 对于 $w \in \kappa^{|s_n|}$, 总有

$$\mathrm{rng}(w) \in [X_{nm}]^{|s_n|} \to h_n(w) < h_m\left(w\restriction_{|s_m|}\right).$$

令 $X = \bigcup\{X_{nm} \mid m, n \in \omega \wedge \varnothing \neq s_m \subset s_n\}$. 那么 $X \in U$.

假设 $x \notin C$. 那么 $x \in B$. 令 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,((x, y) \in A)$. 于是, $<_{x,y}$ 是 ω 上的一个秩序. 因为 $|X| = \kappa$, 所以可以找到一个函数 $h : \omega \to \kappa$ 来见证下述对等式:

$$\forall m \in \omega\, \forall n \in \omega\, \left(h(m) < h(n) \leftrightarrow m <_{x,y} n\right).$$

这就意味着 $\forall m < \omega\, \left(h\restriction_m \in T^*_{x\restriction_m, y\restriction_m}\right)$. 于是, 如果 $\varnothing \neq s_m \subset s_n \subset y$, 那么

$$h_n\left(h\restriction_{|s_n|}\right) < h_m\left(h\restriction_{|s_m|}\right).$$

我们得到序数的一个无穷严格单调递降序列. 这是一个矛盾.

因此, $p\left[T^{\dagger}\right] \subseteq C$. □

在得到 $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 实数集合的树表示定理之后, 自然的问题是: 如何得到更高层次的投影集合的树表示? 我们将在后面给出答案. 在这里, 作为 $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 实数集合的树表示定理 (定理 3.16) 的一个应用, 我们来证明下述梅格铎[8] 定理. 这个定理的证明是简要的, 因为我们的意图只是希望以此来说明可测基数作为一种特别的资源, 可以为我们提供关于实数子集正则性有效的影响. 这也是力迫构思泛型扩张用来揭示集合论论域的真理的一个例子.

定理 3.17 (Magidor) 设存在一个可测基数, 并且在 ω_1 上存在一个峭壁理想. 那么每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_3$ 实数集合都是勒贝格可测的; 都具有贝尔特性; 并且是要么可数, 要么包含一个完备子集.

8 Manahem Magidor, Precipitous ideals and Σ^1_4 sets. Israel J. Math., 1980, 35, no.1-2: 109-134.

证明 设 κ 是一个可测基数. 设 $\mathcal{I}$ 为 ω_1 上的峭壁理想.

设 A 是一个 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合. 令 T 为定理 3.16 所给出的 A 的表示树: $A = p[T]$. 在这样的环境下, 我们来证明下述事实:

事实 3.1.5 $\mathbb{R} \cap L[T]$ 是一个可数集合.

在给定这个事实的基础上, A 的勒贝格可测性以及贝尔特性可以如下得到: 首先应用绝对性证明有一个表达式 φ 以如下方式定义 A,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid L[T] \models \varphi(x)\};$$

然后应用推论 3.12. 这和关于 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 实数集合的相应的定理 3.14 和推论 3.13 的证明类似. 我们将详细论证留给读者作为练习. 至于完备子集特性, 应用引理 3.9 便可得到. 同样地, 我们留作练习.

现在就让我们专注于证明上述事实.

令 $\mathbb{B} = \mathfrak{P}(\omega_1)/\mathcal{I}$. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 令

$$j = j_G : \mathrm{V} \prec M_G \cong \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$$

为泛型同质嵌入映射. 因为 $\mathcal{I}$ 是峭壁理想, 泛型超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 是有秩模型, 所以它有唯一的传递化 $\pi_G : \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G) \cong M_G$.

断言一 $j(T) = T$.

先来看断言一蕴涵事实 3.1.5: 假设 $\mathbb{R} \cap L[T]$ 是不可数的. 令 $\langle a_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ 为 $\mathbb{R} \cap L[T]$ 中实数的单一序列. 这个定义在 ω_1 上的函数在 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 中表示着一个实数 a. 由于 $\forall \xi < \omega_1\ (a_\xi \in L[T])$, 我们有 $a \in L[j(T)]$. 根据断言一, $L[j(T)] = L[T]$. 因此 $a \in L[T] \subset \mathrm{V}$. 因此, $j(a) = a$. 这就意味着

$$\{\xi < \omega \mid a_\xi = a\} \in G.$$

因为序列是单一序列, G 又不是平凡的, 所以我们得到一个矛盾. 这样, 断言一蕴涵事实 3.1.5.

我们来证明断言一.

我们需要用到定理 3.16 中树 T 的构造数据. 令 U 为所用到的 κ 上的正规超滤子. 对于 $s \odot t \in \omega^{<\omega} \otimes \omega^{<\omega}$, 令 U_{st} 为由 U 诱导出来的 $T^*_{s,t}$ 上的超滤子. 令 $j_{s\odot t, s'\odot t'}$ 为所用到的同质嵌入映射.

关键点在于: 如果 γ 是 V 中的不可达基数, 那么 γ 在 V$[G]$ 中还是一个不可达基数, 并且 $j(\gamma) = \gamma$. 尤其是有 $j(\kappa) = \kappa$. 在 V$[G]$ 中, 上述超滤子各自生成相应的超滤子: $\bar{U}$ 和 $\bar{U}_{s\odot t}$, 等等.

断言二 $j(U) = \bar{U} \cap M$, $j(U_{s\odot t}) = \bar{U}_{s\odot t} \cap M$.

只需证明不等式 $j(U) \subseteq \bar{U} \cap M$. 设 $X \in j(U)$. 令序列 $\langle X_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle \in U^{\omega_1}$ 在泛型超幂中表示 $\pi^{-1}(X)$. 令 $Y = \bigcap\{X_\xi \mid \xi < \omega_1\}$. 那么 $Y \in U$, 并且 $j(Y) \subseteq X$. 令

$$W = \left\{\gamma \in Y \mid \gamma \text{是不可达基数}\right\}.$$

那么 $W \in U$, 并且 $W = j[W] \subset j(Y) \subseteq X$. 因此断言二得证.

断言三　如果 $h : \kappa \to \mathrm{V}$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 中函数, 那么在 V 中有一个 $H : \kappa \to \mathrm{V}$ 来见证下述事实:

$$\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) = H(\alpha)\} \in \bar{U}.$$

类似地, 对于 $s \odot t \in \omega^{<\omega} \otimes \omega^{<\omega}$, 如果 $h : \kappa^{|s|} \to \mathrm{V}$ 是 $\mathrm{V}[G]$ 中函数, 那么在 V 中有一个 $H : \kappa^{|s|} \to \mathrm{V}$ 来见证下述事实:

$$\{w \in \kappa^n \mid h(w) = H(w)\} \in \bar{U}_{s\odot t}.$$

对于 $\alpha < \kappa$, 设 W_α 为 $\mathbb{B}$ 上的极大冲突子集以及 $Y_\alpha = \left\{x_p^\alpha \mid p \in W_\alpha\right\}$ 满足下述要求:

$$\forall p \in W_\alpha \left(p \Vdash \dot{h}\,(\check{\alpha}) = \check{x}_p^\alpha\right).$$

令 W 满足 $\{\alpha < \kappa \mid W_\alpha = W\} \in U$. 注意 $|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{B}))| < \kappa$. 所以这样的 W 必然存在, 而且唯一. 令 $p \in W \cap G$ 为唯一的条件. 令 $X = \{\alpha < \kappa \mid W_\alpha = W\}$. 对于 $\alpha < \kappa$, 令

$$H(\alpha) = \begin{cases} x_p^\alpha & \text{如果 } \alpha \in X, \\ \varnothing & \text{如果 } \alpha \notin X. \end{cases}$$

于是断言三得证.

断言四　如果 $f : \kappa \to \mathrm{Ord}$ 是 V 中的函数, 那么 M 中必有一个函数 g 来见证下述事实:

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \bar{U}.$$

类似地, 对于 $s \odot t \in \omega^{<\omega} \otimes \omega^{<\omega}$, 如果 $h : \kappa^{|s|} \to \mathrm{Ord}$ 是 V 中函数, 那么在 M 中有一个 $H : \kappa^{|s|} \to \mathrm{V}$ 来见证下述事实:

$$\{w \in \kappa^n \mid h(w) = H(w)\} \in \bar{U}_{s\odot t}.$$

设 $f : \kappa \to \mathrm{Ord}$ 是 V 中的函数. 注意 M 中的每一个序数 β 在 π^{-1} 下的像都是有 V 中的一个函数 $h_\beta : \omega_1 \to \mathrm{Ord}$ 在泛型超幂中表示的. 对于 $\alpha < \kappa$, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 取一个 $\mathrm{V} \ni h_{f(\alpha)} : \omega_1 \to \mathrm{Ord}$ 来表示 $f(\alpha)$. 令 $h(\alpha) = h_{f(\alpha)}$. 根据断言三, 令 $H \in \mathrm{V}$ 来见证

$$\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) = H(\alpha)\} \in \bar{U}.$$

令 $X \in U$ 满足如下要求：X 中的元素都是不可达基数; $\forall \alpha \in X\ (h(\alpha) = H(\alpha))$.

对于 $\xi < \omega_1$, 令 g_ξ 为 V 中的如下定义在 κ 上的函数：

$$g_\xi(\alpha) = (H(\alpha))(\xi),$$

再令 $\bar{g}(\xi) = g_\xi$. 那么 $\bar{g} \in \mathrm{V}$ 并且在泛型超幂中表示某个函数 $\pi^{-1}(g)$, $g \in M$.

对于 $\alpha \in X$, $j(\alpha) = \alpha$, $\pi^{-1}(g(\alpha))$ 是由函数 $\omega_1 \ni \xi \mapsto (H(\alpha))(\xi)$ 所表示. 因为

$$\forall \xi < \omega_1 \left((H(\alpha))(\xi) = h_{f(\alpha)}(\xi)\right),$$

所以 $\pi^{-1}(g(\alpha))$ 是由 $h_{f(\alpha)}$ 所表示. 因此, $g(\alpha) = f(\alpha)$.

断言四得证.

综合断言二~断言四, 我们有下述结论：如果 $f \in \mathrm{V}$ 在 $\mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, U_{s\odot t})$ 中表示一个序数, 那么在 M 中有一个与 f 模 $\bar{U}_{s\odot t}$ 相等的函数 g 在超幂 $\mathrm{ult}\,(M, j\,(U_{s\odot t}))$ 中表示同一个序数. 令

$$j\,(i_{s\odot t}) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Ord}} j\,((i_{s\odot t}) \restriction \mathrm{V}_\gamma)\,.$$

那么, $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \left(j\,(i_{s\odot t})\,(\alpha) = i_{s\odot t}(\alpha)\right)$.

基于这个结论, 应用定理 3.16 证明中树 $T^\dagger$ 的定义, 我们就得到断言一所要的结论：$j(T) = T$. □

我们希望指出的是, 梅格铎定理的额外假设, "ω_1 上存在一个峭壁理想", 并不能完全省掉, 这是因为下面的定理[9]：

定理 3.18 (Silver)　*设 κ 是可测基数, U 是 κ 上的正规测度, $L[U]$ 是由 U 确定的内模型. 那么 $\mathbb{R} \cap L[U]$ 是一个 Σ^1_3 实数集合. $L[U]$ 上的秩序 $<_{L[U]}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是一个 Σ^1_3-关系.*

3.1.5 广泛贝尔特性

前面我们知道根据古典描述集合论的分析, 每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 和 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 实数集合都具有贝尔特性; 至于 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 实数子集是否具备贝尔特性的问题在集合论 ZFC 下并不会有肯定或者否定的答案. 那么在 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 与 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 之间的 $\mathbf{\Delta}^1_2$ 实数集合的情形怎样呢? 是否每一个 $\mathbf{\Delta}^1_2$ 实数子集都一定具有贝尔特性? 稍作分析之后我们发现这个问题实质上是问：是否每一个从贝尔空间 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 到贝尔空间 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 函数在忽略一个稀疏子集之后是一个连续函数? 这看起来应当是一个古典描述集合论的问题. 但是古典描述集合论似乎没有对这个问题给出答案. 进一步的分析表明, 这个古典问题事实上是在问一个后科恩时代的问题：是否每一个从整个贝尔空间 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 到贝尔空间 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 的

9 Jack H. Silver, Measurable cardinals and Δ^1_3 well-orderings. Ann. of Math., (2) 94 (1971), 141-446.

$\mathbf{\Pi}^1_1$ 函数在任何力迫构思 $\mathbb{P}$ 的泛型扩张中都依旧是定义在整个贝尔空间之上? 这样的问题自然就超出了古典描述集合论的范围, 因而也便成为一个很有趣的问题. 在这一节里, 我们对这一问题的更为一般的形式展开讨论. 我们分析的结果是将 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 和 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 所共同享有的一种树的表示特性推广到更一般的情形上去. 我们先从实数子集的贝尔特性的强化开始. 这一节的内容主要取自文献10.

首先, 我们以为贝尔空间 $\mathbb{N}^\omega$ 配置拓扑结构 (见定义 I.3.23) 的方式对任意的由无穷基数 λ 所确定的集合 λ^ω 配置一种拓扑结构. 对于任意的有限序列 $s \in \lambda^{<\omega}$, 令

$$N_s = \{ f \in \lambda^\omega \mid s \subset f \}.$$

称 $X \subseteq \lambda^\omega$ 是一个开集当且仅当

$$\forall f \in X\, \exists s \in \lambda^{<\omega}\ (s \subset f \wedge N_s \subseteq X).$$

这些集合 λ^ω 就形成一个拓扑空间. 完全和贝尔空间一样, 我们可以在这个拓扑空间上引进稠密子集的概念、无处稠密子集的概念以及稀疏子集的概念. 同样地, 在这个拓扑空间上, 任意可数个稠密开子集的交还是一个稠密子集. 因此, 在这个空间上我们自然就有贝尔特性之概念. 我们将这些定义以及事实验证留给有兴趣的读者.

其次, 在点集拓扑学里, 给定一个无穷的拓扑空间 (X,τ), 其中 τ 是 X 的开子集的集合, 称 (X,τ) 是一个豪斯多夫 (Hausdroff) 空间当且仅当对于 X 的任意的非空闭子集 C 以及任意的 $a \in (X - C)$, 一定存在一个包括 a 的开子集 $D \ni a$ 来实现等式: $D \cap C = \varnothing$; 称 (X,τ) 是一个紧致空间 (简称紧空间) 当且仅当对于任意的一个 $F \subset \tau$, 如果 $\forall a \in X\, \exists O \in F\, (a \in O)$ (即 F 是 X 的一个开覆盖), 那么一定有 F 的一个有限子集合 $E \subset F$ 来覆盖 X, 即

$$\forall a \in X\, \exists O \in E\, (a \in O).$$

比如, 实数子集闭区间 $[0,1]$ 在实数轴上的序拓扑 (或者说距离拓扑) 下就是一个紧豪斯多夫空间.

定义 3.9 (冯-Magidor-Woodin)　设 $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

(1) 称 A 是一个广泛贝尔集合当且仅当对于任意一个紧豪斯多夫空间 X, 对于任意的连续函数 $f : X \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $f^{-1}[A]$ 是 X 上的一个稀疏子集.

10 Q. Feng, M. Magidor and W. H. Woodin, Universally Baire sets of reals. In “Set Theory of the Continuum”, (H. Judah, W.Just, and W. H. Woodin, eds.) Berkeley, CA 1989, Mathematical Sciences Research Institute Publications 26, New York: Springer-Verlag, 1992.

(2) 设 λ 是一个无穷基数. 称 A 是一个 λ-广泛贝尔集合当且仅当对于任意的连续函数 $f:\lambda^\omega\to\mathbb{N}^\mathbb{N}$, 集合 A 在 f 下的原像集合 $f^{-1}[A]$ 在拓扑空间 λ^ω 上具有贝尔特性.

根据定义, 我们立刻得到下面的例子和事实.

例 3.3 (1) 如果 $A\subseteq\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个开集, 那么 A 是一个广泛贝尔集合;

(2) 如果 $A\subseteq\mathbb{N}^N$ 是一个广泛贝尔集合, 那么 $\mathbb{N}^\mathbb{N}-A$ 也是一个广泛贝尔集合;

(3) 如果 $\{A_n\mid n<\omega\}$ 是可数个广泛贝尔集合, 那么 $\bigcup\limits_{n<\omega}A_n$ 也是一个广泛贝尔集合;

(4) 如果 $A\subseteq\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个广泛贝尔集合, $f:\mathbb{N}^\mathbb{N}\to\mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个连续函数, 那么 $f^{-1}[A]$ 也是一个广泛贝尔集合.

命题 3.3 A 是一个广泛贝尔集合当且仅当对于任意一个无穷基数 λ, A 都是 λ-广泛贝尔集合.

证明 (练习.) □

后面我们将会看到每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 实数集合 (因而每一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 实数集合) 都是广泛贝尔集合. 因此, 广泛贝尔集合是一个比起由解析子集生成的 σ-代数中的成员更为广泛的概念. 事实上, 广泛贝尔集合具有很强的包容性和伸缩性. 也就是说, 它的外延是可以随集合论论域中的大基数的存在性而发生变化的. 比如, 如果存在一个超紧基数, 那么每一个在 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集都是广泛贝尔集合; 而当 $\mathrm{V}=L$ 时, 并非每一个 $\mathbf{\Delta}^1_2$ 实数子集都是广泛贝尔集合. 也许正是这样的包容性和伸缩性才得以令广泛贝尔性质展现出联结大基数特性、实数正则性以及力迫构思泛型扩张中的不变性的巨大本事.

我们先来看看广泛贝尔特性的多种特点.

定理 3.19 (冯-Madidor-Woodin) 设 $A\subseteq\mathbb{N}^\mathbb{N}$. 设 λ 是一个无穷基数. 那么下述命题对等:

(1) 存在两棵势严格大于 λ 的树 T 与 T^* 来实现下述等式:

(a) $A=p[T]$ 以及 $\mathbb{N}^\mathbb{N}-A=p\,[T^*]$;

(b) $\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} p[T]\cup p\,[T^*]=\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

(2) 存在两棵势严格大于 λ 的树 T 与 T^* 来实现下述等式:

(a) $A=p[T]$ 以及 $\mathbb{N}^\mathbb{N}-A=p\,[T^*]$;

(b) 对于任意的力迫构思 $\mathbb{P}=(P,\leqslant)$, 如果 $|P|\leqslant\lambda$, 那么

$$\Vdash_{\mathbb{P}} p[T]\cup p\,[T^*]=\mathbb{N}^\mathbb{N}.$$

(3) A 是一个 λ-广泛贝尔集合.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 如果 $|P|\leqslant\lambda$, 那么 $\mathbb{P}\times\mathrm{Col}(\omega,\lambda)$ 与 $\mathrm{Col}(\omega,\lambda)$ 同构. 应用树有秩特点的不变性即得.

(2) ⇒ (1). (1) 是 (2) 的特殊情形.

(1) ⇒ (3). 令 T 和 T^* 为 (1) 所提供. 设 $f : \lambda^\omega \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个连续函数. 我们来证明 $f^{-1}[A]$ 具有贝尔特性.

令 $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega, \lambda))$ 为可数力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, \lambda)$ 的完备布尔代数. 令 κ 是一个足够大的正则基数以至于所有相关的对象集合都在 $\mathscr{H}_\kappa$ 之中.

对于 V 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子 G, 在 $V[G]$ 中, 令

$$g = \bigcup G : \omega \to \lambda,$$

以及令 $f(g)$ 为满足下述要求的唯一的 $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$: $\forall n < \omega \left(f^{-1}\left[N_{x\restriction n}\right] \in G\right)$.

令 $B_0 = \left\|\check{f}\,(\dot{g}) \in p[\check{T}]\right\|$ 以及 $B_1 = \left\|\check{f}\,(\dot{g}) \in p\left[\check{T^*}\right]\right\|$.

断言一 $B_0 \triangle f^{-1}[A]$ 是一稀疏子集.

为了证明这个断言, 我们需要将例 I.3.7 中贝尔空间 $\mathcal{N}$ 上的 Banach-Mazur 赛事拓展到 λ^ω 上来.

给定 $X \subseteq \lambda^\omega$, 由 X 所确定的 Banach-Mazur 赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 定义如下: 张三与李四依次轮流展示一个非空开集,

$$C_0 \supset D_0 \supset C_1 \supset D_1 \supset \cdots \supset C_n \supset D_n \supset \cdots,$$

其中 C_i 是张三在轮到他反应时所展示的非空开集, D_i 则是李四在轮到他反应时展示的非空开集; 赛事的规则是所展示的开集必须是对手所展示的开集的子集; 谁犯规, 谁输掉本局; 当两位都不曾犯规, 在经历了 ω 步之后, 他们合作产生出空间 λ^ω 上的一个单调递降开集序列的交集

$$D = \bigcap\{\, C_i \mid i < \omega\} = \bigcap\{\, D_i \mid i < \omega\},$$

如果 $D \subseteq X$, 那么张三赢得本赛局; 如果 $D \not\subseteq X$, 那么李四赢得本赛局.

与 Banach 定理 I.3.29 中的 (2) 相对应的是下述 Oxtoby 定理[11]:

定理 3.20 (Oxtoby) *如果 σ 是张三在赛事 $\mathscr{G}_X^*$ 中的一个稳赢策略, 并且 C_0 是张三的开局, 即 $C_0 = \sigma(\varnothing)$, 那么 $C_0 - X$ 是一个稀疏子集.*

这个定理的证明与 Banach 定理 (定理 I.3.29) 中 (2) 的证明一样, 我们省略它的证明.

现在我们来证明断言一. 为此, 我们证明 $B_0 - f^{-1}[A]$ 与 $B_1 - f^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right]$ 都是稀疏的.

根据对称性, 我们可以假设 $B_0 \neq \varnothing$, 并且仅仅证明 $B_0 - f^{-1}[A]$ 是稀疏的.

让我们先来考察一个简单事实:

11 J. Oxtoby, The Banach–Mazur game and Banach category theorem. in: Contributions to the theory of games, Ann. Math. Studies, 1957, 39: 159-163.

事实 3.1.6 设 $M \prec \mathscr{H}_\kappa$ 是一个可数同质子模型, 并且 M 包括了所有相关的对象集合. 如果 G 是 M 之上的一个 $\mathbb{B}$-泛型超滤子, 那么

$$f(g) \in p[T] \iff B_0 \in G.$$

假设 $B_0 \in G$. 那么 $B_0 \Vdash f(\dot{g}) \in p\left[\check{T}\right]$. 因此,

$$M \models B_0 \Vdash f(\dot{g}) \in p\left[\check{T}\right].$$

于是, $M[G] \models f(g) \in p[T]$. 根据向上的绝对不变性, $f(g) \in p[T]$. 假设 $B_0 \notin G$. 那么 $B_1 \in G$. 同样的理由表明 $f(g) \in p\left[T^*\right]$. 事实得证.

现在我们来验证 $B_0 - f^{-1}[A]$ 是一个稀疏子集. 为此, 我们验证张三在赛事 $\mathscr{G}^*\left(f^{-1}[A]\right)$ 中有一个以 B_0 为开局的稳赢策略 σ.

固定一个具备下述特点的双射 $\pi : \omega \to \omega \times \omega$:

$$\forall n < \omega\, \forall k < \omega\, \forall \ell < \omega\ (\pi(n) = (k, \ell) \to \ell < n).$$

令 $C_0 = B_0$ 为张三的开局. 设 D_1 为李四的应对. 此时张三选择 $\mathscr{H}_\kappa$ 的一个包括所有相关对象集合的可数同质子模型 M_0; 并且将 M_0 中的完备布尔代数 $\mathbb{B}$ 中的所有稠密子集罗列出来:

$$\langle C_{n0} \mid n < \omega \rangle;$$

令 $G_0 \ni D_1$ 为 M_0 上的一个 $\mathbb{B}$-泛型超滤子; 令 $x_0 = f(g_0)$; 根据上面的事实 3.1.6, $x_0 \in p[T]$; 令 k_0 足够大以至于

$$\exists D \in C_{00}\ \left(f^{-1}\left[N_{x_0 \restriction k_0}\right] \subseteq D \cap D_1\right).$$

张三便以 $C_2 = f^{-1}\left[N_{x_0 \restriction k_0}\right]$ 作为应对.

递归地, 设 D_{2n+1} 是李四的应对. 张三选择 $\mathscr{H}_\kappa$ 的一个可数同质子模型

$$M_n \supset M_{n-1} \cup \{D_{2n+1}\};$$

并且将 M_n 中的完备布尔代数 $\mathbb{B}$ 中的所有稠密子集罗列出来:

$$\langle C_{in} \mid i < \omega \rangle;$$

令 $G_n \ni D_{2n+1}$ 为 M_n 上的一个 $\mathbb{B}$-泛型超滤子; 令 $x_n = f(g_n)$; 根据上面的事实 3.1.6, $x_n \in p[T]$ 并且 $x_n \restriction k_{n-1} = x_{n-1} \restriction k_{n-1}$; 令 k_n 足够大以至于

$$\exists D \in C_{\pi(n)}\ \left(f^{-1}\left[N_{x_n \restriction k_n}\right] \subseteq D \cap D_{2n+1}\right).$$

张三便以 $C_{2n+2} = f^{-1}[N_{x_n \restriction k_n}]$ 作为应对.

这样就定义了张三的一个策略 σ. 我们来验证 σ 是张三的一个稳赢策略.

令 $M_\omega = \bigcup_{n<\omega} M_n$. 那么 $M_\omega \prec \mathscr{H}_\kappa$. 令 G 为由本局竞赛所展示的结果之集

$$\{C_{2n}, D_{2n+1} \mid n < \omega\}$$

生成的滤子. 那么 G 是 M_ω 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子. 因此,

$$\bigcap_{n<\omega} C_{2n} = \bigcap_{n<\omega} D_{2n+1} \subseteq f^{-1}[A].$$

从而 σ 的确是张三的一个稳赢策略.

断言一得证. 由此 (1) 蕴涵 (3) 便得证.

(3) $\Rightarrow$ (1). 根据 (3), 对于每个连续函数 $f : \lambda^\omega \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $f^{-1}[A]$ 和 $f^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right]$ 都有贝尔性质, 也就是说, 我们能够找到两个开子集 B_0 和 B_1 以及一个稠密开子集的序列 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 来实现下述等式：

$$f^{-1}[A] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n = B_0 \cap \bigcap_{n<\omega} D_n,$$

以及

$$f^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n = B_1 \cap \bigcap_{n<\omega} D_n.$$

考虑可数化力迫构思 $\mathbb{P} = \mathrm{Col}(\omega, \lambda)$. 将每一个 $\mathbb{P}$-实数名字 $\dot{x}$ 与下述集合等同起来：

$$\left\{(p, (n, m)) \;\middle|\; p \Vdash (n, m)\check{} \in \dot{x}\right\}.$$

令 N 为这些名字的集合. 注意 $|N| = \lambda$.

考虑下述完备距离空间 S:

$$S = \{f \mid f(0) \in N \wedge \forall n < \omega\ (f(n+1) \in \lambda)\} = N \times \lambda^\omega.$$

注意, 对于 $a \in N$, 令 $B_a = \{f \in S \mid f(0) = a\}$. 那么每一个 B_a 都与 λ^ω 同胚, 并且

$$S = \bigcup \{ B_a \mid a \in N\}$$

以及如果 $X \subset \{B_a \mid a \in N\}$, 那么 $\bigcup X$ 既是 S 的一个开子集也是它的一个闭子集.

设 $e : S \to \omega^\omega$ 是一个连续函数. 那么根据上面的观察 $e^{-1}[A]$ 与 $e^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right]$ 在 S 上都有贝尔特性.

现在我们来定义一个特殊的函数 e: 对于 $f \in S$, 令

$$e(f) = \{(n,m) \mid \exists k\ ((\langle f(1),\cdots,f(k)\rangle,(n,m)) \in f(0))\}.$$

那么 $e: S \to \omega^\omega$, 并且在 S 的一个 G_δ 子集 S' 上, $e: S' \to \omega^\omega$ 是连续的. 由于 G_δ 集合 S' 与 S 拓扑同胚, $e^{-1}[A]$ 与 $e^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right]$ 在 S 上都有贝尔特性.

令 B_0 和 B_1 以及一个稠密开子集的序列 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 来实现下述等式:

$$e^{-1}[A] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n = B_0 \cap \bigcap_{n<\omega} D_n,$$

以及

$$e^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n = B_1 \cap \bigcap_{n<\omega} D_n.$$

注意我们有下述事实:

(a) $e\left[e^{-1}[A] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n\right] = A$;

(b) $e\left[e^{-1}\left[\mathbb{N}^\mathbb{N} - A\right] \cap \bigcap_{n<\omega} D_n\right] = \omega^\omega - A$;

(c) $B_0 \cup B_1$ 是一个稠密开子集.

让我们来看看 (a) 何以为真. 设 $x \in A$. 令

$$\tau = \left\{(p,(n,m)) \;\middle|\; p \in \lambda^{<\omega} \wedge (n,m) \in x\right\}.$$

那么 τ 是 x 的一个典型名字. 考虑下述开闭子集

$$B_x = \{f \in S \mid f(0) = \tau\}.$$

对于 $f \in B_x$, 必有 $e(f) = x$, 并且

$$\left\{f \in B_x \;\middle|\; f \in \bigcup_{n<\omega} D_n\right\}$$

在 B_x 中是稠密的. 所以 (a) 成立.

现在我们来定义树 T 和 T^*.

定义 $(\sigma,(\tau,p_0,\cdots,p_k)) \in T$ 当且仅当 $\sigma \in \omega^{<\omega}$, $\tau \in N$,

$$\forall i \leqslant k\ \left(p_i \in \lambda^{<\omega} \wedge (p_0 + \cdots + p_i) \Vdash \forall j < \check{i}\,(\tau(j) = \check{\sigma}(j))\right),$$

以及

$$\exists s \in \lambda^{<\omega}\, \forall f \in S\ \left(\langle\tau\rangle + p_0 + \cdots + p_k + s \subset f \to f \in B_0 \cap \bigcap_{j\leqslant k} D_j\right).$$

定义 $(\sigma,(\tau,p_0,\cdots,p_k))\in T^*$ 当且仅当 $\sigma\in\omega^{<\omega}$, $\tau\in N$,

$$\forall i\leqslant k\,\left(p_i\in\lambda^{<\omega}\wedge(p_0+\cdots+p_i)\Vdash\forall j<\check{i}\,(\tau(j)=\check{\sigma}(j))\right),$$

以及

$$\exists s\in\lambda^{<\omega}\,\forall f\in S\left(\langle\tau\rangle+p_0+\cdots+p_k+s\subset f\to f\in B_1\cap\bigcap_{j\leqslant k}D_j\right).$$

这样, 我们定义了两棵势严格大于 λ 的树.

断言二　下述事实成立:

(i) $A=p[T]$, $\omega^\omega-A=p\left[T^*\right]$;

(ii) $\mathrm{Col}(\omega,\lambda)\Vdash p\left[\check{T}\right]\cup p\left[\check{T^*}\right]=\omega^\omega$.

(i) 由等式 $e\left[B_0\cap\bigcap_{j<\omega}D_j\right]=A$ 以及 $e\left[B_1\cap\bigcap_{j<\omega}D_j\right]=\omega^\omega-A$ 给出.

欲见 (ii) 成立, 设 $\hat{x}$ 为实数的一个典型名字. 令

$$B_{\hat{x}}=\{f\in S\mid f(0)=\hat{x}\}.$$

它是一个既闭且开的子集. 因此, 集合

$$B_{\hat{x}}-\left((B_0\cup B_1)\cap\bigcap_{n<\omega}D_n\right)$$

是一个稀疏集合. 如果 G 是 V 上的一个 $\mathrm{Col}(\omega,\lambda)$-泛型超滤子, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令

$$g(0)=\hat{x}\wedge\forall n<\omega\,(g(n+1)=G(n)),$$

那么 $g\in B_{\hat{x}}\cap(B_0\cup B_1)\cap\bigcap_{n<\omega}D_n$. 不妨假设

$$g\in B_{\hat{x}}\cap B_0\cap\bigcap_{n<\omega}D_n.$$

那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中 g 就见证 $x=\hat{x}/G\in p[T]$.

这就完成了 (3) $\Rightarrow$ (1) 的证明. □

推论 3.14　*设 $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么下述命题对等:*

(1) A 是广泛贝尔集合.

(2) 对于任意的无穷基数 λ, 对于任意的连续函数 $f:\lambda^\omega\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f^{-1}[A]$ 具有贝尔特性.

(3) 存在 $\omega \times \mathrm{Ord}$ 上的两个树 T 与 T^* 来见证下述事实:

$$A = p[T] \wedge \mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A = p\left[T^*\right]$$

以及对于任意的力迫构思 $\mathbb{P}$ 都有

$$\Vdash_{\mathbb{P}} p[T] \cup p\left[T^*\right] = \omega^{\omega}.$$

证明 由命题 3.3 以及定理 3.19 证明中树定义的抽象特性即得. □

推论 3.15 每一个解析子集 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 从而每一个余解析子集, 都是广泛贝尔集合.

证明 根据解析子集的树表示特征, 如果 A 是解析子集, 那么必有两棵类树 T 与 T^* 来实现推论 3.14 中 (3) 的要求, 因此 A 就是广泛贝尔集合. □

由于每一个 $\mathbf{\Sigma}_1^1$ 和 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合都是广泛贝尔集合, 自然的问题就是 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合是否也是广泛贝尔集合? 我们会发现这个问题的答案是依赖于集合论论域中的高阶无穷的存在性. 首先, 利用上面的特征定理, 我们来揭示广泛贝尔实数集合的其他正则特性. 我们会看到每一个广泛贝尔集合都是勒贝格可测的; 都具有拉姆齐特性; 都具有伯恩斯坦特性. 由此可见广泛贝尔集概念是解析集概念在 ZFC 理论之下的合适的一般化. 从广泛贝尔集合的这些正则性中也就看到前述问题在 ZFC 下难以有终结答案. 然后我们应用力迫构思泛型扩张的不变性来揭示确保 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合是广泛贝尔集合的条件.

设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 称 A 具有**拉姆齐特性**当且仅当 $\exists a \in [\omega]^{\omega}\ ((a)^{\omega} \subset A \vee (a)^{\omega} \cap A = \varnothing)$, 其中,

$$(a)^{\omega} = \left\{f_x \mid x \in [a]^{\omega} \wedge f_x : (\omega, \in) \cong (x, \in)\right\}.$$

定理 3.21 (冯-Magidor-Woodin) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个广泛贝尔集合, 那么 A 是勒贝格可测的, 并且 A 具有拉姆齐特性.

证明 设 $\lambda \geqslant 2^{\aleph_0}$. 令 T 和 T^* 为两棵具备定理 3.19 中 (2) 的性质的树. 这样,

(a) $A = p[T]$ 以及 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A = p\left[T^*\right]$;

(b) 对于任意的力迫构思 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$, 如果 $|P| \leqslant \lambda$, 那么

$$\Vdash_{\mathbb{P}} p[T] \cup p\left[T^*\right] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

欲证 A 是勒贝格可测的, 我们应用测度布尔代数 $\mathbb{B}_m$. 这是由实数集合的全体具有正勒贝格测度的博雷尔集合模零测集理想所得到的完备布尔代数. 具体而言, 令 $(\mathbb{R})$ 为由定义 I.3.21 所确定的实数轴上的博雷尔代数; $\mathcal{I}_m$ 是零测集理想;

$$\mathcal{I}_m^b = \{A \in \mathcal{I}_m \mid X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\};$$

$\mathcal{I}_m^b$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的一个 σ-可加理想; 那么 $\mathbb{B}_m = \mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{I}_m^b$. 根据假设, 有

$$\Vdash_{\mathbb{B}_m} p[T] \cup p\,[T^*] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

令 $\dot{x}_G$ 为一个随机实数的典型名字. 令

$$B_0 = \|\dot{x}_G \in p[T]\| \text{ 以及 } B_1 = \|\dot{x}_G \in p\,[T^*]\|\,.$$

断言一　$B_0 \triangle A$ 是一个零测集.

由断言一得知 A 是勒贝格可测的.

为证明断言一, 令 κ 是一个足够大的正则基数以至于所有的相关对象集合的幂集都在 $\mathscr{H}_\kappa$ 之中. 设 $M \prec \mathscr{H}_\kappa$ 为一个包含所有相关对象的可数同质子模型.

事实 3.1.7　如果 x 是 M 之上的一个随机实数, 那么 $x \in p[T] \iff x \in B_0$.

设 x 是 M 之上的一个随机实数.

设 $x \in B_0$. 那么 $B_0 \Vdash \dot{x}_G \in p[T]$. 因此

$$M \models B_0 \Vdash \dot{x}_G \in p[T].$$

于是, $M[x] \models x \in p[T]$. 从而 $x \in p[T] = A$.

设 $x \notin B_0$. 那么 $x \in B_1$. 因此, $B_1 \Vdash \dot{x}_G \in p\,[T^*]$. 相同的分析表明 $x \in p\,[T^*]$.

由于 M 是可数的, 在 M 中只有可数多个测度代数的极大冲突子集. 又因为测度代数满足可数链条件, 我们得到结论: $B_0 \triangle A$ 是一个零测集. 断言一得证.

为证明 A 具有拉姆齐特性, 我们用 Mathias 力迫构思 $\mathbb{B}$(见练习 II.3.13). Mathias 力迫构思是普利克瑞力迫构思的 ω 版本:

$$P = \left\{(t, X) \;\middle|\; t \in [\omega]^{<\omega} \wedge X \in [\omega]^\omega \right\};$$

P 上的偏序为

$$(t, X) \leqslant (t', X') \leftrightarrow t' \subset t \wedge X \subset X' \wedge (t - t') \subset X'.$$

令 $\dot{G}$ 为 V 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子 G 的典型名字. 在 V$[G]$ 中, 令

$$x_G = \bigcup \left\{ s \in [\omega]^{<\omega} \;\middle|\; \exists X \in [\omega]^\omega \; ((s, X) \in G) \right\}.$$

那么 $x_G \in [\omega]^\omega$ 是由 G 所确定的唯一的实数 (严格单调递增的自然数序列). 令 $\dot{x}_G$ 为这个 Mathias 泛型实数的典型名字. 在 V$[G]$ 中, 下述事实成立: 如果 $y \in [x_G]$, 那么

$$H = \{(y \cap n, B) \mid B \in [\omega]^\omega \wedge \exists m < \omega \; (n < m \wedge (y - m) \subset B)\}.$$

那么 H 是 V 上的 $\mathbb{B}$-泛型超滤子, 并且 $y = \dot{x}_G/H$. 这些都是 Mathias 力迫构思的基本性质. 由于篇幅所限, 我们在此省略这些基本性质的论证. 有兴趣的读者可参见文献12.

现在我们有

$$\Vdash_{\mathbb{B}} p[T] \cup p[T^*] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

不失一般性, 我们可设

$$(\varnothing, X) \Vdash \dot{x}_G \in p[T].$$

设 κ 是一个足够大的正则基数. 令 $M \prec \mathscr{H}_\kappa$ 为一个包括所有相关对象集合的可数同质子模型. 令 $g \in [X]^\omega$ 为 M 之上的 Mathias 泛型实数. 那么

$$M[g] \models g \in p[T],$$

并且如果 $h \in [g]^\omega$, 那么 $M[h] \models h \in p[T]$. 这样, $\forall x \in [g]^\omega\ (x \in p[T])$. □

这样, 作为推论, 我们得到下述 Galvin-Prikry 定理以及 Silver 定理.

推论 3.16 (Galvin-Prikry) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个博雷尔集合, 那么 A 具有拉姆齐特性.

推论 3.17 (Silver) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个解析集合, 那么 A 具有拉姆齐特性.

现在让我们来看看伯恩斯坦特性.

设 $A \subseteq 2^\omega$. 称 A 具有**伯恩斯坦特性**当且仅当对于每一个完备子集 P, 或者 $A \cap P$ 包含一个完备子集, 或者 $(\omega^\omega - A) \cap P$ 包含一个完备子集.

例 3.4 令 $\mathcal{B} = \{X \subseteq 2^\omega \mid X \text{ 具有伯恩斯坦特性}\}$. 那么, 每一个 2^ω 的闭子集都具有伯恩斯坦特性; $\mathcal{B}$ 是一个 σ-代数.

例 I.3.24 的证明中所构造出来的集合就不具备伯恩斯坦特性.

定理 3.22 (冯-Magidor-Woodin) 如果 $A \subset 2^\omega$ 是广泛贝尔集合, 那么 A 具有伯恩斯坦特性.

证明 设 $A \subseteq 2^\omega$ 是一个广泛贝尔集合. 设 $\lambda \geqslant 2^{\aleph_0}$. 令 T 和 T^* 为两棵具备定理 3.19 中 (2) 的性质的树. 这样,

(a) $A = p[T]$ 以及 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A = p[T^*]$;

(b) 对于任意的力迫构思 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$, 如果 $|P| \leqslant \lambda$, 那么

$$\Vdash_{\mathbb{P}} p[T] \cup p[T^*] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

回顾一下完备树的定义 (定义 I.3.26): $p \subseteq 2^{<\omega}$ 是一棵完备树当且仅当 $p \neq \varnothing$ 并且

$$\forall s \in p\, \exists t \in 2^{<\omega}\ (s \subseteq t \wedge, (t + \langle 0 \rangle) \in p \wedge (t + \langle 1 \rangle) \in p).$$

12 T. Jech. Set Theory. Berlin, New York: Springer, 2003.

根据康托尔空间 2^ω 上的完备子集的表示定理 (命题 I.3.6), $X \subseteq 2^{<\omega}$ 的一个完备子集当且仅当存在 $2^{<\omega}$ 的一棵完备子树 p 来实现等式 $[p] = X$, 即完备集合 X 的元素恰好就是完备树 p 的无穷树枝.

令 $\mathbb{P}$ 为 Sacks 力迫构思 (见练习 II.3.14), 即

$$P = \left\{ p \subseteq 2^{<\omega} \mid p \text{是一棵完备树} \right\},$$

对于两棵完备树 p 和 q, $p \leqslant q \leftrightarrow p \subset q$.

设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 令

$$x_G = \bigcup \left\{ s \in 2^{<\omega} \mid \forall p \in G \ (s \in p) \right\}.$$

那么, $x_G : \omega \to \{0, 1\}$, 即 $x_G \in 2^\omega$. x_G 被称为一个 Sacks 实数. 令 $\dot{x}_S$ 为 Sacks 实数的一个名字.

断言 如果 $p \Vdash \dot{x}_S \in p[T]$, 那么存在一棵完备树 $q \leqslant p$ 来实现后述不等式: $[q] \subseteq p[T]$.

为证明这个断言, 考虑下述赛事 $\mathscr{G}^{**}(A)$: 张三与李四依次轮流展示一棵完备树,

$$p_0 \supset q_0 \supset p_1 \supset q_1 \supset \cdots \supset p_n \supset q_n \supset \cdots,$$

其中 p_i 是张三在轮到他反应时所展示的完备树, q_i 则是李四在轮到他反应时展示的完备树; 赛事的规则是所展示的完备树必须是对手此前所展示的完备树的子树; 谁犯规, 谁输掉本局; 当两位都不曾犯规, 在经历了 ω 步之后, 他们合作产生出完备树 $2^{<\omega}$ 的两个具有共同交集的单调递降完备子集序列:

$$D = \bigcap_{n<\omega} [p_n] = \bigcap_{n<\omega} [q_n],$$

如果 $D \subseteq A$, 那么张三赢得本赛局; 如果 $D \not\subseteq A$, 那么李四赢得本赛局.

关于这个赛事, 我们有如下事实:

事实 3.1.8 *如果 $p \Vdash \dot{x}_S \in p[T]$, 那么张三有一个以条件 $p_0 = p$ 开局的稳赢策略 σ.*

我们先来证明这个事实蕴涵上面的断言. 设 $p \Vdash \dot{x}_S \in p[T]$. 根据上面的事实, 令 σ 为张三以 $p_0 = p$ 开局的稳赢策略. 利用这个 σ, 我们来定义一个从 $2^{<\omega}$ 到所有比 p 强的条件的集合上的具备下述特点的映射

$$2^{<\omega} \ni t \mapsto \left(p_t, q_{t+\langle 0 \rangle}, q_{t+\langle 1 \rangle}\right) \in P^3.$$

(i) 对于 $t \in 2^{<\omega}$, $q_{t+\langle 0 \rangle} \leqslant p_t \leqslant p$, $q_{t+\langle 1 \rangle} \leqslant p_t$, $q_{t+\langle 0 \rangle} \perp q_{t+\langle 1 \rangle}$, 以及

$$p_t = q_{t+\langle 0 \rangle} \cup q_{t+\langle 1 \rangle};$$

(ii) 对于 $f \in 2^\omega$, 完备树序列 $\langle p_{f\upharpoonright n}, q_{f\upharpoonright(n+1)} \mid n < \omega\rangle$ 是一场张三使用稳赢策略 σ 应对的赛局的结果, 并且 $\bigcap\{[p_{f\upharpoonright n}] \mid n < \omega\}$ 是一个单点集 $\{f^*\}$;

(iii) 映射 $2^\omega \ni f \mapsto f^* \in A$ 是一个连续单射.

令 $p_\varnothing = p$. 令 $s \in p_\varnothing$ 为 $p_\varnothing$ 的第一个分叉点, 即

$$s + \langle 0\rangle \in p_\varnothing \wedge s + \langle 1\rangle \in p_\varnothing \wedge p_\varnothing = (p_\varnothing)_{s+\langle 0\rangle} \cup (p_\varnothing)_{s+\langle 1\rangle}.$$

令 $q_{\langle 0\rangle} = (p_\varnothing)_{s+\langle 0\rangle}$ 以及 $q_{\langle 1\rangle} = (p_\varnothing)_{s+\langle 1\rangle}$.

给定 $t \in 2^{<\omega}$, 并且假设 p_t 已经有定义, 且对于 $k < |t|$, $q_{(t\upharpoonright k)+\langle 0\rangle}$ 和 $q_{(t\upharpoonright k)+\langle 1\rangle}$ 也都已经有定义, 并且合乎必须遵从的要求. 我们需要定义

$$q_{t+\langle 0\rangle}, q_{t+\langle 1\rangle}, p_{t+\langle 0\rangle}, p_{t+\langle 1\rangle}.$$

为此, 令 $s \in p_t$ 为完备树 p_t 的第一个分叉点. 令

$$q_{t+\langle 0\rangle} = (p_t)_{s+\langle 0\rangle} \text{ 以及 } q_{t+\langle 1\rangle} = (p_t)_{s+\langle 1\rangle}.$$

再令

$$p_{t+\langle 0\rangle} = \sigma\left(p_\varnothing, q_{t\upharpoonright 1}, p_{t\upharpoonright 1}, \cdots, p_t, q_{t+\langle 0\rangle}\right),$$

以及

$$p_{t+\langle 1\rangle} = \sigma\left(p_\varnothing, q_{t\upharpoonright 1}, p_{t\upharpoonright 1}, \cdots, p_t, q_{t+\langle 1\rangle}\right).$$

这就完成了递归定义. 由定义可见我们所设置的目标得以实现. 根据 (iii), 我们就得到断言所要的结果.

现在我们来证明事实 3.1.8. 设 $p \Vdash \dot{x}_S \in p[T]$. 设 κ 为一个足够大的正则基数.

固定一个具备下述特点的双射 $\pi : \omega \to \omega \times \omega$:

$$\forall n < \omega\, \forall k < \omega\, \forall \ell < \omega\ (\pi(n) = (k, \ell) \to \ell < n).$$

令 $\sigma(\varnothing) = p_0 = p$ 为张三的开局. 设 $q_0 \leqslant p_0$ 是李四的应对. 令 $M_0 \prec \mathscr{H}_\kappa$ 为一个包括所有相关对象集合的可数同质子模型. 令 $\langle C_{n0} \mid n < \omega\rangle$ 为 $\mathbb{P}$ 的在 M_0 中的全部稠密子集的列表. 令 $G_0 \ni q_0$ 为 M_0 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 令 $x_0 = (\dot{x}_G)/G_0$. 那么 $x_0 \in p[T]$. 令 $p_1 \in C_{00}$ 具备下述特点:

$$p_1 \leqslant q_0 \wedge p_1 \Vdash \dot{(x)}_G(0) = x_0(0).$$

令 $\sigma(p_0, q_0) = p_1$ 为张三在李四展示 q_0 之后的应对.

现在假设 q_n 为李四的应对. 张三先取一个可数的 $M_n \prec \mathscr{H}_\kappa$ 以至于

$$\{q_n\} \cup M_{n-1} \subset M_n;$$

再将 M_n 中的 $\mathbb{P}$ 的全部稠密子集罗列出来：$\langle C_{mn} \mid m < \omega\rangle$；然后再取一个 M_n 上的包括了 q_n 的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子 G_n. 令 $x_n = (\dot{x}_G)/G_n$. 那么

$$x_n \in p[T] \text{ 并且 } x_n \restriction n = x_{n-1} \restriction n.$$

令 $p_{n+1} \in C_{\pi(n)}$ 来满足下述要求：

$$p_{n+1} \leqslant q_n \wedge p_{n+1} \Vdash (\dot{x})_G(n) = x_n(n).$$

最后张三以此 p_{n+1} 作为他在李四展示了 q_n 之后的应对, 即

$$p_{n+1} = \sigma(p_0, q_0, \cdots, p_n, q_n).$$

这就定义了张三的一个策略 σ. 我们来验证张三依此赢得本局.

令 $M_\omega = \bigcup_{n<\omega} M_n$. 那么 $M_\omega \prec \mathscr{H}_\kappa$. 令 G_ω 为赛局结果序列

$$\langle p_0, q_0, p_1, q_1, \cdots, p_n, q_n, \cdots\rangle$$

所生成的滤子. 那么 G_ω 是 M_ω 上的一个 $\mathbb{P}$-泛型超滤子, 并且

$$\bigcap_{n<\omega} [p_n] = \bigcap_{n<\omega} [q_n] = \{(\dot{x}_G)/G_\omega\} \subset p[T]. \qquad \square$$

定理 I.3.24 的证明表明存在不具备伯恩斯坦特性的实数集合; 练习 I.3.3 和练习 I.3.4 分别表明由定义 I.3.20 所描述的维塔利集合既不具备贝尔特性也不是勒贝格可测的; 这些例子与上面的广泛贝尔集合正则性定理一起就表明由全体广泛贝尔集合构成的 σ-代数是 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ 的一个真子集. 那么这个代数之中到底都包括了哪些实数的子集合呢？我们现在就来探讨是否每一个 $\mathbf{\Delta}^1_2$ 实数集合都是广泛贝尔集合的问题.

定理 3.23 设 λ 为一个无穷基数. 那么下述命题对等:

(1) 如果 $\mathbb{P}$ 是一个势不超过 λ 的力迫构思, $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是一个彰显自由变元的 Π^1_3 表达式, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 是实数的一个序列, 那么

$$\varphi[a_1, \cdots, a_n] \leftrightarrow \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi[\check{a}_1, \cdots, \check{a}_n].$$

(2) 如果 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ 是一个彰显自由变元的 Π^1_3 表达式, $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$ 是实数的一个序列, 那么

$$\varphi[a_1, \cdots, a_n] \leftrightarrow \Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} \varphi[\check{a}_1, \cdots, \check{a}_n].$$

(3) 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 $\mathbf{\Delta}^1_2$ 集合, 那么 A 是一个 λ-广泛贝尔集合.

(4) 如果 $f:\lambda^\omega \to \omega^\omega$ 是一个连续函数, $g:\omega^\omega \to \omega^\omega$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 函数, 那么存在一个具备下述特点的有序对 (A,h):

(i) $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$, 并且 $\mathbb{N}^\mathbb{N} - A$ 是一个稀疏集合;

(ii) $h: A \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个连续函数;

(iii) $\forall x \in A\ (h(x) = g(f(x)))$.

证明 首先注意到 (1) 与 (2) 对等. 之所以 (2) $\Rightarrow$ (1), 是因为如果 $|P| \leqslant \lambda$, 那么 $\mathbb{P} \times \mathrm{Col}(\omega,\lambda)$ 与 $\mathrm{Col}(\omega,\lambda)$ 同构; 以及 Σ_3^1 性质是向上保持不变的.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 是一个 $\mathbf{\Delta}_2^1$ 集合. 令 φ 和 ψ 为具备下述功能的两个携带实数参数的 Π_1^1 表达式:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\ \varphi(x,y)\right\},$$

以及

$$\mathbb{N}^\mathbb{N} - A = \left\{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\ \psi(x,y)\right\}.$$

根据 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合的树表示定理, 令 T 和 T^* 为两棵树来实现下述等式:

(a) $A = p[T]$ 以及 $\mathbb{N}^\mathbb{N} - A = p\left[T^*\right]$;

(b) $\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} p[T] = \left\{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\ \varphi(x,y)\right\}$;

(c) $\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} p\left[T^*\right] = \left\{x \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \;\middle|\; \exists y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\ \psi(x,y)\right\}$.

因为 $\forall x\ (\exists y\, \varphi(x,y) \vee \exists y\, \psi(x,y))$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_3^1$ 语句, 由 (2),

$$\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} \forall x\ (\exists y\, \varphi(x,y) \vee \exists y\, \psi(x,y)).$$

因此, $\Vdash_{\mathrm{Col}(\omega,\lambda)} p[T] \cup p\left[T^*\right] = \omega^\omega$. 根据定理 3.19, A 是 λ-广泛贝尔集合.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $f:\lambda^\omega \to \omega^\omega$ 是一个连续函数, 以及 $g:\omega^\omega \to \omega^\omega$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 函数. 那么对于任意一个 $s \in \omega^{<\omega}$, $g^{-1}\left[N_s\right]$ 是一个 $\mathbf{\Delta}_2^1$ 集合. 因此, 可取到一个保障下述事实的开集 D_s:

$$B_s = D_s \triangle f^{-1}\left[g^{-1}\left[N_s\right]\right]$$

是一个稀疏子集. 令 $A = \lambda^\omega - \bigcup\left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}$. 对于 $x \in A$, 令

$$h(x) = g(f(x)).$$

那么 (A,h) 即为所求.

(4) $\Rightarrow$ (2). 设 G 是 V 上的一个 $\mathrm{Col}(\omega,\lambda)$-泛型超滤子. 假设

$$\mathrm{V}[G] \models \exists x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\ (\neg\varphi(x,y)),$$

其中 φ 是一个 Π_1^1 携带 $V\cap\omega^\omega$ 中的元素为参数的表达式. 令 $\dot{x}$ 为一个典型名字来实现下述目标：

$$V[G]\models \dot{x}/G\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\wedge\forall y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\left(\neg\varphi\left(\dot{(x)}/G,y\right)\right).$$

我们可以在 V 中找到一个具备下述特点的函数 $f:\lambda^\omega\to\omega^\omega$：

(a) f 在一个 G_δ 集合 $X\subset\lambda^\omega$ 上是连续的, 并且 $\lambda^\omega-X$ 是稀疏集合;

(b) 在 $V[G]$ 中, $f\left(\bigcup G\right)=\dot{x}/G$.

欲得矛盾, 让我们假设 $V\models\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\varphi(x,y)$. 根据展示函数定理 (定理 3.6), 令 $g:\omega^\omega\to\omega^\omega$ 为一个具备下述功能的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 函数：

$$\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\varphi(x,g(x)).$$

由于 X 是 G_δ, 并且 $(\lambda^\omega-X)$ 是稀疏集合, X 与 λ^ω 拓扑同胚. 根据 (4) 我们可以找到一个稠密开集的序列 $\langle D_n\mid n<\omega\rangle$ 来实现下述目标：

(a) f 在 $A=\bigcap\{D_n\mid n<\omega\}$ 上是连续的;

(b) $(g\circ f)\restriction A$ 也是连续的.

对于 $x\in A$, 令 $F(x)=(f(x),g(f(x)))$. 那么 F 在 A 上也是连续的.

令 T 为 $\omega\times\omega\times\omega$ 上的一棵具备下述功能的树：

$$p[T]=\{(x,y)\mid\neg\varphi(x,y)\}.$$

因为 $\neg\varphi(x,y)$ 是 $\mathbf{\Sigma}_1^1$, 所以我们有这样的树.

如下定义树 T^*：四元组 $(\sigma,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in T^*$ 当且仅当

(a) $(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in T$ 以及 $|\sigma|=|\tau_1|$;

(b) $\exists t\in\lambda^{<\omega}\left(\begin{array}{l}N_{\sigma+t}\subset\bigcap\limits_{i\leqslant|\sigma|}D_i\wedge\\ F\left[N_{\sigma+t}-\bigcup(\lambda^\omega-D_n)\right]\subset N_{(\tau_1,\tau_2)}.\end{array}\right).$

由于 $V[G]\models\neg\varphi\left[f\left(\bigcup G\right),g\left(f\left(\bigcup G\right)\right)\right]$, 在 $V[G]$ 中,

$$\left(\bigcup G\right)\in\bigcap_{n<\omega}D_n.$$

这就意味着 $T_{F(\bigcup G)}$ 是无秩的. 因此, $\bigcup G$ 就见证了 T^* 在 $V[G]$ 中是一棵无秩树. 根据有秩特性的绝对不变性, 在 V 中, T^* 也是一棵无秩的树. 可数 $[T^*]$ 中的任何一个树枝都蕴涵着 “在 A 中有一个 x 来见证 $T_{F(x)}$ 是无秩的”. 这自然与

$$\forall x\ (x\in A\to\varphi\left(f(x),g(f(x))\right))$$

相冲突.

于是, $V\models\exists x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\forall y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ (\neg\varphi(x,y))$. □

3.2 内模型 $L(\mathbb{R})^{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)}$ 分析

现在我们在莱维减势力迫扩张模型中分析其中的一个具有典型特性的内模型 $L(\mathbb{R})$, 并在此基础上证明索洛维定理 (见本节结尾处的定理 3.25). 索洛维在文献13中对由莱维减势力迫构思将一个不可达基数化为第一个不可数基数后所得到的内模型 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集的正则性进行了分析, 从而得到了不可能有可定义的勒贝格可测性反例以及连续统假设反例的令人叹为观止的结果.

3.2.1 内模型 HOD(Ω)

设 G 是 V 之上的一个 $\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$-泛型滤子. 我们需要在 $V[G]$ 中定义出一个内模型来. 为此, 在 $V[G]$ 中, 令 $\Omega = \mathrm{Ord}^{\omega}$ 为由所有长度为 ω 的序数的序列组成的类:

$$\forall f\ (f \in \Omega \leftrightarrow f\ \text{是一个函数, 并且}\ \mathrm{dom}(f) = \omega\ \text{以及}\ \forall n \in \omega\, (f(n) \in \mathrm{Ord})).$$

利用这个序数的无穷序列类, 我们考虑以这些序列以及序数为参数的可定义之集所构成的类, 正如我们在 II.2.2.3 小节中曾经考虑过的以实数和序数为参数的可定义之集所构成的内模型 $\mathrm{HOD}^{\mathbb{R}}$ 那样. 在 $V[G]$ 中, 令

$$x \in \mathrm{OD}(\Omega) \leftrightarrow \exists \varphi\, \exists s \in \Omega \begin{pmatrix} \varphi\ \text{是集论纯语言彰显两个自由变元的表达式} \wedge \\ x = \{a \mid V[G] \models \varphi[a, s]\} \end{pmatrix}.$$

注意,

$$x \in \mathrm{OD}(\Omega) \leftrightarrow \exists \varphi\, \exists s \in \Omega^{\leqslant\omega}_{\geqslant 1} \begin{pmatrix} \varphi\ \text{是集合论纯语言中彰显两个自由变元的表达式} \wedge \\ x = \{a \mid V[G] \models \varphi[a, s]\} \end{pmatrix}.$$

再令

$$x \in \mathrm{HOD}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{TC}(\{x\}) \subset \mathrm{OD}(\Omega).$$

令 $M = \mathrm{HOD}(\Omega)$.

定理 3.24 如果 σ 是 ZF 的一条公理, 那么 $(\mathrm{HOD}(\Omega), \in) \models \sigma$.

引理 3.21 在 $V[G]$ 中下述命题成立:

(1) $\mathcal{D}(\mathscr{H}_{\omega_1}) \subset \mathrm{HOD}(\Omega)$, 因此, 如果 $A \subseteq \omega^{\omega}$ 是一个 $\Sigma^1_n(a)$-集合 $(a \in \omega^{\omega})$, 那么 $A \in \mathrm{HOD}(\Omega)$;

(2) $L(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{HOD}(\Omega)$.

---

13 R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. Ann. of Math., (2) 92 (1970), 1-56.

引理 3.22　(1) 在 $V[G]$ 中, 如果 $f:\omega\to \mathrm{HOD}(\Omega)$, 那么 $f\in\mathrm{HOD}(\Omega)$;

(2) 在 $V[G]$ 中, $\mathrm{HOD}(\Omega)\models \mathrm{DC}$;

(3) 在 $V[G]$ 中, $L(\mathbb{R})\models\mathrm{DC}$.

证明　(1) 我们来证明在 $V[G]$ 中, 如果 $f:\omega\to\mathrm{OD}(\Omega)$, 那么 $f\in\mathrm{OD}(\Omega)$.

因为

$$\mathrm{OD}(\Omega)=\bigcup\{\mathrm{OD}(\{s\})\mid s\in\Omega\},$$

所以存在 $\mathrm{Ord}\times\Omega$ 上的可定义的函数 F 来实现如下要求：对于每一个 $s\in\Omega$,

$$F_s=F\restriction_{\mathrm{Ord}\times\{s\}}$$

是一个从 Ord 到 $\mathrm{OD}(\{s\})$ 的满射.

设 $f:\omega\to\mathrm{OD}(\Omega)$. 对于每一个 $n\in\omega$, 取 $(\alpha_n,s_n)\in\mathrm{Ord}\times\Omega$ 来实现等式

$$f(n)=F(\alpha_n,s_n).$$

这样, f 是一个由序列 $\langle\alpha_n\mid n<\omega\rangle$ 以及序列 $\langle s_n\mid n<\omega\rangle$ 可定义的. 将这可数个序数的可数序列应用哥德尔对应 $g:\omega\times\omega\cong\omega$ 整合成一个序数的可数序列：对于 $(m,k)\in\omega\times\omega$, 令

$$u\left(g(m,k)\right)=\begin{cases}\alpha_k, & \text{如果 } m=0,\\ s_{m-1}(k), & \text{如果 } m>0.\end{cases}$$

那么序列 $\langle\alpha_n\mid n<\omega\rangle$ 以及序列 $\langle s_n\mid n<\omega\rangle$ 可以用序数的序列 u 来定义. 于是, f 可以由序数的可数序列 u 来定义. 从而, $f\in\mathrm{OD}(\Omega)$.

(2) 在 $V[G]$ 中, 设 $A\in\mathrm{HOD}(\Omega)$, 以及 $R\subseteq A\times A$ 满足性质：

$$\forall x\in A\,\exists y\in A\,((y,x)\in R).$$

由于选择公理在 $V[G]$ 中成立, 在 $V[G]$ 中可以得到 A 上的一个可数序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle$ 来满足要求：

$$\forall n<\omega\ \left((a_{n+1},a_n)\in R\right).$$

由于每一个 $a_n\in\mathrm{HOD}(\Omega)$, 根据 (1), 序列 $\langle a_n\mid n<\omega\rangle\in\mathrm{HOD}(\Omega)$.

(3) 因为 $V[G]\models\mathrm{ZFC}$, 根据定理 II.2.25, 所以在 $V[G]$ 中, $L(\mathbb{R})\models\mathrm{DC}$. □

3.2.2　莱维力迫扩张模型中实数子集正则性

现在我们回过头来分析莱维力迫扩张模型中实数子集的正则性.

引理 3.23 设 κ 是一个不可达基数. 设 G 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$-泛型滤子. 设 $s\in \mathrm{V}[G]$ 是序数的一个可数无穷序列. 设 $X\in \mathrm{V}[G]$ 是实数的一个子集合. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中

(1) $\mathbb{R}-R(\mathrm{V}[s])$ 是一个零测集, 其中 $R(\mathrm{V}[s])$ 是全体在 $\mathrm{V}[s]$ 上的随机实数的集合;

(2) $\mathbb{R}-C(\mathrm{V}[s])$ 是一个稀疏集, 其中 $C(\mathrm{V}[s])$ 是全体在 $\mathrm{V}[s]$ 上的科恩实数的集合;

(3) 如果 X 是由 s 可定义的, 那么存在一个带有 $\mathrm{V}[s]$ 中的参数的彰显一个自由变元的表达式 $\varphi(v_1)$ 来实现下述事实:

$$\forall a\in\mathbb{R}\ \ (a\in X\leftrightarrow \mathrm{V}[s][a]\models\varphi[a])\,;$$

从而存在两个博雷尔子集 A_1 与 A_2 来见证等式

$$X\cap R(\mathrm{V}[s])=A_1\cap R(\mathrm{V}[s])\ 以及\ X\cap C(\mathrm{V}[s])=A_2\cap C(\mathrm{V}[s]).$$

因此, X 是勒贝格可测的, 并且具有贝尔性质; 如果 X 是不可数的, 那么 X 一定包含一个完备子集.

证明 (1) 和 (2). 由于 $\mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega,<\kappa))$ 是一个 κ-饱和的完备布尔代数, 对于给定的序数的可数无穷序列 s, 有一个势严格小于 κ 的完备子代数 $D\subset B$ 来实现等式 $\mathrm{V}[s]=\mathrm{V}[D\cap G]$. 从而, κ 在 $\mathrm{V}[s]$ 中是一个不可达基数. 又因为 $\kappa=\omega_1^{\mathrm{V}[G]}$, 集合 $\mathbb{R}^{\mathrm{V}[s]}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是一个可数集合. 于是, $\mathrm{BC}^{\mathrm{V}[s]}$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中可数. 根据特征引理 (引理 3.18), $\mathbb{R}-R(\mathrm{V}[s])$ 就是可数个零测集的并, 所以它的测度为零. 基于同样的理由, $\mathbb{R}-C(\mathrm{V}[s])$ 是可数个稀疏集的并, 所以也是一个稀疏集.

(3) 这里的讨论需要用到前面关于莱维力迫构思基本性质的分析结论, 尤其是因子分解引理 (引理 2.3).

首先我们来证明一个归结事实:

事实一 任意给定力迫语言的彰显一个自由变元的表达式 $\varphi(v_1)$, 必定有另外一个表达式 $\tilde{\varphi}$ 来实现如下愿望:

$$\forall x\in\mathrm{Ord}^{\omega}\cap\mathrm{V}[G]\ \ (\mathrm{V}[G]\models\varphi[x]\iff \mathrm{V}[x]\models\tilde{\varphi}[x])\,.$$

由于莱维力迫构思的条件都是有限的, $P=\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$ 的定义对于相关的模型都会是绝对不变的. 给定一个内模型 M, 我们用 M^P 来记由 P 和 M 所确定的布尔值模型; 并且对于给定的力迫语言的表达式 ψ 和 $\tau\in M^P$, 我们用 $\|\psi(\tau)\|^M$ 来记语句 $\psi(\tau)$ 在 M 中的用 P 计算出来的布尔值; 对于 M 中的每一个元素 a, $\check{a}\in M^P$ 是 a 的典型名字.

现在给定 $\varphi(v_1)$. 对于 $x \in \text{Ord}^\omega \cap V[G]$, 那么 $M = V[x]$ 是一个内模型. 令 $\tilde{\varphi}(x)$ 为下述表达式:

$$\|\varphi(\check{x})\|^{V[x]} = \mathbf{1}.$$

我们来验证对于 $x \in \text{Ord}^\omega \cap V[G]$,

$$V[G] \models \varphi(x) \iff V[x] \models \tilde{\varphi}(x).$$

根据分解引理 (引理 2.3), 令 H 为 $V[x]$ 之上的 P-泛型滤子以至于 $V[G] = V[x][H]$. 在 $V[x]$ 中讨论: 根据莱维代数的整齐性 (见推论 2.1) 以及由此而得到的黑白分明律 (推论 2.2), 布尔值 $b = \|\varphi(\check{x})\|^{V[x]}$ 或者为 $\mathbf{0}$, 或者为 $\mathbf{1}$. 由于 H 是 $V[x]$ 上的 P-泛型滤子, 当 $b = \mathbf{1}$ 时, $\varphi(x)$ 在 $V[x][H]$ 中成立; 当 $b = 0$ 时, $\varphi(x)$ 在 $V[x][H]$ 中不成立. 因此,

$$V[G] \models \varphi(x) \iff V[x] \models \tilde{\varphi}(x).$$

同样的讨论给出下述事实:

事实二 任意给定力迫语言的彰显一个自由变元的表达式 $\varphi(v_1, v_2)$, 必定有另外一个表达式 $\tilde{\varphi}$ 来实现如下愿望:

$$\forall x, y \in \text{Ord}^\omega \cap V[G] \ \left(V[G] \models \varphi[x, y] \iff V[x, y] \models \tilde{\varphi}[x, y]\right).$$

应用上述事实, 我们来证明 (3) 中的第一个结论.

设 $X \in V[G]$ 是由 s 可定义的. 设 φ 是它的一个定义式:

$$\forall a \in \mathbb{R}^{V[G]} \ \left(a \in X \leftrightarrow V[G] \models \varphi[s, a]\right).$$

应用上面的事实二, 我们就有

$$\forall a \in \mathbb{R}^{V[G]} \ \left(a \in X \leftrightarrow V[G] \models \varphi[s, a] \leftrightarrow V[s][a] \models \tilde{\varphi}[s, a]\right).$$

接下来, 让我们来找到所需要的博雷尔集合 A_1, 将得到 A_2 的工作留给读者. 令 $M = V[s]$. 考虑 M 中的完备布尔代数 $\mathbb{B}_m = \mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathcal{I}_m^b$. 令 $\dot{K}$ 为 M 中的这个力迫构思的泛型超滤子的典型名字. 令 $\dot{a}$ 为一个随机实数的典型名字, 即令 $\dot{a} \in M^{\mathbb{B}}$ 并且它由 $\dot{K}$ 依据引理 3.17 中 (1) 的要求来定义以至于 $\|\dot{a} = x_{\dot{K}}\|^{\mathbb{B}} = \mathbf{1}$.

令 $\psi(x)$ 为 $\tilde{\varphi}[s, x]$. 令 $A_e \in \mathscr{B}\mathbb{R}^M$ 来实现等式 $[A_e] = \|\psi(\dot{a})\|$. 再令

$$A_1 = (A_e)^* \in V[G]$$

以至于 $A_1 \cap M = A_e$.

事实三 对于每一个 $x \in R(V[s])$, $x \in X \iff x \in A_1$.

如果 $x\in R(\mathrm{V}[s])$, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\mathfrak{P}(\mathbb{B})^{\mathrm{V}[s]}$ 是一个可数集合, 所以有一个 $\mathrm{V}[s]$ 之上的 $\mathbb{B}^{\mathrm{V}[s]}$-泛型超滤子 K 来实现 $x=x_K$. 而此种情形下, $\dot{a}$ 就是 x 的典型名字. 于是,

$$x\in X\leftrightarrow \mathrm{V}[s][x]\models\psi(x)\leftrightarrow \mathrm{V}[s][K]\models\psi(x)\leftrightarrow \|\psi(\dot{a})\|\in K\leftrightarrow [A_e]\in K\leftrightarrow x\in A_1.$$

完全类似地, 我们可以得到一个博雷尔集合 A_2 来见证等式:

$$X\cap C(\mathrm{V}[s])=A_2\cap C(\mathrm{V}[s]).$$

事实四　X 是勒贝格可测的; X 具有贝尔特性.

根据 (1), $X\triangle A_1$ 是一个零测集. 所以, 相对于理想 $\mathcal{I}_m$ 而言, $[X]=[A_1]$.

根据 (2), $X\triangle A_2$ 是一个稀疏集. 所以, 相对于理想 $\mathcal{I}_c$ 而言, $[X]=[A_2]$.

事实五　如果 X 是不可数的, 那么 X 一定包含一个完备子集.

设 X 不可数. 不妨设 $X\subset\{0,1\}^\omega$. 由于在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\mathbb{R}\cap\mathrm{V}[s]$ 是可数的, 取

$$a\in X-\mathrm{V}[s].$$

令 H 为 $\mathrm{V}[s]$ 之上的 $P=\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$ 的一个泛型滤子来实现等式 $\mathrm{V}[G]=\mathrm{V}[s][H]$. 令 $M=\mathrm{V}[s]$. 在 M 中取 $\mathbb{B}(P)$ 的一个势严格小于 κ 的完备子布尔代数 $\mathbb{D}$ 以至于

$$a\in M[H\cap D],$$

$H\cap D$ 是 M 之上的 $\mathbb{D}$-泛型滤子.

考虑布尔值模型 $M^{\mathbb{D}}$ 以及它上面定义的力迫关系 $\Vdash$. 令 $\dot{a}$ 为 a 的名字, 令

$$p\in D\cap H$$

来见证如下事实:

$$p\Vdash\left[\dot{a}:\check{\omega}\to\check{2}\wedge\dot{a}\notin M\wedge(M[\dot{a}]\models\varphi[\dot{a}])\right].$$

由于 $\mathfrak{P}(\mathbb{D})^M$ 在 $M[H]$ 中是可数的, 令 $D_0,D_1,\cdots,D_n,\cdots$ 为 P 在 M 中的所有稠密开子集在 $M[H]$ 中的单一列表. 我们如下来构造 $\mathbb{D}$ 中的条件 p_σ $(\sigma\in 2^{<\omega})$:

令 $D_0\ni p_\varnothing\leqslant p$. 给定 p_σ, 因为 $p\Vdash\dot{a}\notin M$, 令 $n_\sigma\in\omega$ 来见证 p_σ 未能确定 $\dot{a}$ 在 n_σ 处的取值. 令 $k=\mathrm{dom}(\sigma)$. 令 $D_k\ni p_{\widehat{\sigma\langle 0\rangle}}\leqslant p_\sigma$ 以及 $D_k\ni p_{\widehat{\sigma\langle 1\rangle}}\leqslant p_\sigma$ 来实现等式:

$$p_{\widehat{\sigma\langle 0\rangle}}\Vdash\dot{a}(\check{n}_\sigma)=\check{0}\text{ 以及 }p_{\widehat{\sigma\langle 1\rangle}}\Vdash\dot{a}(\check{n}_\sigma)=\check{1}.$$

任意固定 $z\in\{0,1\}^\omega$. 令

$$K_z=\{r\in\mathbb{D}\mid\exists\sigma\subset z\,p_\sigma\leqslant r\}.$$

那么对于每一个 $n < \omega$, $K_z \cap D_n \neq \varnothing$. 于是, K_z 是 M 之上的 $\mathbb{D}$-泛型滤子. 令

$$f(z) = \dot{a}/K_z.$$

由于 $p = p_\varnothing \in K_z$, 我们知道 $f(z) \in X$. 这样, $f : \{0,1\}^\omega \to X$. 由构造得知 f 是一个连续单射. 因此 $f[\{0,1\}^\omega] \subseteq X$ 是 X 的一个完备子集. □

推论 3.18 设 κ 是一个不可达基数. 设 G 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型滤子. 那么

(1) 每一个射影集合都是勒贝格可测的, 都具有贝尔特性; 如果一个射影集合是不可数的, 那么它必定包含一个完备子集.

(2) 在内模型 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中, 每一个实数集合都是勒贝格可测的, 都具备贝尔特性; 每一个不可数实数集合都包含一个完备子集.

(3) 在内模型 $L(\mathbb{R})$ 中, 每一个实数集合都是勒贝格可测的, 都具备贝尔特性; 每一个不可数实数集合都包含一个完备子集.

证明 (1) 由引理 3.23 中的 (3) 直接得到.

(2) 因为 $\mathbb{R} \cap \mathrm{HOD}(\Omega) = \mathbb{R} \cap \mathrm{V}[G] = \mathbb{R}^{\mathrm{V}[G]} = \mathbb{R}^{L(\mathbb{R})}$, 所以

$$\mathrm{BC}^{L(\mathbb{R})} = \mathrm{BC}^{\mathrm{HOD}(\Omega)} = \mathrm{BC} = \mathrm{BC}^{\mathrm{V}[G]}.$$

而对于每一个 $e \in \mathrm{BC}^{\mathrm{V}[G]}$,

$$A_e^{\mathrm{V}[G]} = A_e^{\mathrm{V}[G]} \cap \mathrm{HOD}(\Omega) = A_e^{\mathrm{HOD}(\Omega)} = A_e^{L(\mathbb{R})}.$$

从而 $\mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathrm{V}[G]} = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathrm{HOD}(\Omega)} = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{L(\mathbb{R})}$.

如果 $X \in \mathrm{HOD}(\Omega) \cap \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, 那么 X 是在 $\mathrm{V}[G]$ 中由一个序数的可数无穷序列可定义的, 根据引理 3.23, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, X 是勒贝格可测的, 并且具备贝尔特性. 于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 可以找到博雷尔集合 A_1, A_2, A_3, A_4 来见证

$$X \triangle A_1 \subseteq A_2 \ \wedge \ X \triangle A_3 \subseteq A_4,$$

并且, A_2 是零测集, A_4 是稀疏集. 而 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset \mathrm{HOD}(\Omega)$, 并且根据绝对不变性, 在 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中, A_2 是零测集, A_4 是稀疏集. 由此, 在 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中, X 是勒贝格可测的, 具备贝尔特性. 如果 X 在 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中不可数, 它在 $\mathrm{V}[G]$ 中也不可数, 所以在 $\mathrm{V}[G]$ 中, X 包含一个完备子集. 而 $\mathbb{R}$ 上的任何一个在 $\mathrm{V}[G]$ 中的完备子集都在 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中. 从而, 在 $\mathrm{HOD}(\Omega)$ 中, X 包含一个完备子集.

同样地, 如果 $X \in L(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, 那么在 $L(\mathbb{R})$ 中, X 是勒贝格可测的, 也具备贝尔特性. 如果 X 在 $L(\mathbb{R})$ 中不可数, 它在 $\mathrm{V}[G]$ 中也不可数, 因为 $\mathbb{R}^\omega \cap \mathrm{V}[G] \subset L(\mathbb{R})$, 所以在 $\mathrm{V}[G]$ 中, X 包含一个完备子集. 而 $\mathbb{R}$ 上的任何一个在 $\mathrm{V}[G]$ 中的完备子集都在 $L(\mathbb{R})$ 中. 从而, 在 $L(\mathbb{R})$ 中, X 包含一个完备子集. □

综上所有分析和论证, 我们得到下面的索洛维定理:

定理 3.25 (Solovay) 设存在一个不可达基数. 那么

(1) 存在一个具有下述性质的 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}$ 的传递模型:

(a) 每一个实数子集都是勒贝格可测的;

(b) 每一个实数子集都具备贝尔特性;

(c) 每一个不可数的实数子集都包含一个完备子集.

(2) 存在一个具有下述性质的 ZFC 的传递模型:

(a) 每一个实数的投影子集都是勒贝格可测的;

(b) 每一个实数的投影子集都具备贝尔特性;

(c) 每一个不可数的实数的投影子集都包含一个完备子集.

3.3 大基数对于实数集理论的影响

大基数的存在对于实数子集合正则性的影响应当说是极其意外的. 可以说, 这种发现是高端智慧凝聚的产物. 高阶无穷集合对于实数集合的关联作用所展示的不仅是数学的内涵, 更是哲学的内涵. 这种内涵是丰富的人类智慧的宝藏. 去探索和欣赏这样的关联可以说是这本《导引》的作者当初进入集合论研究领域的原始动机, 也是整理这本期待着有可能带给未来知音起始的激励和启迪的《导引》的初衷. 在结束这本《导引》的最后部分, 让我们一起粗略地参观一下这座仍在建设中的高端智慧博物馆吧.

前面从定理 3.12 和推论 3.13 中我们已经初步见识到不可达基数对于 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 集合的作用; 从定理 1.20 中我们看到一个可测基数的存在就蕴涵着一个有着丰富内涵的结构 $(\mathrm{V}_{\omega+1},\in,{}^{\#})$ 的存在; 从关于 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合的分析我们看到可测基数对于 $\mathbf{\Sigma}_3^1$ 实数集合正则性的作用. 这里, 我们将继续.

3.3.1 $L(\mathbb{R})$-理论不变性

在第 2 章中, 我们专门讨论过如何从大基数出发用力迫扩张的方式, 或者得到 ω_1 上的正规峭壁理想, 或者得到 ω_1 上的非荟萃集理想就是一个峭壁理想, 或者得到 ω_1 上的非荟萃集理想就是一个预饱和理想, 或者得到 ω_1 上存在一个正规饱和理想, 或者得到 ω_1 上的非荟萃集理想就是一个饱和理想. 一个基本的问题是: 这样的理想对实数子集会产生什么样的影响? 至少武丁当年的一个基本兴趣所在就是希望通过得到这样的理想来揭开实数子集的一些特有的性质. 回顾一下武丁的定理 (定理 2.29): 在超强基数的基础上, 武丁应用类似于力迫构思 $\mathbb{P}_W$ 那样的力迫构思, 以可数支撑迭代的方式, 构造出一个满足 ω-分配律的半恰当力迫构思 $\mathbb{P}$, 在它的泛型扩张中得到 ω_1 上的一个饱和正规理想. 武丁的根本兴趣不只是用比

Foreman-Magidor-Shelah 定理所用到的超级基数假设弱的超强基数去得到同样的结果, 他更在乎这样得到的理想可以带来什么样的结果. 这便是下面的定理:

定理 3.26 (Woodin) 设 κ 是一个超强基数. 令 G 为 V 上的莱维力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 那么在 $V[G]$ 中, 存在一个从 $L(\mathbb{R})^{V}$ 到 $L(\mathbb{R})^{V[G]}$ 的同质嵌入映射.

联想到前面关于索洛维模型的分析, 这就意味着:

推论 3.19 如果存在一个超强基数, 那么每一个在 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集都是勒贝格可测的; 都具有贝尔特性; 都具有完备子集特性; 尤其不存在实数集合 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbf{\Sigma}^1_n$-秩序 $(n<\omega)$.

由上面的定理以及这个推论可见, 力迫构思不再仅仅用于证明问题的独立性, 还可以用来建立一定范围内的实数子集的正则性. 面对这样美妙的定理, 去进一步减弱大基数假设的愿望自然会非常强烈. 这便是发生谢旯和武丁竞争地相继减弱获取饱和理想的大基数假设的过程的缘由. 前面我们见到了他们合作的定理 (定理 2.31): 设 κ 是一个武丁基数. 那么在 V 的莱维力迫构思 $\mathrm{Col}\,(\omega_1, <\kappa)$ 的泛型扩张 ω_1 上存在一个饱和正规理想. 这样一来, 上面的定理 3.26 就自然而然地改写成下面的定理:

定理 3.27 (Shelah-Woodin) 设 κ 既是一个武丁基数也是一个弱紧基数. 令 G 为 V 上的莱维力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 那么在 $V[G]$ 中, 存在一个从 $L(\mathbb{R})^{V}$ 到 $L(\mathbb{R})^{V[G]}$ 的同质嵌入映射.

从而上面的推论 3.19 随之被改写成:

推论 3.20 如果存在一个既是武丁基数又是弱紧基数的基数, 那么每一个在 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集都是勒贝格可测的; 都具有贝尔特性; 都具有完备子集特性; 尤其不存在实数集合 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbf{\Sigma}^1_n$-秩序 $(n<\omega)$.

在文献14中, 谢旯和武丁合作证明的关于勒贝格可测性的定理最佳版本如下:

定理 3.28 (Shelah-Woodin) (1) 如果 $n\in\omega$ 并且存在 n 个武丁基数以及一个严格大于它们的可测基数, 那么每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 实数子集都是勒贝格可测的;

(2) 如果存在无穷多个武丁基数以及一个严格大于它们的可测基数, 那么 $L(\mathbb{R})$ 中的每一个实数子集都是勒贝格可测的.

后面我们将会看到这个定理的加强形式及其证明. 在这里我们先证明弱形式的谢旯–武丁定理 (定理 3.27):

证明 设 κ 为武丁基数. 令 $\mathbb{P}=\mathrm{Col}\,(\omega_1, <\kappa)$. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 令 $M=V\,[G]$. 根据谢旯–武丁定理 (定理 2.31), 在 M 中, 令 $\mathcal{I}$ 为 $\omega_1^M=\omega_1^V$ 上的

14 S. Shelah and W. H. Woodin, Large Cardinals imply that every reasonably definable set of reals is Lebesgue measurable. IJM, 70(1990), 381-394.

饱和正规理想, 并且满足

$$\mathcal{I} \cap \mathrm{V} = (\mathrm{NS})^{\mathrm{V}}.$$

令 $Q = \mathfrak{P}(\omega_1)/\mathcal{I}$. 令 H 为 M 上的 Q-泛型超滤子. 那么, 在 $M[H]$ 中, 由 H 所诱导的泛型超幂 $\prod_H(M,\in)$ 是有秩的; 令 $i_H : M \to N = \mathrm{ult}(M,H) \cong \prod_H(M,\in)$ 为泛型嵌入映射. 那么 ω_1 是 i_H 的临界点, 并且

$$i_H(\omega_1) = \omega_2^M = \kappa = \omega_1^N,$$

$\mathfrak{P}(\omega_1)^N = \mathfrak{P}(\omega_1)^{M[H]}$, 以及 $\mathbb{R}^{M[H]} = \mathbb{R}^N$. 从而

$$(L(\mathbb{R}))^N = (L(\mathbb{R}))^{M[H]}.$$

由于 $\mathbb{P}_1$ 是 σ-完备的, $\mathbb{R}^{\mathrm{V}} = \mathbb{R}^M$. 所以,

$$(L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}} = (L(\mathbb{R}))^M.$$

因此, 在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中, 存在一个

$$j : (L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}} \prec (L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}[G][H]}.$$

令 $\mathbb{B} = \mathbb{B}\big(\mathbb{P} * \dot{Q}\big)$. 由于 $\mathbb{P}$ 满足 κ-链条件, 在 $\mathrm{V}^{\mathbb{P}}$ 中 $\mathcal{I}$ 是 κ-饱和的, 所以 $\mathbb{B}$ 也满足 κ-链条件. 由于 $\mathbb{P}$ 将大于 ω_1 但小于 κ 的基数都减势到 $\aleph_1$, 而在 $\mathrm{V}[G][H]$ 中, ω_1^{V} 是可数的, 所以

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathbb{B}} \check{\kappa} = \aleph_1.$$

根据 κ 的弱紧性质, $\mathbb{B}$ 的任何少于 κ 个生成元所生成的完备布尔子代数的势一定严格小于 κ. 因此,

(a) $\mathbb{B}$ 满足 κ-链条件;

(b) $B = \bigcup\{B_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, 其中

  (i) $\forall \alpha < \kappa\ (|B_\alpha| < \kappa)$;

  (ii) $\forall \alpha < \beta < \kappa\ (B_\alpha <_{\mathrm{reg}} B_\beta)$;

(c) $\forall \gamma < \kappa\, \exists \alpha < \kappa\ \big(\mathrm{V}^{B_\alpha} \models |\check{\gamma}| = |\check{\omega}|\big)$.

因此, $\mathbb{B} \cong \mathbb{B}(\mathrm{Col}(\omega, <\kappa))$.

因此定理 3.27 得证. □

定理 3.27 中的假设可以被极大地减弱. 比如, 下面的定理就表明这一点:

定理 3.29 (Woodin) 设 κ 是一个武丁基数, 并且 $\forall \alpha < \kappa\, \exists \delta < \kappa\, (\alpha < \delta \wedge \delta$ 是武丁基数). 那么存在一个具备下述特点的力迫构思 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$: 在 V 的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 一定存在一个从 $L(\mathbb{R})^{\mathrm{V}}$ 到 $L(\mathbb{R})^{\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)}$ 的同质嵌入映射. 因此, 每一个在 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集都是勒贝格可测的; 都具有贝尔特性; 都具有完备子集特性; 尤其不存在实数集合 $\mathbb{R}$ 的 $\mathbf{\Sigma}_n^1$-秩序 $(n < \omega)$.

事实上, 定理的大基数假设还可以进一步减弱到如下命题: 存在可数无穷多个武丁基数以及一个比它们都大的可测基数. 在这个条件下, 上述定理中的力迫构思就可以设计出来; 并且这个条件也是最佳条件. 那么这到底是一个什么样的力迫构思呢? 下面就让我们先转向这个力迫构思的设计, 然后再来证明上述定理.

3.3.2　荟萃塔

荟萃集

我们从荟萃集的一般性定义开始. 在第一卷中我们考虑过不可数的正则基数上的无界闭子集 (见定义 I.1.72) 和荟萃子集 (见定义 I.2.20), 也在 I.2.3.3 小节中考虑过可数范围上的无界闭子集 (见定义 I.2.25) 以及一般的集合 $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 上的无界闭集 (见定义 I.2.28), 以及相应的荟萃集的概念. 在这里, 我们需要将这些概念用一种更一般的形式统一起来. 这是武丁提出来的荟萃集大统一概念. 这种大统一荟萃集概念是荟萃塔力迫构思的基础[15].

定义 3.10 (荟萃集)　称一个非空集合 X 是一个**荟萃集合**当且仅当

$$\forall f\left(\left(f:\left(\bigcup X\right)^{<\omega}\to\bigcup X\right)\to\exists A\in X\, f\left[A^{<\omega}\right]\subset A\right).$$

称 X 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的荟萃集当且仅当 $A=\bigcup X$.

称一个非空集合 C 为一个**无界闭集**当且仅当 $\exists f\ \left(f:(\bigcup C)^{<\omega}\to\bigcup C\right)$ 以至于

$$C=\left\{Y\subset\bigcup C\ \middle|\ f\left[Y^{<\omega}\right]\subset Y\right\}.$$

称 C 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集当且仅当 $A=\bigcup C$. 从而 C 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集当且仅当 $\exists f\ (f:A^{<\omega}\to A)$ 以至于

$$C=\left\{Y\subset A\ \middle|\ f\left[Y^{<\omega}\right]\subset Y\right\}.$$

一个非空集合 X 可以是一个很平凡的荟萃集: 当 $X\ni\bigcup X$ 时, X 就是一个荟萃集. 此时我们称 X 是一个**平凡荟萃集**. 当 $\bigcup X$ 是可数集合时, 诚如下述引理所示, 这也是唯一地可以令 X 成为荟萃集的方式.

引理 3.24　如果 X 非空, $\bigcup X$ 是一个可数集合, 那么 X 是一个荟萃集当且仅当 $X\ni\bigcup X$.

证明　只需证必要性. 如果 $\bigcup X$ 是空集, 而 X 非空, 必然有 $X=\{\varnothing\}=\{\bigcup X\}$; 如果 $\bigcup X$ 非空, 令 $f:\omega\to\bigcup X$ 为一个满射, 定义

$$g:\left(\bigcup X\right)^{<\omega}\to X$$

15 W. H. Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 1988, 85, no.18: 6587-6591.

如下：对于 $n<\omega$，对于 $e\in(\bigcup X)^n$，令 $g(e)=f(n)$. 那么对于任何 $\varnothing\neq A\subset\bigcup X$，如果 $g\left[A^{<\omega}\right]\subset A$，则必有 $A=\bigcup X$. □

例 3.5 设 $\kappa<\lambda$ 为不可数基数. 那么

(1) $[\lambda]^\omega$ 是一个荟萃集;

(2) $\mathfrak{P}_\kappa(\lambda)$ 是一个荟萃集.

这里的定义的确是我们以前所定义的荟萃集概念的一般化. 诚如下面的引理所示：

引理 3.25 假设 X 是一个非空集合. 如下命题对等:

(1) X 是一个荟萃集合.

(2) 如果 $\mathcal{M}=(M;\bigcup X,\cdots)$ 为某个可数语言 $\mathcal{L}$ 的一个模型 (其中 $\bigcup X$ 为 $\mathcal{L}$ 的某个一元谓词符号的解释), 那么 $\mathcal{M}$ 有一个同质子模型 $(N;N\cap\bigcup X,\cdots)\prec\mathcal{M}$ 来满足要求: $X\ni N\cap\bigcup X$.

(3) 如果 M 是任意一个满足要求

$$\mathbf{S}\left(\bigcup X\right)=\left(\bigcup X\right)\cup\left\{\bigcup X\right\}\subset M$$

的集合, $Z\in[M]^\omega$, 那么必有一个 N 来实现下述目标:

$$(N,\in)\prec(M,\in)\ \wedge\ Z\cup\left\{\bigcup X\right\}\subset N\ \wedge\ X\ni N\cap\bigcup X.$$

(4) 如果 β 是一个满足不等式 $\mathrm{V}_\beta\supset\bigcup X$ 的序数, $\alpha>\beta$, 那么

$$\forall Z\in[\mathrm{V}_\alpha]^\omega\ \exists N\ \left((N,\in)\prec(\mathrm{V}_\alpha,\in)\ \wedge\ Z\cup\left\{\bigcup X\right\}\subset N\ \wedge\ X\ni N\cap\bigcup X\right).$$

(5) 存在一个满足不等式 $\mathrm{V}_\beta\supset\bigcup X$ 的极限序数 β, 存在一个 $\alpha>\beta$, 以至于下述命题成立:

$$\forall Z\in[\mathrm{V}_\alpha]^\omega\ \exists N\ \left((N,\in)\prec(\mathrm{V}_\alpha,\in)\ \wedge\ Z\cup\left\{\bigcup X\right\}\subset N\ \wedge\ X\ni N\cap\bigcup X\right).$$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 X 是荟萃集合. 令 $\mathcal{M}=(M;\bigcup X,\cdots)$ 和 $\mathcal{L}$ 如 (2) 所言. 对于 $\mathcal{L}$ 的每一个彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_0,\cdots,v_n)$，令

$$f_\varphi:M^n\to M$$

满足要求：对于 $(x_1,\cdots,x_n)\in M^n$;

$$\begin{aligned}&(\exists x_0\in M)\ \mathcal{M}\models\varphi\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]\\&\to\mathcal{M}\models\varphi\left[f_\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right),x_1,\cdots,x_n\right].\end{aligned}$$

令 $\langle g_i : M^{n_i} \to M \mid i < \omega\rangle$ 为一个具有下述特点的关于所有上述斯科伦函数的复合函数的列表：$\forall i < \omega\ (n_i \leqslant i)$.

我们不妨假设 $\bigcup X$ 非空. 固定 $a \in \bigcup X$. 对于 $i < \omega$, 如下定义 $h_i : (\bigcup X)^{n_i} \to X$: 对于 $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_{n_i}) \in (\bigcup X)^{n_i}$, 令

$$h_i(\vec{x}) = \begin{cases} g_i(\vec{x}) & \text{当 } \vec{x} \in \left(\bigcup X\right)^{n_i} \text{ 时}, \\ a & \text{当 } \vec{x} \notin \left(\bigcup X\right)^{n_i} \text{ 时}. \end{cases}$$

再令 $h : (\bigcup X)^{<\omega} \to X$ 依照下式定义：对于 $(x_1, \cdots, x_i) \in (\bigcup X)^{<\omega}$, 令

$$h(x_1, \cdots, x_i) = h_i(x_1, \cdots, x_i).$$

由于 X 是荟萃集合, 令非空的 $A \in X$ 来满足 $h[A^{<\omega}] \subset A$. 令 N 为 A 在 $\mathcal{M}$ 中的斯科伦闭包, 即 $A \subset N$, N 对于每一个斯科伦函数 f_φ 都封闭, 而且是 $\subset$-下最小的. 那么

$$\left(N, N \cap \bigcup X, \cdots\right) \prec \mathcal{M} \wedge N \cap \bigcup X = A \in X.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). 假设 (2) 成立. 令 M 和 Z 如 (3) 所言. 令 $\mathcal{L}$ 为下述非逻辑符号的语言：

$$\mathcal{L} = \{\in, P, c_a \mid a \in Z\},$$

其中, P 是一个一元谓词符号, c_a 是常元符号. 将模型 $(M, \in)$ 扩充成 $\mathcal{L}$ 的一个结构 $\mathcal{M}$：用 $a \in Z$ 来解释 c_a; 用 $\bigcup X$ 来解释 P. 令 N_1 为 (2) 所提供的 $\mathcal{M}$ 的同质子模型, 令 N 为 N_1 的对集合论纯语言的减裁结构. 那么 N 就是 (3) 中所求.

(3) $\Rightarrow$ (4). 对于 (4) 中所言的 β 和 α, 我们就有 $\mathbf{S}(\bigcup X) \subset \mathrm{V}_\alpha$.

(4) $\Rightarrow$ (5). 自然.

(5) $\Rightarrow$ (1). 设 β 和 α 见证 (5) 成立. 令 $f : (\bigcup X)^{<\omega} \to \bigcup X$. 因为 β 是一个极限序数, 我们必有 $f \subset \mathrm{V}_\beta$. 因此, $f \in \mathrm{V}_\alpha$. 依据 (5), 令 $(N, \in) \prec (\mathrm{V}_\alpha, \in)$ 满足 $\{f, \bigcup x\} \subset N$ 以及 $X \ni N \cap \bigcup X$. 令 $A = N \cap \bigcup X$. 那么 A 就是 (1) 中所求. □

由定义立即得到下述言明荟萃集与无界闭集之间关系的引理：

引理 3.26 一个非空集合 X 是一个荟萃集的充分必要条件是 X 与 $\mathfrak{P}(\bigcup X)$ 上的任何一个无界闭集 C 都有非空交.

引理 3.27 设 A 非空. 那么可数个 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集的交还是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的一个无界闭集.

证明 令 $\langle p_i \mid i < \omega\rangle$ 为全体素数的自然列表. 对于 $n < \omega$, 设 C_n 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集, 令 $f_n : (A)^{<\omega} \to A$ 见证 C_n 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集. 对于 $e \in A^{<\omega}$, 令

$$i_e = \min\left\{i < \omega \mid \text{第}\,(i+1)\,\text{个素数}\,p_i\,\text{整除}\,\mathrm{dom}(e) + 2\right\};$$

以及令 n_e+1 为 $\mathrm{dom}(e)+2$ 的素因子分解中 p_{i_e} 的指数; 再令

$$g(e)=f_{i_e}(e\restriction_{n_e}).$$

对于 $Y\subset A$, Y 对于 g 是封闭的当且仅当 Y 对于所有的 $f_i\,(i<\omega)$ 都是封闭的. 于是, 此 g 就见证 $\bigcap\{C_n\mid n<\omega\}$ 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集. □

定义 3.11 (无界闭集滤子) 设 A 是一个非空集合. 令

$$\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(A)}=\{X\subset\mathfrak{P}(A)\mid\exists C\ (C\text{ 是 }\mathfrak{P}(A)\text{ 上的无界闭集})\wedge C\subset X\}.$$

根据引理 3.27, $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(A)}$ 为 $\mathfrak{P}(A)$ 是一个 σ-完全的滤子. 称 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(A)}$ 为 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集滤子.

推论 3.21 一个非空集合 X 是一个荟萃集的充分必要条件是 X 与 $\mathfrak{P}(\bigcup X)$ 上的无界闭集滤子 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(\bigcup X)}$ 中的每一个元素都有非空交.

无界闭集滤子 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(A)}$ 是一个由 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集所生成的滤子. 不仅仅这样, 这个滤子还可以有其他的生成方式. 这便是下述引理所要指出的. 这自然会增加无界闭集滤子在应用中使用起来的灵活性. 自然, 在验证一个给定集合是否为荟萃集合时也多了一些灵活性.

引理 3.28 设 A 是一个非空集合. 就下列有关 $\mathfrak{P}(A)$ 的子集的性质而言, 所有满足其中之一性质的子集合的全体都生成 $\mathfrak{P}(A)$ 上的无界闭集滤子:

(1) C 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的一个无界闭集.

(2) 存在某个可数语言 $\mathcal{L}$ 的结构 $\mathcal{M}=(M,A,\cdots)$ 以至于 $A\subset M$,

$$C=\{N\cap A\mid(N,N\cap A,\cdots)\prec(M,A,\cdots)\}.$$

(3) 存在某个集合 $M\supset A\cup\{A\}$ 以及某个可数集合 $Z\subset M$ 来见证

$$C=\{N\cap A\mid Z\cup\{A\}\subset N\wedge(N,\in)\prec(M,\in)\}.$$

(4) 存在一个满足不等式 $A\subset \mathrm{V}_\beta$ 的极限序数 β, 存在一个 $\alpha>\beta$ 以及存在一个 V_α 的可数子集 Z 来见证

$$C=\{N\cap A\mid Z\cup\{A\}\subset N\wedge(N,\in)\prec(\mathrm{V}_\alpha,\in)\}.$$

(5) 对于所有满足不等式 $A\subset \mathrm{V}_\beta$ 的极限序数 β, 对于所有 $\alpha>\beta$, 都存在一个 V_α 的可数子集 Z 来见证

$$C=\{N\cap A\mid Z\cup\{A\}\subset N\wedge(N,\in)\prec(\mathrm{V}_\alpha,\in)\}.$$

证明　重复一下引理 3.25 的证明. □

前面我们曾经专注过可数范围上的无界闭子集和荟萃子集. 那么这两种概念该怎样统一起来?

设 A 是一个不可数的集合. 根据斯科伦–罗文海定理, $[A]^\omega$ 在 $\mathfrak{P}(A)$ 上自然是一个荟萃集. 如果 C 是 $\mathfrak{P}(A)$ 上的一个无界闭集, 那么 $C\cap[A]^\omega$ 就是 $[A]^\omega$ 的一个无界闭子集. 反过来, 如果 $D\subset[A]^\omega$ 是 $[A]^\omega$ 的一个无界闭集, 那么一定存在 $\mathfrak{P}(A)$ 上的一个无界闭集 C 来实现等式 $D=C\cap[A]^\omega$.

这样的事实提醒我们引进下述概念:

定义 3.12　设 X 为一个荟萃集. 称 C 为 X 上的一个**无界闭集**当且仅当存在 $\mathfrak{P}\left(\bigcup X\right)$ 上的一个无界闭集 D 来实现等式 $C=D\cap S$.

根据引理 3.27, 荟萃集合 X 上的无界闭集生成一个 σ-完全的滤子, 记成 $\mathcal{F}_S^{\clubsuit}$, 称之为 S 上的无界闭子滤子.

对于任意一个荟萃集 X 而言, 称 X 的一个子集合 Y 是 X 上的一个荟萃子集当且仅当 Y 是一个荟萃集, 并且 $\bigcup Y=\bigcup X$. 对等地说, $Y\subset X$ 是 X 上的一个荟萃子集当且仅当 Y 与 X 上的每一个无界闭集 C 都有非空交.

专注于极限序数, 我们发现原有的荟萃集概念和无界闭集滤子与现有的概念是完全统一的.

引理 3.29　设 λ 是一个极限序数.

(1) 如果 λ 不是一个不可数的正则基数, 那么 λ 并非一个荟萃集合;

(2) 假设 λ 是一个不可数的正则基数. 那么 λ 是一个荟萃集合. 更有甚者, 在 λ 之上, 两种荟萃子集的概念完全重合; 两种定义下无界闭集滤子完全相等.

证明　(1) 令 $f:\mathrm{cf}(\lambda)\to\lambda$ 为一个无界函数. 考虑

$$C=\{M\cap\lambda\mid M\prec(V_{\lambda+1},\in)\wedge\omega\cup\{f,\mathrm{cf}(\lambda)\}\subset M\}.$$

根据引理 3.28 中的 (4) 和推论 3.21, 因为 $\lambda=\bigcup\lambda$, $\mathfrak{P}(\lambda)$ 上的每一个荟萃集合都与 C 有非空交. 如果 $\mathrm{cf}(\lambda)=\omega$, 那么 C 中的元素都在 λ 中无界, 所以, $\lambda\cap C=\varnothing$; 如果 $\mathrm{cf}(\lambda)<\lambda$ 以及 $\alpha\in C$, 那么 $\mathrm{cf}(\lambda)<\alpha$, 根据同质子模型的性质, $\lambda\leqslant\alpha$, 因此, $C\cap\lambda=\varnothing$. 这就表明当 $\mathrm{cf}(\lambda)<\lambda$ 时, λ 不是 $\mathfrak{P}\left(\bigcup\lambda\right)$ 上的荟萃子集.

(2) 设 λ 为不可数的正则基数. 令 $f:\lambda^{<\omega}\to\lambda$. 令

$$C_f=\left\{\alpha<\lambda\ \mid f\left[\alpha^{<\omega}\right]\subset\alpha\right\}$$

是原来意义下 λ 的一个无界闭子集. 所以, λ 是 $\mathfrak{P}(\lambda)$ 上的一个荟萃集.

我们先来证明原来意义下 λ 的荟萃子集一定是现在意义下 $\mathfrak{P}(\lambda)$ 上的荟萃集.

设 $X\subset\lambda$ 是原来意义下的荟萃子集. 那么, $\bigcup X=\lambda$. 对于 $f:\lambda^{<\omega}\to\lambda$. 令

$$C_f=\left\{\alpha<\lambda\ \mid f\left[\alpha^{<\omega}\right]\subset\alpha\right\}.$$

那么 $X\cap C_f\neq\varnothing$. 令 $\alpha\in X\cap C_f$. 此 $Y=\alpha$ 就是所要的证据.

设 $X\subset\lambda$ 是现在意义下的荟萃子集. 令 $C\subset\lambda$ 为原来意义下 λ 的一个无界闭子集. 令

$$C^*=\{M\cap\lambda\mid M\prec \mathrm{V}_{\lambda+1}\wedge C\in M\}.$$

根据引理 3.28 中的 (4) 和推论 3.21, 令 M 为 $\alpha\in S\cap C^*$ 的证据. 因为

$$\mathrm{V}_{\lambda+1}\models \text{“}C\text{ 在 }\lambda\text{ 中无界”},$$

我们就知道 $M\models$ “C 在 λ 中无界”. 这就意味着 C 在 $M\cap\lambda=\alpha$ 中无界. 由于 C 是闭子集, $\alpha\in C$. 也就是说, $X\cap C\neq\varnothing$. □

引理 3.30 设 X 是一个荟萃集. 那么 X 上的无界闭集滤子 $\mathcal{F}_X^{\clubsuit}$ 是一个精良滤子.

证明 设 X 是荟萃集. 令 $a\in\bigcup X$. 令 $c_a:(\bigcup X)^{<\omega}\to\bigcup X$ 为常值 a 函数. 那么集合

$$\left\{Y\in S\;\middle|\; c_a\left[Y^{<\omega}\right]\subset Y\right\}$$

就是 $\{Y\in S\mid a\in Y\}$. □

定义 3.13 设 X 为一个非空集合. 设 $\langle B_a\subseteq X\mid a\in X\rangle$ 为 X 上的一个函数. 定义该函数的**主对角线交** $\Delta_{a\in X}B_a$ 如下:

$$\Delta_{a\in X}B_a=\{Y\mid \forall a\in Y\ (Y\in B_a)\}.$$

引理 3.31 设 $\mathcal{F}$ 是非空集合 A 上的一个滤子. 那么 $\mathcal{F}$ 是一个正规滤子当且仅当 $\mathcal{F}$ 对于主对角线交是封闭的.

证明 (练习.) □

引理 3.32 设 X 是一个荟萃集. 那么 X 上的无界闭集滤子 $\mathcal{F}_X^{\clubsuit}$ 是一个正规滤子, 从而它是一个 σ-完全的精良的正规滤子.

证明 设 $Y\subset X$ 是 X 的荟萃子集 (即 $\mathcal{F}_X^{\clubsuit}$-正测度集). 设 $f:Y\to\bigcup X$ 为一个选择函数. 令 β 为一个满足不等式 $\bigcup X\subset \mathrm{V}_\beta$ 的极限序数. 欲得一矛盾, 假设引理的结论对此 Y 和 f 不成立. 对于 $a\in\bigcup X$, 根据引理 3.28, 令 $g(a)\in[\mathrm{V}_{\beta+1}]^\omega$ 来见证下述事实: 对于任意的 $M\subset \mathrm{V}_{\beta+1}$, 如果

$$M\prec \mathrm{V}_{\beta+1}\wedge g(a)\cup\left\{\bigcup X\right\}\subset M,$$

那么 $f\left(M\cap\bigcup X\right)\neq a$. 这样一个函数 $g\in \mathrm{V}_{\beta+\omega}$. 令

$$C=\left\{M\cap\bigcup X\;\middle|\; M\prec \mathrm{V}_{\beta+\omega}\wedge\left\{g,\bigcup X\right\}\subset M\right\}.$$

因为 Y 是荟萃集, 那么 $Y\cap C\neq\varnothing$. 令 $B\in Y\cap C$. 令 $M\prec \mathrm{V}_{\beta+\omega}$ 来实现等式

$$B=M\cap\bigcup X,$$

以及 $\{g,\bigcup X\}\subset M$. 令 $a=f(B)\in B$. 由于 $a\in B\subset M$ 以及 $g\in M$, 我们知道 $g(a)\in M$. 因为 $g(a)$ 是可数的, $M\prec \mathrm{V}_{\beta+\omega}$, M 中有一个从 ω 到 $g(a)$ 的满射, 所以 $g(a)\subset M$. 于是, $g(a)\subset M\cap \mathrm{V}_{\beta+1}$. 由 $M\prec \mathrm{V}_{\beta+\omega}$ 得知 $M\cap \mathrm{V}_{\beta+1}\prec \mathrm{V}_{\beta+1}$. 这便是一个矛盾. □

接下来, 我们需要将第一卷广义无界闭子集与荟萃子集小节 (I.2.3.3 小节) 中的提升与降落的概念 (见定义 I.2.27) 推广以适应当前的需要.

定义 3.14 (提升与降落)　设 X, Y 和 A 为三个集合, 并且 $X\subset\bigcup A\subset Y$.

(1) 令 $A\uparrow Y=\{Z\subset Y\mid (Z\cap\bigcup A)\in A\}$. 称 $A\uparrow Y$ 为 A 在 $\mathfrak{P}(Y)$ 上的**提升**.

(2) 令 $A\downarrow X=\{Z\cap X\mid Z\in A\}$. 称 $A\downarrow X$ 为 A 在 $\mathfrak{P}(X)$ 上的**降落**.

(记号 $\uparrow$ 可以读作 “提升到”; 记号 $\downarrow$ 可以读作 “降落到”.)

注意, $A=(A\uparrow X)\downarrow\bigcup A$.

下面的引理是 I.2.3.3 小节中定理 I.2.35 的自然推广:

引理 3.33　设 C 是一个无界闭集. 那么

(1) 如果 $X\subset\bigcup C$, 那么 $(C\downarrow X)\in\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(X)}$;

(2) 如果 $X\supset\bigcup C$, 那么 $C\uparrow X$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的一个无界闭集.

证明　证明与定理 I.2.35 的证明一样, 也与引理 3.25 的证明部分类似.

(1) 设 $f:(\bigcup C)^{<\omega}\to\bigcup C$ 来实现 $C=\{Y\subset\bigcup C\mid f[Y^{<\omega}]\subset Y\}$. 不妨设 $X\neq\varnothing$. 令

$$\left\langle g_i:\left(\bigcup C\right)^{n_i}\to\bigcup C\;\middle|\; i<\omega\right\rangle$$

为集合 $\left\{f\restriction_{(\bigcup C)^n}\;\middle|\; n<\omega\right\}$ 的满足要求 $n_i\leqslant i\,(i<\omega)$ 的一个列表. 固定 $a\in X$. 对于 $i<\omega$, 定义 $h_i:X^{n_i}\to X$ 如下: 对于 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_{n_i})\in X^{n_i}$,

$$h_i(\vec{x})=\begin{cases} g_i(\vec{x}) & \text{如果 } g_i(\vec{x})\in X,\\ a & g_i(\vec{x})\notin X.\end{cases}$$

再定义 $h:X^{<\omega}\to X$ 如下: 对于 $(x_1,\cdots,x_i)\in X^{<\omega}$, 令

$$h(x_1,\cdots,x_i)=h_i(x_1,\cdots,x_{n_i}).$$

那么 $C\downarrow X\supseteq\{Y\subset X\mid h[Y^{<\omega}]\subseteq Y\}$.

(2) 对于 $e\in X^{<\omega}$, 令 $k_e=|\{n\in\mathrm{dom}(e)\mid e(n)\in\bigcup C\}|$, 并且令

$$\rho_e:k_e\to\left\{n\in\mathrm{dom}(e)\;\middle|\; e(n)\in\bigcup C\right\}$$

为保序映射. 如下定义 $g: X^{<\omega} \to (\bigcup C)^{<\omega}$: 对于 $e \in X^{<\omega}$, 令 $g(e) = e \circ \rho_e$.

设 $f: (\bigcup C)^{<\omega} \to \bigcup C$ 来实现 $C = \{Y \subset \bigcup C \mid f[Y^{<\omega}] \subset Y\}$. 那么 $f \circ g$ 就见证 $C \uparrow X$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的一个无界闭集. □

下面关于荟萃集的提升与降落的推论就是自然而然的.

推论 3.22 设 S 是一个荟萃集. 那么

(1) 如果 $X \subset \bigcup S$, 那么 $(S \downarrow X)$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的荟萃集;

(2) 如果 $X \supset \bigcup S$, 那么 $S \uparrow X$ 是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的荟萃集.

在经过前面的准备之后, 我们可以应用大统一的荟萃集概念来展示武丁的全荟萃塔力迫构思.

全荟萃塔力迫构思

定义 3.15 (全荟萃塔) 设 δ 是一个极限序数. 定义**高度为 δ 的全荟萃塔**

$$\mathbb{P}_{<\delta} = (P_{<\delta}, \leqslant)$$

如下:

$$P_{<\delta} = \{X \in \mathrm{V}_\delta \mid X \text{ 是一个荟萃集}\},$$

对于 $X, Y \in P_\delta$, 定义 $X \leqslant Y$ 当且仅当下述命题成立:

(a) $\bigcup X \supset \bigcup Y$;

(b) 差集 $(X - (Y \uparrow \bigcup X))$ 在 $\mathfrak{P}(\bigcup X)$ 上并非荟萃集.

对于 $X, Y \in P_{<\delta}$, 定义 $X \leqslant_w Y$ 当且仅当对于 $P_{<\delta}$ 中所有的 $Z \leqslant X$, Z 与 Y 在 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中有共同的下界 (即 $\exists p\,(p \leqslant Z \wedge p \leqslant Y)$).

注意, 当 $X \leqslant_w Y$ 时, 如果 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, $X \in G$, 那么 $Y \in G$.

下面的引理总结出力迫构思 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一些基本性质.

引理 3.34 设 δ 是一个极限序数. 设 $X \in \mathrm{V}_\delta$. 令 S 和 T 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中的两个条件. 那么

(1) 如果 $X \subset \bigcup S$, 那么 $S \leqslant (S \downarrow X)$;

(2) 如果 $X \supset \bigcup S$, 那么 $(S \uparrow X) \leqslant S$ 并且 $S \leqslant_w (S \uparrow X)$;

(3) 如果 $\bigcup S = \bigcup T$, 并且 S 与 T 在 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中有共同下界, 那么 $S \cap T$ 在 $\mathfrak{P}(\bigcup S)$ 上是荟萃集, 并且 $S \cap T$ 是 S 与 T 在 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中的最大下界.

证明 (1) 和 (2) 的第一部分由 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的偏序 $\leqslant$ 定义直接得到.

关于 (2) 的第二部分, 设 $\bigcup S \subset X$. 令 $S^* \leqslant S$, 并且 $X^* = \bigcup S^*$. 令

$$T = S^* \uparrow (X \cup X^*).$$

根据推论 3.22 中的 (2), 我们知道 $T \in P_{<\delta}$. 由本引理中 (2) 的第一部分, 我们就有

$$T \leqslant S^* \leqslant S.$$

我们希望证明 $T \leqslant S \uparrow X$. 为此, 我们必须证明差集

$$(T - ((S \uparrow X) \uparrow (X \cup X^*)))$$

在 $\mathfrak{P}(X \cup X^*)$ 中是非荟萃集. 假设它在 $\mathfrak{P}(X \cup X^*)$ 中是荟萃集. 根据推论 3.22 中的 (1), 差集 $S^* - (S \uparrow X^*)$ 在 $\mathfrak{P}(X^*)$ 中是荟萃集. 这与我们的给定条件 $S^* \leqslant S$ 相矛盾.

现在我们来证明 (3). 假设 $\bigcup S = \bigcup T$, 并且 S 与 T 在 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中有共同下界 S^*. 于是, $\bigcup S \subset \bigcup S^*$, 并且下面的两个差集在 $\mathfrak{P}\left(\bigcup S^*\right)$ 中都不是荟萃集:

$$S^* - \left(S \uparrow \left(\bigcup S^*\right)\right), \quad S^* - \left(T \uparrow \left(\bigcup S^*\right)\right).$$

这样, 差集 $S^* - ((S \cap T) \uparrow (\bigcup S^*))$ 在 $\mathfrak{P}\left(\bigcup S\right)$ 中就不是荟萃集. 根据推论 3.22 中的 (1), $S \cap T$ 在 $\mathfrak{P}\left(\bigcup S\right)$ 中是荟萃集. 于是, 由 $\leqslant$ 的定义, $S^* \leqslant (S \cap T)$. □

设 G 是 V 之上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 对于 $X \in V_\delta$, 令

$$G_X = \left\{B \in G \,\middle|\, X = \bigcup B\right\}.$$

引理 3.35 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 之上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么, 对于 $X \in V_\delta$, 在 $V[G]$ 中, G_X 是 $\mathfrak{P}^{V}(X)$ 上的一个包含 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(X)}$ 的 V-超滤子. 不仅如此, 这些 V-超滤子相互之间彼此**相容**, 即若 $X \subset Y \in V_\delta$, 则对于任意的 $A \subset \mathfrak{P}(X)$ 以及任意的 $B \subset \mathfrak{P}(Y)$, 必有下述成立:

(a) $B \in G_Y \to (B \downarrow X) \in G_X$;

(b) $A \in G_X \to (A \uparrow Y) \in G_Y$.

证明 固定一个 $X \in V_\delta$. 令 $\mathcal{I}^{ns}_{\mathfrak{P}(X)}$ 为 $\mathfrak{P}(X)$ 上所有非荟萃集的集合. 这是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的无界闭集滤子 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(X)}$ 的对偶理想. 这个非荟萃集理想的正测度集的全体就是

$$\left(\mathcal{I}^{ns}_{\mathfrak{P}(X)}\right)^+ = \left\{S \in V_\delta \,\middle|\, \bigcup S = X \wedge, S \text{ 是荟萃集}\right\}.$$

当荟萃集之间的偏序 $\leqslant$ 限制到这个集合上时, 就是力迫构思 $\mathbb{P}\left(\mathcal{I}^{ns}_{\mathfrak{P}(X)}\right)$.

根据泛型超滤子的定义, 如果 $S \in G$, $S \leqslant T$, 那么 $T \in G$. 由此得知如果 $S \in G_X$, 在 $\mathbb{P}\left(\mathcal{I}^{ns}_{\mathfrak{P}(X)}\right)$ 中有 $S \leqslant T$, 那么一定有 $T \in G_X$. 尤其是, 如果 $S \in G_X$, $S \subset T \subset \mathfrak{P}(X)$, 那么 $T \in G_X$.

设 S 和 T 都是 G_X 的两个元素. 它们是 $\mathfrak{P}(X)$ 上的荟萃集. 根据引理 3.34 中的 (3) 以及 S 和 T 在 G 中有共同下界这一事实, 我们知道 $S \cap T \in G$. 从而 $S \cap T \in G_X$.

欲证 G_X 是 $\mathfrak{P}^{V}(X)$ 上的 V-超滤子, 证明下述命题就足够了: 对于 V 中任意的 $A \subset \mathfrak{P}^{V}(X)$, 对于任意的 $S \in P_{<\delta}$, 两个集合 A 与 $\mathfrak{P}^{V}(X) - A$ 之间至少有一个是 $P_{<\delta}$ 中的元素, 并且与 S 无冲突.

为此, 令 $A\subset\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X)$ 在 V 中, 以及 $S\in P_{<\delta}$. 令 $Y=\bigcup S$.

根据推论 3.22, $S\uparrow(X\cup Y)$ 在 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X\cup Y)$ 中是荟萃集. 于是, 两个集合

$$A\uparrow(X\cup Y)\text{ 与 }\left(\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X)-A\right)\uparrow(X\cup Y)$$

中至少有一个与集合 $S\uparrow(X\cup Y)$ 的交是 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X\cup Y)$ 上的荟萃集. 为了确定起见, 设

$$(A\uparrow(X\cup Y))\cap(S\uparrow(X\cup Y))$$

是 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X\cup Y)$ 上的荟萃集. 由于 $A=(A\uparrow(X\cup Y))\downarrow X$, A 在 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X)$ 上是荟萃集. 不仅如此, 还有下述事实:

$$(A\uparrow(X\cup Y))\cap(S\uparrow(X\cup Y))\leqslant(A\uparrow(X\cup Y))\leqslant A;$$
$$(A\uparrow(X\cup Y))\cap(S\uparrow(X\cup Y))\leqslant(S\uparrow(X\cup Y))\leqslant S.$$

现在来证明 $G_X\supset\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X)}$. 设 C 在 V 中是 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X)$ 上的一个无界闭集. 用 C 替代 A 后重复上段的讨论. 因为 $C\uparrow(X\cup Y)$ 是 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X\cup Y)$ 上的无界闭集, 所以

$$(C\uparrow(X\cup Y))\cap(S\uparrow(X\cup Y))$$

是 $\mathfrak{P}^{\mathrm{V}}(X\cup Y)$ 上的荟萃集. 因此, C 与 S 有共同下界.

相容性 (a) 和 (b) 由引理 3.34 直接得到. □

注意, G_X 未必是 V 上的 $\mathbb{P}\left(\mathcal{I}^{ns}_{\mathfrak{P}(X)}\right)$-泛型超滤子.

全荟萃塔泛型超幂

现在我们将 2.7.1 小节中的泛型超幂构造迁移到全荟萃塔泛型扩张中来.

设 δ 是一个极限序数.

设 $S\in P_{<\delta}$, $f:S\to\mathrm{V}$ 并且 $f\in\mathrm{V}$. 对于 $X\in\mathrm{V}_\delta$, 如果 $X\supset\bigcup S$, 那么就令

$$\forall Y\in(S\uparrow X)\ \left(f^X(Y)=f\left(Y\cap\bigcup S\right)\right).$$

设 G 是 V 之上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 我们来定义泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$.

设 $f:S\to\mathrm{V}$ 和 $g:T\to\mathrm{V}$ 都是 V 中的函数, 并且 S 和 T 都在 G 中. 令

$$X=\bigcup(S\cup T).$$

定义

$$f\sim_G g\leftrightarrow\left\{Y\in((S\uparrow X)\cap(T\uparrow X))\;\middle|\;f^X(Y)=g^X(Y)\right\}\in G.$$

令 $[\![f]\!]_G$ 为所有与 f 在 $\sim_G$ 关系下等价的秩最小的那些函数的集合. 在这个基础上, 定义 $\in_G$ 如下: 给定 $f: S \to \mathrm{V}$ 和 $g: T \to \mathrm{V}$ 都是 V 中的函数, 并且 S 和 T 都在 G 中. 令

$$X = \bigcup (S \cup T),$$

以及令

$$[\![f]\!]_G \in_G [\![g]\!]_G \leftrightarrow \left\{ Y \in ((S \uparrow X) \cap (T \uparrow X)) \;\middle|\; f^X(Y) \in g^X(Y) \right\} \in G.$$

于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 我们定义泛型超幂

$$\prod_G (\mathrm{V}, \in) = \left(\{ [\![f]\!]_G \mid f \in \mathrm{V}\, \mathrm{dom}(f) \in G \wedge f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{V} \}, \in_G \right).$$

以及依照对应 $\mathrm{V} \ni x \mapsto [\![c_x^{\{\varnothing\}}]\!]_G$, 其中 $c_x^{\{\varnothing\}} : \{\varnothing\} \to \{x\}$, 来定义泛型嵌入映射

$$i'_G : \mathrm{V} \to \prod_G (\mathrm{V}, \in).$$

对于这个泛型超幂, 我们也有下面的 Łoś 基本定理:

定理 3.30　*设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设*

$$\varphi(v_1, \cdots, v_n)$$

为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 V 中的 n 个函数, 并且它们的定义域都是 G 中的元素. 令

$$X = \bigcup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{dom}(f_i) \text{ 以及 } T = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{dom}(f_i) \uparrow X).$$

那么

$$\begin{aligned} &\prod_G (\mathrm{V}, \in) \models \varphi \left[[\![f_1]\!]_G, \cdots, [\![f_n]\!]_G \right] \\ \leftrightarrow &\left\{ Y \in T \mid (\mathrm{V}, \in) \models \varphi \left[f_1^X(Y), \cdots, f_n^X(Y) \right] \right\} \in G. \end{aligned}$$

因此, 映射 $i'_G : (\mathrm{V}, \in) \prec \prod_G (\mathrm{V}, \in)$.

证明　(略.) □

假设在泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的, 那么它有一个唯一的传递化 $(\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G), \in)$ 和唯一的传递化映射 $\pi_G : \prod_G (\mathrm{V}, \in) \cong (\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G), \in)$, 其中, 我们用 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 来记与之同构的唯一的传递类; 令

$$i_G = \pi_G \circ i'_G : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G).$$

称 i_G 为 $\mathrm{V}[G]$ 中的泛型超幂嵌入映射.

即使在泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 并非有秩, 它的序数中的有秩部分也可以非常大; 事实上 δ 总会被包含在这个泛型超幂的序数中的有秩部分. 那么什么是泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 的有秩部分?

一般来说, 设 (N,E) 是 ZF 的一个类模型. 设 $x\in N$. 称 x 属于结构 (N,E) 的**有秩部分**[16], 记成 $x\in \mathrm{YZBF}(N,E)$, 当且仅当下述类结构

$$\left(\left\{y\;\middle|\; y\,E\,\left(\mathcal{TC}^{(N,E)}(x)\right)\right\},E\right)$$

是有秩结构, 其中, $\mathcal{TC}^{(N,E)}(x)$ 是 x 在结构 (N,E) 中计算出来的传递闭包. 对等地, $x\in \mathrm{YZBF}(N,E)$ 当且仅当不存在一个从 x 开始的无穷的 E-递降序列. 如果 $\mathrm{YZBF}(N,E)$ 非空, 那么 $(\mathrm{YZBF}(N,E),E)$ 就是一个有秩模型. 如果此时对于每一个 $x\in \mathrm{YZBF}(N,E)$ 而言,

$$\{y\mid y\,E\,x\}$$

是一个集合, 并且 $(\mathrm{YZBF}(N,E),E)$ 还是同一律的模型, 那么它就有唯一的传递化 (类或者集合) 模型和唯一的传递化映射. 令

$$\mathrm{Ord}^N=\{x\in N\mid (N,E)\models x\,\text{是一个序数}\}.$$

称 $I\subseteq \mathrm{Ord}^N$ 为 Ord^N 的一个**前段**当且仅当

$$\forall x\in \mathrm{Ord}^N\,\exists y\in I\,(x\,E\,y\to x\in I).$$

对 $\alpha\in\mathrm{Ord}$, 定义 $\alpha\in \mathrm{YZXS}^*(N,E)$ 当且仅当存在 Ord^N 的一个前段 I 以至于 $(\alpha,\in)\cong(I,E)$. 注意, 如果每一个序数都与 Ord^N 的某一个 (也是唯一的一个) 前段序同构, 那么 $\mathrm{YZXS}^*(N,E)=\mathrm{Ord}$; 否则, $\mathrm{YZXS}^*(N,E)$ 中必有最大元, 也就是说, $\mathrm{YZXS}^*(N,E)$ 是一个后继序数. 如果 $\mathrm{YZXS}(N,E)=\mathrm{Ord}$, 则令 $\mathrm{YZXS}(N,E)=\mathrm{Ord}$; 否则, 则令 $\mathrm{YZXS}(N,E)$ 为 $\mathrm{YZXS}^*(N,E)$ 中的最大元. 这样 $\mathrm{YZXS}(N,E)$ 就与 (N,E) 中的有秩部分中的序数的全体[17]相对应.

这样, 我们还是用 π_G 来记泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 的有秩部分 $\mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$ 唯一的传递化映射, 然后用 $i_G=\pi_G\circ i'_G$ 来记从 V 到 $\mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$ 的传递化的嵌入映射, 其中 i'_G 意味着限制到 V 的一个子类之上: 那些 $x\in\mathrm{V}$ 以至于 $i'_G(x)\in\mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$.

下面我们来对泛型超幂展开基本分析.

16 YZBF, 有秩部分, You Zhi Bu Fen.

17 YZXS, 有秩序数, You Zhi Xu Shu.

引理 3.36 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S \in G$ 和 $T \in G$. 那么对于任意的定义在 T 上的函数 $f \in \mathrm{V}$, 都有

$$[\![f]\!]_G \in_G [\![\mathrm{Id}_S]\!]_G \leftrightarrow \exists a \in \bigcup S \ ([\![f]\!]_G = i'_G(a)),$$

其中 Id_S 是 S 上的恒等函数.

证明 设 $a \in \bigcup S \in G$. 令 $S^* = \{Y \in S \mid a \in Y\}$. 由于 S^* 在 S 上是一个无界闭集, 我们必有 $S^* \in G$. 这样

$$\left\{Y \subset \bigcup S \;\middle|\; c_a^S(Y) \in \mathrm{Id}_S(Y)\right\} \in G.$$

因此, $i'_G(a) \in [\![\mathrm{Id}_S]\!]_G$.

现在假设 $f : T \to \mathrm{V}$ 为 V 中的一个函数, 并且 $T \in G$. 设 $[\![f]\!]_G \in_G [\![\mathrm{Id}_S]\!]_G$. 因为

$$[\![f]\!]_G = [\![f^{\bigcup(S\cup T)}]\!]_G,$$

我们可以假设 $\bigcup S \subset \bigcup T$. 根据引理 3.34 中的 (3), $(T \cap (S \uparrow \bigcup T)) \in G$. 因此我们又可以假设 $T \subset (S \uparrow \bigcup T)$. 令

$$S^* = \left\{Y \subset \bigcup T \;\middle|\; f(Y) \in \left(Y \cap \bigcup S\right)\right\}.$$

根据 $\in_G$ 的定义, 我们就有 $S^* \in G$. 根据非荟萃理想的正规性, 任何在 S^* 上为荟萃集的集合都一定在 S^* 上为荟萃集的集合以至于在其上 f 为一个常值函数. 根据引理 3.34 中的 (1) 和 (2), 下述条件集合在 S^* 之下是稠密的:

$$\left\{p \leqslant S^* \mid \exists a \in \bigcup S \ \forall Y \in p \ \left(f\left(Y \cap \bigcup T\right) = a\right)\right\}.$$

因此, G 必包括了这样的条件 p. 此时 $p \uparrow \bigcup T$ 就见证了 $[\![f]\!]_G = i'_G(a)$, 其中 $a \in \bigcup S$ 是与 p 相应的那个 a. □

推论 3.23 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 之上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S \in G$. 如果 $i'_G[\bigcup S] \subset \mathrm{YZBF}(\prod(\mathrm{V}, \in))$, 那么

$$[\![\mathrm{Id}_S]\!]_G \in \mathrm{YZBF}\left(\prod(\mathrm{V}, \in)\right) \wedge i'_G\left[\bigcup S\right] = \pi_G([\![\mathrm{Id}_S]\!]_G).$$

证明 由引理 3.36 直接得到. □

引理 3.37 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 之上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且在 $\mathrm{V}[G]$ 中泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 是有秩模型. 设 $S \in P_{<\delta}$. 那么

$$S \in G \leftrightarrow i_G\left[\bigcup S\right] \in i_G(S).$$

证明 因为 Id_S 的值域就是 S, 所以如果 $S \in G$, 那么 $\pi_G\left(\llbracket \mathrm{Id}_S \rrbracket_G\right) \in i_G(S)$, 根据推论 3.23, 就有 $i_G\left[\bigcup S\right] \in i_G(S)$.

反过来, 如果 $S \notin G$, 那么 S 的补集 $(\mathfrak{P}(\bigcup S) - S) \in G$. 于是,

$$i_G\left[\bigcup S\right] = i_G\left[\bigcup\left(\mathfrak{P}\left(\bigcup S\right) - S\right)\right] \in i_G\left(\mathfrak{P}\left(\bigcup S\right) - S\right).$$

因此, $i_G\left[\bigcup S\right] \notin i_G(S)$. □

下面的引理给出泛型超幂的基本表示特性: 恒等函数起着关键点的作用.

引理 3.38 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S \in G$, $f : S \to \mathrm{V}$, $f \in \mathrm{V}$. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中必有

(1) $\prod\limits_G(\mathrm{V}, \in) \models \left(i'_G(f)\right)\left(\llbracket \mathrm{Id}_s \rrbracket_G\right) = \llbracket f \rrbracket_G$;

(2) 如果 $i'_G(f) \in \mathrm{YZBF}\left(\prod\limits_G(\mathrm{V}, \in)\right)$, 那么 $\left(i_G(f)\right)\left(i_G\left[\bigcup S\right]\right) = \pi_G\left(\llbracket f \rrbracket_G\right)$.

证明 根据全荟萃塔泛型超幂基本定理 (定理 3.30), 超幂结构 $\prod\limits_G(\mathrm{V}, \in)$ 满足下述等式

$$\left(\llbracket c_f^S \rrbracket_G\right)\left(\llbracket \mathrm{Id}_S \rrbracket_G\right) = \llbracket f \rrbracket_G.$$

这个等式给出 (1). (2) 则由上面的推论 3.23 给出. □

现在我们来探讨一下传递集合在这个力迫构思中的重要作用.

首先, 如果 a 是一个传递集合, 那么

$$\left\{Y \subset a \mid (Y, \in) \models \text{同一律}\right\} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}(a)}.$$

对于任意一个集合 Y, 如果 $(Y, \in) \models$ 同一律, 那么就令 $\mathrm{CDH}(Y)$ 为与之同构的唯一的传递集合, Y 的传递化[18], 并且令 $\pi_Y : (Y, \in) \cong (\mathrm{CDH}(Y), \in)$ 为唯一的传递化同构映射; 否则, 就令 $\mathrm{CDH}(Y) = Y$, 并且令 $\pi_Y = \mathrm{Id}_Y$. 因此, 无论如何, $\pi_Y : (Y, \in) \cong (\mathrm{CDH}(Y), \in)$.

对于任意一个集合 x 以及任意一个包括 x 的传递集合 $a \ni x$, 定义一个以 $\mathfrak{P}(a)$ 为定义域的函数 Prj_x^a 如下: 对于 $Y \subset a$, 令

$$\mathrm{Prj}_x^a(Y) = \begin{cases} \pi_Y(x) & \text{如果 } x \in Y, \\ \varnothing & \text{如果 } x \notin Y. \end{cases}$$

引理 3.39 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 必有

(1) 对于每一个传递集合 $a \in \mathrm{V}_\delta$,

18 CDH, 传递化, Chuan Di Hua.

(a) $[\![\mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G \in \mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$;

(b) $a = \pi_G\left([\![\mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)$;

(c) $\forall x \in a\ \left(x = \pi_G\left([\![\mathrm{Prj}_x^a]\!]_G\right)\right)$.

(2) $\delta \subset \mathrm{YZXS}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$.

证明 (1) 固定 V_δ 中的一个传递集合 a. 令 $t = \mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(a)}$.

根据泛型超幂基本定理 (定理 3.30), $\prod_G(\mathrm{V},\in) \models$ "$(i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)$ 是传递的" 以及

$$\prod_G(\mathrm{V},\in) \models \pi_{[\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G} : (i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right) \cong [\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G.$$

尤其, 这就意味着下述两个模型

$$\left(\left\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in (i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)\right\}, \in_G\right)$$

与

$$\left(\left\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in [\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right\}, \in_G\right)$$

同构.

由 a 的传递性以及引理 3.36(令其中的 $S = \mathfrak{P}(a)$), 存在唯一的同构映射

$$\hat{\pi} : \left(\left\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in [\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right\}, \in_G\right) \cong (a, \in),$$

并且此同构映射 $\hat{\pi}$ 由下述等式确定：对于 $x \in a$,

$$\hat{\pi}\left(i'_G(x)\right) = x.$$

由同构映射的传递性, 我们就有

$$\left(\left\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in (i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)\right\}, \in_G\right) \cong (a, \in).$$

这就意味着

$$(i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right) \in \mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right),$$

以及 $\pi_G\left((i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)\right) = a$.

根据引理 3.38 中的 (1), 我们就有 $(i'_G(t))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right) = [\![t]\!]_G$. 于是 (1)(a) 和 (1)(b) 得证.

同构映射 $\hat{\pi}$ 的唯一性蕴涵下述成立：

$$\prod_G(\mathrm{V},\in) \models \pi_{[\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G}\left(i'_G(x)\right) = \pi_G^{-1}(x),$$

也就是说,

$$\prod_G(\mathrm{V},\in) \models (i'_G(\mathrm{Prj}^a_x))\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right) = \pi_G^{-1}(x).$$

由引理 3.38 中的 (1), 我们有

$$[\![\mathrm{Prj}^a_x]\!]_G = \pi_G^{-1}(x).$$

应用映射 π_G 于上式的两端, 我们就得到 (1)(c).

(2) 由 (1) 得到. □

现在我们应用上述一系列表示引理来得到一个有关泛型超幂封闭性的技术性引理. 这个引理所提供的函数将在后面的引理 3.61 的证明中用到.

引理 3.40 *设 δ 是一个极限序数. 设 $\{\alpha,\beta\}\subset\delta$ 并且 β 也是一个极限序数. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子.*

(1) 存在一个具备下述特点的函数 $h_{\beta,\alpha}\in\mathrm{V}$: $\mathrm{dom}\,(h_{\beta,\alpha})\in G$; 并且对于任意的函数 $f\in\mathrm{V}$, 如果 $\mathrm{dom}(f)\in G$, 那么

$$[\![f]\!]_G \in_G [\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G \leftrightarrow \exists S\in G\cap\mathrm{V}_\beta\,\exists g\in\mathrm{V}\ \left(g\in\mathrm{V}_\alpha^S\wedge [\![f]\!]_G=[\![g]\!]_G\right).$$

(2) 如果 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 是有秩的, 那么

$$\left\{\pi_G\left([\![f]\!]_G\right)\mid \exists S\in G\cap\mathrm{V}_\beta\ \left(f\in\mathrm{V}\wedge f\in\mathrm{V}_\alpha^S\right)\right\}\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},G).$$

证明 我们先证 (2). 这会有利于理解 (1) 的证明.

假设 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 是有秩的. 根据引理 3.39, 我们有 $\mathrm{V}_\delta\subset\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$. 对于 $\gamma<\delta$, 令 $i_\gamma=i_G\restriction_{\mathrm{V}_\gamma}$. 根据推论 3.23, 有

$$i_G\left[\mathrm{V}_\gamma\right]=\pi_G\left([\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(\mathrm{V}_\gamma)}]\!]_G\right)\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},G).$$

因此, $i_\gamma\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$. 令 $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}+3$. 根据引理 3.38, 下述集合就是所关注的:

$$\left\{z\ \middle|\ \exists S\in G\cap\mathrm{V}_\beta\,\exists f\in\mathrm{V}_\gamma\ \left(f\in\mathrm{V}_\alpha^S\wedge z=(i_G(f))\left(i_G\left[\bigcup S\right]\right)\right)\right\}.$$

而这个集合与下述集合等同:

$$\left\{z\ \middle|\ \exists X\in\mathrm{V}_\beta\,\exists f\in\mathrm{V}_\gamma\ \left(f\in\mathrm{V}_\alpha^{\mathfrak{P}(X)}\wedge z=(i_G(f))\,(i_G[X])\right)\right\},$$

此集合又与下面的集合等同:

$$\left\{z\ \middle|\ \exists X\in\mathrm{V}_\beta\,\exists f\in\mathrm{V}_\gamma\ \left(f\in\mathrm{V}_\alpha^{\mathfrak{P}(X)}\wedge z=(i_\gamma(f))\,(i_\gamma[X])\right)\right\}.$$

这是一个由 $i_\gamma \in \mathrm{ult}(V, G)$ 和 $V_\delta \subset \mathrm{ult}(V, G)$ 中的参数定义出来的集合. 所以它在 $\mathrm{ult}(V, G)$ 中. 这就表明我们所关注的集合的确是在 $\mathrm{ult}(V, G)$ 中.

注意, 在上述集合的等同断言中, 为了简洁起见, 我们沉默地应用了这样的事实：如果 $f \subset g$, $S = \mathrm{dom}(f) \in G$, 并且 $\mathrm{dom}(g) = \mathfrak{P}\left(\bigcup S\right)$, 那么 $[\![f]\!]_G = [\![g]\!]_G$. 我们相信, 如果需要, 读者会有兴趣填补详细论证. 下面我们还会继续这样做.

现在来证明 (1). 首先注意到这样一个事实：根据引理 3.39, V_δ 被传递化映射 π_G 的值域所覆盖. 因此, 对于 $x \in V_\delta$, 令 $x^* = \pi_G^{-1}(x)$.

再者, 对于 $\gamma < \delta$, 映射 $i'_G \restriction_{V_\gamma}$ "可以被看作实际上属于" $\prod_G (V, \in)$. 这是因为：固定 $\gamma < \delta$. 如下定义一个以 $\mathfrak{P}(V_\gamma)$ 为定义域的函数 f_γ：

$$\forall Y \in \mathfrak{P}(V_\gamma) \ \left(f_\gamma(Y) = \pi_Y^{-1}\right),$$

其中 $\pi_Y : (Y, \in) \cong (\mathrm{CDH}(Y), \in)$. 于是, 对于 $Y \subset V_\gamma$, 对于 $x \in Y$, 我们就有

$$(f_\gamma(Y))^{-1}(x) = \mathrm{Prj}_x^{V_\gamma}(Y).$$

令 $j_\gamma = [\![f_\gamma]\!]_G$. 根据引理 3.39,

$$\prod_G (V, \in) \models j_\gamma \text{ 是一个以 } (V_\gamma)^* \text{ 为定义域的函数.}$$

对于 $x \in V_\gamma$, 根据泛型超幂基本定理 (定理 3.30), 应用上面的等式, 就有

$$\prod_G (V, \in) \models j_\gamma^{-1}(i'_G(x)) = [\![\mathrm{Prj}_x^{V_\gamma}]\!]_G.$$

根据引理 3.39, $[\![\mathrm{Prj}_x^{V_\gamma}]\!]_G = x^*$. 因此, 对于 $x \in V_\gamma$ 都有

$$\prod_G (V, \in) \models j_\gamma(x^*) = i'_G(x).$$

这样一来, 对于 $\gamma < \delta$ 以及 $S \in G \cap V_\gamma$, 引理 3.36 告诉我们如下事实：

$$\prod_G (V, \in) \models [\![\mathrm{Id}_S]\!]_G = j_\gamma\left[\left(\bigcup S\right)^*\right].$$

尤其, 对 $X \in V_\gamma$, 我们有

$$\prod_G (V, \in) \models [\![\mathrm{Id}_{\mathfrak{P}(X)}]\!]_G = j_\gamma[X^*].$$

现在令 $\gamma \geqslant \max\{\alpha, \beta\} + 3$ 为 δ 中的一个序数. 令 $h_{\beta,\alpha}$ 为具备下述特点的函数：

$$\prod_G (V, \in) \models \forall z \left(\begin{array}{l} z \in [\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G \leftrightarrow \\ \exists x \, \exists y \in (V_\beta)^* \left(x : \mathfrak{P}(y) \to (V_\alpha)^* \wedge z = (j_\gamma(x))(j_\gamma[y])\right) \end{array} \right).$$

根据引理 3.38 中的 (1), 这样的函数 $h_{\beta,\alpha}$ 就满足 (1) 中的要求. □

前面我们见过任何同质嵌入映射都会有不动点. 那么当泛型超幂是有秩模型时, 泛型同质嵌入映射 i_G 是否也会有不动点呢? 我们现在来对此进行分析.

首先, 我们给出一个充分条件:

引理 3.41 设 κ 是一个基数. 设 $\delta > \kappa$ 是一个极限序数. 假设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且 $\{Y \subset \kappa \mid |Y| = \kappa\} \in G$. 那么 $i_G(\kappa) = \kappa$.

证明 根据引理 3.39, $\kappa = \pi_G\left([\![\mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(\kappa)}]\!]_G\right)$. 而对于 $Y \in [\kappa]^\kappa$, $\mathrm{CDH}(Y) = \kappa$. 所以,

$$\kappa = \pi_G\left([\![c_\kappa]\!]_G\right) = i_G(\kappa). \qquad \square$$

接下来我们需要找到实现这种条件的可能性.

定义 3.16 一个严格大于 $\aleph_1$ 的基数 κ 被称为一个**全杨森基数**[19] 当且仅当对于每一个荟萃集 S 而言, 如果 $\kappa \ni \bigcup S$, 那么下述集合一定是 $\mathfrak{P}(\kappa)$ 上的荟萃集:

$$\left\{Y \subseteq \kappa \;\middle|\; \kappa = |Y| \wedge \left(Y \cap \bigcup S\right) \in S\right\}.$$

引理 3.42 如果 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的一个正规测度, 那么 κ 是一个全杨森基数, 并且所有比 κ 小的全杨森基数的集合在 U 中.

证明 只需证明可测基数 κ 是一个全杨森基数就行, 因为一旦如此, 那么 κ 会在超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, U)$ 之中还是一个全杨森基数.

设 S 是一个荟萃集合, 并且 $\gamma = \bigcup S$ 是一个严格小于可测基数 κ 的序数. 设 $f : \kappa^{<\omega} \to \kappa$. 我们需要找到一个具备下述性质的 $Y \in [\kappa]^\kappa$:

$$f\left[Y^{<\omega}\right] \subset Y \wedge (Y \cap \gamma) \in S.$$

令 $\langle g_i \mid i < \omega\rangle$ 为集合 $\{f\restriction_{\kappa^n} \mid n < \omega\}$ 中函数的所有可能的复合的列表. 如果 $g_i : \kappa^{n_i} \to \kappa$, p 是集合 $\{1, \cdots, n_i\}$ 上的一个置换, 那么如下定义 $g_i^p : [\kappa]^{n_i} \to \kappa$: 对于 $x = \{x_1, \cdots, x_{n_i}\}_< \in [\kappa]^{n_i}$, 令

$$g_i^p(x) = g_i\left(\langle x_{p(1)}, \cdots, x_{p(n_i)}\rangle\right).$$

对于每一个 $i < \omega$, 对于每一个 $\{1, \cdots, n_i\}$ 上的一个置换 p, 如下定义 $h_i^p : [\kappa]^{n_i} \to \gamma$:

$$h_i^p(x) = \begin{cases} g_i^p(x) & \text{如果 } g_i^p(x) \in \gamma, \\ 0 & \text{如果 } g_i^p(x) \notin \gamma. \end{cases}$$

令 U 为 κ 上的一个正规测度. 应用 U 的正规性, 我们有下述结论:

---

19 completely Jonsson cardinal.

对于每一个 $i<\omega$, 对于每一个 $j\leqslant n_i$, 对于每一个 $\{1,\cdots,n_i\}$ 上的一个置换 p, 对于每一个 $x\in[\gamma]^j$, 必有一个具备下述特点的集合 $A^p_{i,x}\in U$:

$$A^p_{i,x}\cap\gamma=\varnothing\ \wedge\ \exists\beta<\gamma\forall z\in\left[A^p_{i,x}\right]^{n_i-j}\ (h^p_i(x\cup z)=\beta)\,.$$

令 B 为所有这些集合 $A^p_{i,x}$ 的交. 应用 U 的 κ- 完全性, 我们得到 $B\in U$.

对于每一个 $i<\omega$, 对于每一个 $j\leqslant n_i$, 对于每一个 $\{1,\cdots,n_i\}$ 上的一个置换 p, 如下定义 $\bar h^p_{i,j}:[\gamma]^j\to\gamma$: 对于每一个 $x\in[\gamma]^j$, 令

$$\bar h^p_{i,j}(x)=h^p_i(x\cup z)\ \left(z\in[B]^{n_i-j}\right).$$

因为 S 是 γ 上的荟萃集, 所以必有 $X\in S$ 以至于 X 对于这可数个函数 $\bar h^p_{i,j}$ 都是封闭的. 令 Y 为集合 $X\cap B$ 在 f 下的闭包. 那么 $B\subset Y$, 并且 $Y\cap\gamma=X\in S$. □

一个好奇的问题是: 全杨森基数会有多大?

引理 3.43　设 κ 是一个全杨森基数.

(1) 如果 $\kappa>2^{\aleph_0}$, 那么 κ 是一个强极限基数;

(2) 如果 $\kappa\geqslant|\mathrm{V}_{\omega_1}|$, 那么 $|\mathrm{V}_\kappa|=\kappa$.

证明　令 $\omega_1\leqslant\gamma<\kappa$. 集合 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\gamma)$ 在 $\mathfrak{P}(\gamma)$ 上是荟萃集. 因为 κ 是一个全杨森基数, 应用引理 3.25 中关于荟萃集特征的条件 (4), 我们得到一个具备下述特点的 $X\prec\mathrm{V}_{\kappa+1}$:

$$|X\cap\kappa|=\kappa\ \wedge\ \gamma\in X\ \wedge\ |X\cap\gamma|=\aleph_0.$$

令 $\pi:(X,\in)\cong(M,\in)$ 为 X 的传递化映射. 那么, $\pi(\kappa)=\kappa$ 以及 $\pi(\gamma)<\omega_1$.

欲见 (1) 成立, 假设不然. 假设 $2^{|\gamma|}\geqslant\kappa$. 那么 $M\models 2^{|\pi(\gamma)|}\geqslant\kappa$. 于是, $\mathfrak{P}(\pi(\gamma))$ 中有 κ 个互不相同的元素的序列在 M 中. 这就意味着 $2^{\aleph_0}\geqslant\kappa$.

欲见 (2) 成立, 假设 $|\mathrm{V}_\gamma|\geqslant\kappa$. 于是 $\mathrm{V}^M_{\pi(\gamma)}$ 中有 κ 个互不相同的元素的序列在 M 中. 所以 $\kappa\leqslant\left|\mathrm{V}_{\pi(\gamma)}\right|<|\mathrm{V}_{\omega_1}|$. □

引理 3.44　设 $\kappa\geqslant|\mathrm{V}_{\omega_1}|$ 是一个全杨森基数. 令 $\gamma<\kappa$. 设 S 在 $\mathfrak{P}(\mathrm{V}_\gamma)$ 上是荟萃集. 令

$$\tilde S=\{Y\subseteq\kappa\cap\mathrm{V}_\gamma\mid\kappa=|Y\cap\kappa|\wedge(Y\cap\mathrm{V}_\gamma)\in S\}\,.$$

那么 $\tilde S$ 在 $\mathfrak{P}(\kappa\cup\mathrm{V}_\gamma)$ 上是荟萃集.

证明　(练习.) □

利用全杨森基数这一概念, 我们可以得到泛型嵌入映射的不动点. 我们希望应用全杨森基数来实现引理 3.41 中的条件. 事实上全杨森基数都有可能成为某个泛型嵌入映射的不动点.

引理 3.45　设 $\kappa\geqslant|\mathrm{V}_{\omega_1}|$ 为一个全杨森基数. 设 $\delta>\kappa$ 为一个极限序数. 令 $\gamma<\kappa$. 设 S 在 $\mathfrak{P}(\gamma)$ 上是荟萃集. 那么存在 V-上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子 $G\ni S$ 以至于 $i_G(\kappa)=\kappa$.

证明 令 $\tilde{S}$ 如引理 3.44 所给出. 令 $G \ni \tilde{S}$ 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么

$$\tilde{S} \leqslant \tilde{S} \downarrow \mathrm{V}_{\gamma} \leqslant S.$$

于是, $S \in G$, 并且 $[\kappa]^{\kappa} \in G$. 于是, 根据引理 3.41 中的条件得到满足, 从而

$$i_G(\kappa) = \kappa. \qquad \square$$

当 δ 是武丁基数时

前面对一般极限序数 δ 定义了全荟萃塔力迫构思, 并且对由此诱导的泛型超幂进行了一般性分析. 现在我们专注于当 δ 是一个武丁基数的情形. 我们会看到当 δ 是一个武丁基数时, 在 V 的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型扩张中, 泛型超幂总是有秩的, 并且有很好的封闭性. 我们当前的目标就是证明这样的结论.

为了叙述简便, 需要不断引进几个技术性的名词或术语. 这些技术名词的含义在证明上述结论中扮演重要作用. 在引进这些相关的技术性名词之前, 我们先看一个例子. 这有助于弄清楚这些技术名词被引进的基本动机以及它们的原型是什么. 这样当见到它们时就不会觉得那么突兀.

例 3.6 设 W 是 ω_1 上的荟萃子集的一个极大的彼此冲突的集合. λ 是一个足够大的正则基数以至于 $W \cup \{W\} \subset \mathscr{H}_\lambda$. 对于 $X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathscr{H}_\lambda)$, 令 $X \in S(W)$ 当且仅当

$$\left(\begin{array}{l} W \in X \prec \mathscr{H}_\lambda \wedge \\ \exists N \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathscr{H}_\lambda)\, \exists A \in N \cap W \ (X \subset N \ \wedge \ X \cap \omega_1 = N \cap \omega_1 \in A) \end{array}\right).$$

那么 $S(W)$ 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathscr{H}_\lambda)$ 上是荟萃集.

我们需要的第一技术名词是起底. 它的原型就是例 3.6 中对可数同质子模型 N 所提出的要求:

$$\exists A \in N \cap W \ (N \cap \omega_1 \in A).$$

定义 3.17 (起底) 设 δ 是一个极限序数. 设 $W \subset P_{<\delta}$. 称一个集合 X **起底** W 当且仅当 $\exists S \in X \cap W\ ((X \cap \bigcup S) \in S)$. 称这样的 S 为 X 起底 W 的一个证据.

我们并不怎么对力迫构思 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 任意的子集是否存在起底集合感兴趣, 我们真正感兴趣的是它的那些极大冲突子集. 对于这些对象, 我们发现那些见证起底特性的证据往往具有唯一性.

引理 3.46 设 δ 是一个极限序数. 设 $W \subset P_{<\delta}$. 令 $\lambda \geqslant \delta$ 为一个序数.

设 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$. 如果 S 和 T 都是 X 起底 W 的证据, 那么 S 和 T 必然是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中两个无冲突的条件.

证明 考虑如下语句 θ: 对于任意的极限序数 γ, 对于由 γ 所给出的全荟萃塔力迫构思 $(P_{<\gamma}, \leqslant)$ 中的任意两个彼此冲突的条件 S 和 T, 一定存在一个具备下述特点的 $\mathfrak{P}(\bigcup(S\cup T))$ 上的无界闭集 C:

$$\forall Y \in C\ \left(\left(Y \cap \bigcup S\right) \notin S \vee \left(Y \cap \bigcup T\right) \notin T\right).$$

$\mathrm{V}_\beta \models \theta$. 因此, 如果 $Y \prec \mathrm{V}_\beta$, 那么 $Y \models \theta$, 并且对于 X 中的那些证据 C 而言, 它们在 V 中还是同样的证据.

注意到这一点之后, 我们来证明引理. 假设 S 和 T 都是 X 起底 W 的证据, 但是它们是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中两个相冲突的条件. 由于 $\lambda \geqslant \delta$, δ 是一个极限序数, $\{S,T\} \subset X$, 根据上面的观察, X 中必然有一个 (既在 X 中也在 V_λ 中) 见证它们相互冲突的无界闭集 C. 固定这样一个证据 $C \in X$, 并且令 X 中的一个函数

$$f : \left(\bigcup(S\cup T)\right)^{<\omega} \to \bigcup(S\cup T)$$

来实现等式 $C = \{Y \subset \bigcup(S\cup T) \mid f[Y^{<\omega}] \subset Y\}$.

如此一来, 集合 $X \cap \bigcup(S\cup T)$ 关于 f 是封闭的, 于是 $(X \cap \bigcup(S\cup T)) \in C$. 由于 C 是 S 和 T 相冲突的证据, 必然就有下述事实:

$$\left(\left(\left(X \cap \bigcup(S\cup T)\right) \cap \bigcup S\right) \notin S\right) \vee \left(\left(\left(X \cap \bigcup(S\cup T)\right) \cap \bigcup T\right) \notin T\right).$$

也就是说, 下述事实成立:

$$\left(X \cap \bigcup S\right) \notin S \vee \left(X \cap \bigcup T\right) \notin T.$$

可是, S 和 T 是 X 起底 W 的证据. 这就是一个矛盾. □

我们需要的第二个技术名词是末端扩展. 它的原型就是例 3.6 中可数同质子模型 X 与 N 之间的等式关系 $X \cap \omega_1 = N \cap \omega_1$. 对可数同质子模型 N 所提出的要求:

$$\exists A \in N \cap W\ (N \cap \omega_1 \in A).$$

定义 3.18 称集合 X 是集合 Y 的一个**末端扩展**当且仅当 $X \cap \bigcup Y \subset Y$.

回顾一下准稠密这个名词的含义: 一个偏序集 $(P, \leqslant)$ 的子集 D 在 P 中是**准稠密**的当且仅当 P 中的每一个元素都与 D 中的某个元素不发生冲突.

下面我们来引进荟萃塔力迫构思分析中最为关键的技术名词: 半恰当准稠密子集. 它的原型或多或少是例 3.6, 只是半恰当性要求得更多一些.

定义 3.19 (半恰当) 设 δ 是一个不可数的强极限基数. 全荟萃塔力迫构思 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个准稠密子集 D 是**半恰当**的当且仅当存在任意大的序数 λ 来实现下述要

求: 对于任意一个 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, 如果 $|X| < \delta$ 并且 $D \in X$, 那么一定存在一个具有下述特点的 Y:

(a) $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$;

(b) $X \subset Y$;

(c) Y 起底 D;

(d) $Y \cap \mathrm{V}_\delta$ 是 $X \cap \mathrm{V}_\delta$ 的末端扩展.

对于 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$, 称 Y 是一个 (D, X)-**证据**当且仅当上述条件中的 (b)~(d) 都成立.

引理 3.47　设 δ 是一个不可数的强极限基数, 以及 D 是全荟萃塔力迫构思 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个准稠密子集. 那么下述命题对等:

(1) D 是半恰当的;

(2) $\{X \in \mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1}) \mid \exists Y \prec \mathrm{V}_{\delta+1}\, Y \text{ 是一个} (D, X)\text{-证据}\} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1})}$;

(3) 令 M 为具备后述特点的传递集合: $M^{\mathrm{V}_\delta} \subset M \wedge \mathrm{V}_{\delta+2} \subset M$, 那么对于任意的 $X \prec M$, 如果 $|X| < \delta$ 以及 $\{\delta, D\} \subset X$, 那么

$$\exists Y \prec M\, (Y \text{ 是一个} (D, X)\text{-证据});$$

(4) 对于每一个梯度严格大于 $|\mathrm{V}_\delta|$ 的极限序数 λ, 对于每一个 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, 如果 $|X| < \delta$ 以及 $\{\delta, D\} \subset X$, 那么 $\exists Y \prec \mathrm{V}_\lambda\, (Y \text{ 是一个} (D, X)\text{-证据})$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 D 是半恰当准稠密子集. 令 $\lambda > \delta$ 由 D 的半恰当性定义所给出. 由引理 3.28 中的 (4), 下述集合

$$A = \{X \in \mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1}) \mid \exists M \prec \mathrm{V}_\lambda\ (|M| < \delta \wedge D \in M \wedge X = M \cap \mathrm{V}_{\delta+1})\}$$

属于 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1})}$. 设 $X \in A$, 令 M 为 $X \in A$ 的一个证据. D 的半恰当性给出一个 (D, X)-证据 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$. 此时, $Y \cap \mathrm{V}_{\delta+1}$ 也是一个 (D, X)-证据.

(2) $\Rightarrow$ (3). 设 (2) 成立. 令 M 为 (3) 的条件所言. 设 $X \prec M$ 并且 $|X| < \delta$ 以及 $\{\delta, D\} \subset X$. 由 (2), 令 $f : \mathrm{V}_{\delta+1}^{<\omega} \to \mathrm{V}_{\delta+1}$ 来见证

$$\forall Z \in \mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1})\ \left(f\left[Z^{<\omega}\right] \subset Z \to \left(\exists Y \prec \mathrm{V}_{\delta+1}\ \left(Y \text{ 是一个} (D, Z)\text{-证据}\right)\right)\right).$$

任何一个这样的函数 f 都被 $\mathrm{V}_{\delta+2}$ 中的某个元素所记录. 所以 M 中自有这样一个函数. 由于 $\{\kappa, D\} \subset X \prec M$, X 中也有这样的 f. 对于这样的函数 f, 集合 $X \cap \mathrm{V}_{\delta+1}$ 是封闭的. 于是, 存在一个作为 $(D, X \cap \mathrm{V}_{\delta+1})$-证据的 $Y \prec \mathrm{V}_{\delta+1}$. 取一个这样的 Y. 令

$$Y^* = \left\{g(u)\ \middle|\ g \in X \wedge g : \mathrm{V}_\delta^{<\omega} \to M \wedge u \in (Y \cap \mathrm{V}_\delta)^{<\omega}\right\}.$$

X 中的那些常值函数见证 $X \subset Y^*$. 我们来验证 $Y \cap \mathrm{V}_\delta = Y^* \cap \mathrm{V}_\delta$. 对此, 只需验证 $Y^* \cap \mathrm{V}_\delta \subseteq Y$.

设 $y \in Y^* \cap \mathrm{V}_\delta$. 易见

$$\exists g\, \exists u \in (Y \cap \mathrm{V}_\delta)^{<\omega}\ \left(g \in X \wedge g : \mathrm{V}_\delta^{<\omega} \to \mathrm{V}_\kappa \wedge y = g(u)\right).$$

对于这样一个函数 g, 它必在 $X \cap \mathrm{V}_{\delta+1}$ 之中. 所以, Y 中必有这样的 g. 由于 $u \in Y$, $Y \prec \mathrm{V}_{\delta+1}$, 所以, $y \in Y$.

这样, $Y \cap \mathrm{V}_\delta = Y^* \cap \mathrm{V}_\delta$. 因此, Y^* 起底 D, 并且 $Y^* \cap \mathrm{V}_\delta$ 是 $X \cap \mathrm{V}_\delta$ 的末端扩展. 这些表明 Y^* 是一个 (D, X)-证据. 剩下的是验证 $Y^* \prec M$.

为此, 令 $\varphi(v_0, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言中彰显自由变元的表达式.

设 $y_1, \cdots, y_n \in Y^*$. 假设 $\exists y_0 \in M\, M \models \varphi[y_0, y_1, \cdots, y_n]$. 我们需要在 Y^* 中找到一个 y_0 来实现 $M \models \varphi[y_0, y_1, \cdots, y_n]$.

对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, 令 g_i 和 u_i 见证 $y_i \in Y^*$. 此时存在一个具备如下特点的函数 $h : \mathrm{V}_\delta^{<\omega} \to M$: 对于 $x_1, \cdots, x_n \in \mathrm{V}_\delta^{<\omega}$, 如果 $\mathrm{dom}\,(x_i) = \mathrm{dom}\,(u_i)$, 那么

$$\begin{aligned}&(\exists y \in M\, M \models \varphi\,[y, g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n)])\\ &\to M \models \varphi\,[h(x_1 + \cdots + x_n), g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n)].\end{aligned}$$

由于 $M^{\mathrm{V}_\kappa} \subset M$, 这样的 $h \in M$. 由于 $X \prec M$, 所有涉及的 g_i 都在 X 之中, 所以 X 中必有这样的 h. 我们所要的 y_0 就可取成 $h(x_1 + \cdots + x_n)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). 注意 (3) 中的假设适用于每一个梯度严格大于 $|\mathrm{V}_\delta|$ 的极限序数 λ 所给出的 V_λ. 所以 (4) 只是 (3) 的特例.

(4) $\Rightarrow$ (1). 不证自明. □

下面的例子表明对于足够大的大基数而言, 半恰当性并不构成区分. 但对于不具备非常大的大基数性质的极限基数来讲, 半恰当性就有可能是一种强求.

例 3.7 如果 κ 是一个 2^κ-超紧基数, 那么全荟萃塔 $\mathbb{P}_{<\kappa}$ 的每一个准稠密子集都是一个半恰当准稠密子集.

证明 设 κ 是一个 2^κ-超紧基数. 令 $j : \mathrm{V} \prec M$ 为见证 κ 是 2^κ-超紧的同质嵌入映射, 即 M 是传递类, $\kappa = \mathrm{Crit}(j)$, $j(\kappa) > 2^\kappa$, 以及 $M^{2^\kappa} \subset M$.

设 $D \subset P_{<\kappa}$ 为一个准稠密子集. 对于 $X \prec \mathrm{V}_{\kappa+1}$, 令 $X \in D^*$ 当且仅当 $|X| < \kappa$, $D \in X$, 并且一定存在一个具有下述特点的 Y:

(a) $Y \prec \mathrm{V}_{\kappa+1}$;

(b) $X \subset Y$;

(c) Y 起底 D;

(d) $Y \cap \mathrm{V}_\kappa$ 是 $X \cap \mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展.

我们需要证明 D^* 是 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上的无界闭集.

欲得矛盾, 假设 D^* 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上并非无界闭集. 令 $S=\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})-D^*$. 那么 S 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上是一个荟萃集.

由于 M 是 2^κ- 封闭的, $S\in M$. 从而 $S\in j(\mathbb{P}_{<\kappa})$. 由于 $j(D)$ 在 $j(\mathbb{P}_{<\kappa})$ 是准稠密的, 令 $T\in j(D)$ 为与 S 在 $j(\mathbb{P}_{<\kappa})$ 中有一个共同下界的条件. 注意, 这样的 T 未必在 V 中是荟萃集. 但它在 M 中是荟萃集.

在 M 中来讨论. 由于 $j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}\in M$, 令 λ 为一个满足下述要求的正则基数: $\{S,T,j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}\}\subset\mathrm{V}_\eta^M$. 由于 S 和 T 在 $j(\mathbb{P}_{<\kappa})$ 中有一个共同下界, 令 $X\prec\mathrm{V}_\eta^M$ 具备下述特点:

(a) $X\in M$, $\left\{S,T,j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}\right\}\subset X$;

(b) $(X\cap\bigcup S)\in S$ 以及 $(X\cap\bigcup T)\in T$.

令 $Y=X\cap\mathrm{V}_{\kappa+1}$. 由于 $\bigcup S=\mathrm{V}_{\kappa+1}$, 我们有 $Y\in S$ 以及 $|Y|<\kappa$. 由此, $j(Y)\in j(S)$. 尤其是 $j(Y)\notin j(D^*)$.

我们来验证 $X\cap j(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 是一个 $(j(D),j(Y))$-证据, 从而 $j(Y)\in j(D^*)$, 得到一个矛盾.

由于 $|Y|<\kappa$, $\kappa=\mathrm{Crit}(j)$, $j(Y)=j[Y]$. 又因为 $j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}\in X$,

$$j(Y)\subset X\cap j(\mathrm{V}_{\kappa+1}).$$

另外, 由于 $j[Y]\cap j(\mathrm{V}_\kappa)=Y\cap\mathrm{V}_\kappa$ 以及 $X\cap\mathrm{V}_\kappa=Y\cap\mathrm{V}_\kappa$, $X\cap j(\mathrm{V}_\kappa)$ 是 $j[Y]\cap j(\mathrm{V}_\kappa)$ 的末端扩展. 最后, $T\in X\cap j(\mathrm{V}_{\kappa+1})\cap j(D)$, 以及 $((X\cap j(\mathrm{V}_{\kappa+1}))\cap\bigcup T)\in T$. 所以, $X\cap j(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 是一个 $(j(D),j(Y))$-证据. □

现在我们来证明当 δ 是一个武丁基数时, 尽管全荟萃塔力迫构思 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的某些准稠密子集未必是半恰当的, 但却有很好的倒影[20] 特性. 而这对有效解决泛型超幂的有秩问题就足够了.

定理 3.31 设 δ 是一个武丁基数. 令 $\langle D_\alpha\mid\alpha<\delta\rangle$ 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个长度为 δ 的序列. 令

$$T=\{\kappa<\delta\mid\kappa\text{ 不可达}\wedge\forall\alpha<\kappa\,(D_\alpha\cap P_{<\kappa}\text{ 在 }P_{<\kappa}\text{ 中是一个半恰当准稠密子集})\}.$$

那么 T 在 δ 中是一个荟萃子集.

证明 令

$$T_0=\left\{\kappa<\delta\;\middle|\;\kappa\text{ 极限序数}\wedge\forall\alpha<\kappa\left(D_\alpha\cap P_{<\kappa}\text{ 在 }P_{<\kappa}\text{ 中是一个准稠密子集}\right)\right\}.$$

20 reflection.

对于 $\alpha<\delta$, 对于 $S\in P_{<\delta}$, 令

$$\beta(\alpha,S)=\min\left\{\beta\ \middle|\ \left(\begin{array}{l}\beta\,\text{是极限序数}\ \wedge\ S\in P_{<\beta}\wedge\\ \exists A\in D_\alpha\cap P_{<\beta}\,\exists B\in P_{<\delta}\ (B\leqslant S\ \wedge\ B\leqslant A)\end{array}\right)\right\}.$$

根据荟萃塔的基本事实引理 (引理 3.34), 如果 S 和 A 在 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中是两个相容的条件, 那么它们一定有一个共同的下界 p 以至于 $\bigcup p=\bigcup(S\cup A)$. 于是,

$$\beta(\alpha,S)=\min\left\{\beta\ \middle|\ \left(\begin{array}{l}\beta\,\text{是极限序数}\ \wedge\ S\in P_{<\beta}\wedge\\ \exists A\in D_\alpha\cap P_{<\beta}\,\exists B\in P_{<\beta}\ (B\leqslant S\ \wedge\ B\leqslant A)\end{array}\right)\right\}.$$

这样一来,

$$T_0=\left\{\kappa<\delta\ \middle|\ \kappa\,\text{是极限序数}\ \wedge\ \forall\alpha<\kappa\forall S\in P_{<\kappa}\ (\beta(\alpha,S)\leqslant\kappa)\right\}.$$

因此, T_0 是 δ 的一个无界闭集.

假设定理的结论不成立. 那么 T 不是一个荟萃集. 令 $C\subset T_0$ 为 δ 的一个与 T 不相交的无界闭集. 从而

$$\forall\kappa\in C\ \left(\kappa\,\text{不可达}\rightarrow\exists\alpha<\kappa\ \left(D_\alpha\cap P_{<\kappa}\,\text{非半恰当}\right)\right).$$

以如下方式定义 $f:\delta\to\delta$:

$$\forall\alpha<\delta\ (f(\alpha)=\min\{\gamma<\delta\mid\ \alpha<\gamma\ \wedge\ \gamma\in C\}).$$

对于 $\alpha<\delta$, 令 $g(\alpha)=f(\alpha)+\omega$. 根据武丁基数的基本特性定理 (定理 1.36), 令 κ 和 $j:\mathrm{V}\to M$ 满足下述要求:

(a) $\mathrm{Crit}(j)=\kappa<\delta$ 是 g 的一个封闭点;

(b) $\mathrm{V}_{j(g)(\kappa)}\subset M$;

(c) $M^{<\kappa}\subset M$.

因为 κ 对 g 是封闭的, 它对 f 也是封闭的, 所以, $\kappa\in C$. 由于 κ 是可测基数, 自然是不可达基数. 这就给了我们一个具有下述特点的 $\alpha<\kappa$: $D_\alpha\cap P_{<\kappa}$ 在 $P_{<\kappa}$ 中是准稠密的, 但不是半恰当的. 令

$$S=\left\{X\in\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})\mid\neg\left(\exists Y\prec\mathrm{V}_{\kappa+1}\ \left(Y\,\text{是一个}\ (D_\alpha\cap P_{<\kappa},X)\text{-证据}\right)\right)\right\}.$$

因为 $D_\alpha\cap P_{<\kappa}$ 不是半恰当的, 根据半恰当性特征引理 (引理 3.47) 中的 (2), S 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 中是荟萃集. 因为 $\mathrm{V}^M_{\kappa+2}=\mathrm{V}_{\kappa+2}$, 所以在 M 中, S 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 中也是荟萃集.

我们现在来寻找一个久违了的矛盾: 构造一个 $X\in j(S)$ 以及一个 $Y\prec\mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$ 以至于在 M 中, Y 是一个 $(j\left(D_\alpha\cap P_{<\kappa}\right),X)$-证据.

序数 $j(f)(\kappa) \in j(C)$, 因而 $j(f)(\kappa) \in j(T_0)$; 而 $\alpha = j(\alpha) < \kappa < j(f)(\kappa)$. 应用同质特性, 在 M 中,

$$j(D_\alpha) \cap P^M_{<j(f)(\kappa)} \text{ 在 } P^M_{<j(f)(\kappa)} \text{ 中是准稠密的.}$$

由于 $\mathrm{V}^M_{j(f)(\kappa)} = \mathrm{V}_{j(f)(\kappa)}$, 故 $P^M_{<j(f)(\kappa)} = P_{<j(f)(\kappa)}$, 从而在 V 中,

$$j(D_\alpha) \cap P_{<j(f)(\kappa)} \text{ 在 } P_{<j(f)(\kappa)} \text{ 中是准稠密的.}$$

令 $A \in j(D_\alpha) \cap P_{<j(f)(\kappa)}$ 为一个与 S 在 $P_{<j(f)(\kappa)}$ 中相容的条件, 并且令

$$\tilde{S} \in P_{<j(f)(\kappa)}$$

为它们的一个共同下界. 如有必要, 从中去掉一个非荟萃子集, 不妨假设

$$\forall X \in \tilde{S} \left((X \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}) \in S \wedge \left(X \cap \bigcup A \right) \in A \right).$$

在 M 中, 应用 $\left(\mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}, \in\right)$ 上的斯科伦函数之集合, 得到一个函数

$$h : \left(\mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}\right)^{<\omega} \to \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$$

以至于对于任意的非空的 $Y \subset \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$, 如果 Y 对 h 是封闭的, 那么 $Y \prec \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$.

由于 $\tilde{S}$ 是荟萃集, 在 V 中具备下述特点的集合 Z 存在:

(a) Z 对 h 封闭;

(b) $A \in Z$, 并且 Z 对 $j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}$ 也是封闭的;

(c) $\left(Z \cap \bigcup \tilde{S}\right) \in \tilde{S}$.

考虑下述三个集合:

$$Z \cap \mathrm{V}_{\kappa+1},\ j\left[Z \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right],\ Z \cap \bigcup \tilde{S},$$

第一个集合在 S 之中, 因此, 前两个集合的势严格小于 κ; 第三个集合属于 $\mathrm{V}_{j(f)(\kappa)}$. 所以, 它们都在 M 之中. 不仅如此, 它们还都是 Z 的子集合.

令 Y 为下述集合在 h 下的闭包:

$$(Z \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}) \cup (j\left[Z \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right]) \cup \left(Z \cap \bigcup \tilde{S}\right) \cup \{A\}.$$

这样, 我们马上得到

$$Y \in M \wedge Y \subset Z \wedge Y \prec \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1} \wedge A \in Y \wedge \left(Y \cap \bigcup \tilde{S}\right) = \left(Z \cap \bigcup \tilde{S}\right) \in \tilde{S}.$$

最后面的两个结论分别蕴涵下述两个事实:

$$A \in \left(j\left(D_{\alpha}\right) \cap P_{<j(f)(\kappa)} \cap Y\right) \subseteq j\left(D_{\alpha} \cap P_{<\kappa}\right) \cap Y,$$

以及 $(Y \cap \bigcup A) \in A$. 也就是说, Y 起底 $j\left(D_{\alpha} \cap P_{<\kappa}\right)$.

令 $X = j\left(Y \cap V_{\kappa+1}\right)$. 因为 $Y \cap V_{\kappa+1} = Z \cap V_{\kappa+1} \in S$, 所以 $X \in j(S)$. 由此又得到 $|Y \cap V_{\kappa+1}| < \kappa$. 于是, $X = j\left[Y \cap V_{\kappa+1}\right]$.

现在来验证 $Y \cap V^{M}_{j(\kappa)}$ 是 $X \cap V^{M}_{j(\kappa)}$ 的末端扩展. 为此, 令 $a \in X \cap V^{M}_{j(\kappa)}$. 我们必须证明 $a \cap Y \subset X$. 令 $b \in Y \cap V_{\kappa+1}$ 来实现等式 $a = j(b)$. 由同质特性, $b \in V_{\kappa}$. 这样一来, $a = b$. 因为 $X \cap V_{\kappa} = j\left(Y \cap V_{\kappa}\right) = Y \cap V_{\kappa}$, 所以, $a \cap Y = a \cap X$.

于是, 我们就证明了在 M 中, Y 是一个 $\left(j\left(D_{\alpha} \cap P_{<\kappa}\right), X\right)$-证据. 这与另外两个事实 $Y \prec V^{M}_{j(\kappa)+1}$ 和 $X \in j(S)$ 一起, 组成一个与 S 的定义的矛盾. □

现在来引进我们所需要的最后一个技术名词. 后面会看到当我们有足够多的具备这个名词含义所言的性质时, 泛型超幂就会是有秩的.

定义 3.20 设 δ 是一个极限序数.

(1) W 是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个准稠密子集. 称 $P_{<\delta}$ 中的一个条件 S **印证** W 当且仅当 $\bigcup S$ 是一个传递集合, 并且 S 中的每一个元素都起底 W.

(2) 设 $\kappa \leqslant \delta$ 以及 $\langle W_{\alpha} \mid \alpha < \kappa \rangle$ 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 称 $P_{<\delta}$ 中的一个条件 S **印证** $\langle W_{\alpha} \mid \alpha < \kappa \rangle$ 当且仅当 $\bigcup S$ 是一个传递集合, 并且

$$\forall X \in S \, \forall \alpha \in X \cap \kappa \; \left(X \text{ 起底} W_{\alpha}\right).$$

下面的唯一性引理是有关起底唯一性的引理 3.46 的一个直接推论.

引理 3.48 设 δ 是一个极限序数. 设 $S \in P_{<\delta}$.

(a) 设 W 是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个极大冲突子集. 如果 S 印证 W, 那么 $P_{<\delta}$ 中必然有一个具备下述特点的条件 T:

(i) $\bigcup S = \bigcup T$, $T \subset S$, $S - T$ 在 S 中为非荟萃集 (因而 $S \leqslant T \wedge T \leqslant S$);

(ii) 对每一个 $X \in T$, $W \cap X$ 中有唯一一个 A 来实现 $(X \cap \bigcup A) \in A$.

(b) 设 $\kappa \leqslant \delta$ 以及 $\langle W_{\alpha} \mid \alpha < \kappa \rangle$ 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 如果 S 印证 $\langle W_{\alpha} \mid \alpha < \kappa \rangle$, 那么 $P_{<\delta}$ 中必然有一个具备下述特点的条件 T:

(i) $\bigcup S = \bigcup T$, $T \subset S$, $S - T$ 在 S 中为非荟萃集;

(ii) 对每一个 $X \in T$, 对每一个 $\alpha \in X \cap \kappa$, $W_{\alpha} \cap X$ 中有唯一一个 A 来实现 $(X \cap \bigcup A) \in A$.

证明 (a) 给定 S. 令

$$T = S \cap \left\{ Y \cap \bigcup S \;\middle|\; Y \prec V_{\delta} \right\}.$$

对此 T 而言, (i) 得以满足. 欲见 (ii) 也得到满足, 令 $X \in T$. 令 $Y \prec \mathrm{V}_\delta$ 来实现 $X = Y \cap \bigcup S$. 印证的定义要求 $\bigcup S$ 是一个传递集合. 因此, Y 就是 X 的末端扩展. 设 $A \in W \cap X$ 满足 $(X \cap \bigcup A) \in A$. 那么 $A \in \bigcup S$. 于是, $\bigcup A \subset \bigcup S$. 这样, $Y \cap \bigcup A = X \cap \bigcup A$. 因此, 每一个见证 X 起底 W 的证据就都是见证 Y 起底 W 的证据. 根据引理 3.46, 至多有一个这样的证据 A.

(b) 的证明类似, 就留作练习. □

下面来证明当 δ 是一个武丁基数时, 对于任给的长度不超过 δ 的准稠密子集序列, 所有那些印证给定序列的条件形成一个稠密子集. 这个定理的结论为我们提供当 δ 是武丁基数时, 全荟萃塔 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 泛型扩张中的泛型超幂是有秩结构所需要的奠基石. 这是一个集我们本小节中到此为止所引进的技术名词含义大成的结果.

定理 3.32 *设 δ 是一个武丁基数. 设 $\kappa \leqslant \delta$, 以及 $\langle D_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 令*

$$D = \{S \in P_{<\delta} \mid S \text{ 印证 } \langle D_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle\}.$$

那么 D 是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个稠密子集.

证明 不妨假设准稠密子集序列的长度为 δ. 设 $\langle D_\alpha \mid \alpha < \delta\rangle$ 为 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 设 $S \in P_{<\delta}$. 我们需要找到一个 $T \in P_{<\delta}$ 来实现两项要求: $T \leqslant S$ 以及 T 印证这个给定的准稠密子集序列.

根据全荟萃塔倒影定理 (定理 3.31), 令 $\kappa < \delta$ 为一个具备下述特点的不可达基数: $S \in P_{<\kappa}$ 以及对于每一个 $\alpha < \kappa$, $D_\alpha \cap P_{<\kappa}$ 在 $P_{<\kappa}$ 中是一个半恰当的准稠密子集.

令

$$T = \left\{X \in \mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_\kappa) \,\middle|\, \left(X \cap \bigcup S\right) \in S \wedge \forall \alpha \in X \cap \kappa \left(X \text{ 起底 } D_\alpha \cap P_{<\kappa}\right)\right\}.$$

我们来证明此 T 就是所要的. 我们需要证明的是: T 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_\kappa)$ 中是荟萃集. 这样 $\mathrm{V}_\kappa = \bigcup T$. 这是一个传递集合. 于是, 依照定义 3.20, T 就印证所给定的准稠密子集序列. 因为 $S \supset T \downarrow \bigcup S$, 所以 $T \leqslant S$. 这样, 定理便得到证明.

现在我们就来证明 T 在 $\mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_\kappa)$ 中是荟萃集.

设 $f : \mathrm{V}_\kappa^{<\omega} \to \mathrm{V}_\kappa$. 我们需要找到一个属于 T 的对 f 封闭的集合 Z.

令 λ 为一个梯度严格大于 $|\mathrm{V}_\kappa|$ 的极限序数. 根据半恰当性特征引理 (引理 3.47) 中的 (4), 我们就有: 对于每一个 $\alpha < \kappa$, 对于每一个 $X \prec \mathrm{V}_\kappa$, 如果 $|X| < \kappa$, $\kappa \in X$, 且

$$D_\alpha \cap P_{<\kappa} \in X,$$

那么就一定有一个 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$ 来实现要求: Y 是一个 $(D_\alpha \cap P_{<\kappa}, X)$-证据.

我们来构造具备下述特点的一个单调递增的长度 γ 严格小于 κ 的同质子模型序列 $\langle X_\beta \mid \beta \leqslant \gamma\rangle$：

(i) $\forall\beta \leqslant \gamma\ (X_\beta \in \mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_\lambda) \wedge X_\beta \prec \mathrm{V}_\lambda)$;

(ii) $\forall\alpha < \beta \leqslant \gamma\ \big(X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_\alpha \cap \mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展$\big)$.

起始步. 令 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$ 实现下述目标：$\{\kappa, f, S, \langle D_\alpha \cap P_{<\kappa} \mid \alpha < \kappa\rangle\} \subset X$ 以及 $(X \cap \bigcup S) \in S$. 依据荟萃集特征引理 (引理 3.25) 中的 (4), S 的荟萃集性质保证了这样的 X 的存在性. 现在令 $X_0 \prec X$ 来实现下述目标：$|X_0| < \kappa$, 以及

$$\{\kappa, f, S, \langle D_\alpha \cap P_{<\kappa} \mid \alpha < \kappa\rangle\} \cup \left(X \cap \bigcup S\right) \subset X_0.$$

极限步. 设 $\beta < \kappa$ 是一个极限序数, 并且 β 是目前 X_β 尚未定义的最小序数. 那么就令 $X_\beta = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha < \beta\}$.

后继步. 设 $\beta < \kappa$, 并且 $\langle X_\alpha \mid \alpha \leqslant \beta\rangle$ 已经合乎要求地定义好. 如果还需要的话, 我们来定义 $X_{\beta+1}$. 因为 $(\bigcup S) \in X_0 \cap \mathrm{V}_\kappa$, $X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_0 \cap \mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展, 所以

$$X_\beta \cap \bigcup S = \left(X_0 \cap \bigcup S\right) \in S.$$

如果 $X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa \in T$, 我们就成功地停止在这一步上, 令 $\gamma = \beta$, 从而无须再定义 $X_{\beta+1}$. 否则, 需要继续. 既然 $X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa \notin T$, 根据 T 的定义, 条件

$$\forall\alpha \in X_\beta \cap \kappa\ \big(X_\beta\text{ 起底 } D_\alpha \cap P_{<\kappa}\big)$$

就没有得到实现. 令 $\alpha \in X_\beta \cap \kappa$ 为一个反例. 令

$$\xi_\beta = \min\{\xi \leqslant \beta \mid \alpha \in X_\xi\}.$$

再令 α_β 为 X_{ξ_β} 中见证 X_β 并没有起底 $D_\rho \cap P_{<\kappa}$ 的最小 ρ. 自然, $\alpha_\beta \leqslant \alpha$. 令 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$ 为一个 $(D_{\alpha_\beta} \cap P_{<\kappa}, X_\beta)$-证据. 令 $A \in D_{\alpha_\beta} \cap Y$ 满足 $(Y \cap \bigcup A) \in A$. 令 $X_{\beta+1}$ 来实现下述目标：

$$\left(X_\beta \cup \{A\} \cup \left(Y \cap \bigcup A\right)\right) \subset X_{\beta+1} \prec Y \wedge |X_{\beta+1}| < \kappa.$$

此时 $X_\beta \prec X_{\beta+1}$, 并且 $X_{\beta+1}$ 是一个 $(D_{\alpha_\beta} \cap P_{<\kappa}, X_\beta)$-证据, 尤其是 $X_{\beta+1} \cap \mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展.

现在我们需要证明上述构造过程一定在到达 κ 之前成功结束：目标 $X_\beta \in T$ 必定在某个 $\beta < \kappa$ 时被实现了.

假设不然. 上述序列构造过程走完了整个 κ 步. 由于在构造过程中对于极限序数 β 所定义的 ξ_β 必然满足不等式 $\xi_\beta < \beta$, 根据不可数正则基数上的选择函数定理 (定理 I.2.26), 必然有 κ 的一个荟萃子集 H 以及一个 $\eta < \kappa$ 来见证如下事实：

$$\forall\beta \in H\ (\xi_\beta = \eta).$$

由于 $|X_\eta| < \kappa$, $|H| = \kappa$, 必然有 H 中的两个 $\beta_1 < \beta_2$ 来见证等式 $\alpha_{\beta_1} = \alpha_{\beta_2}$. 可是这样一来, X_{β_1+1} 起底 $D_{\alpha_{\beta_1}} \cap P_{<\kappa}$ 以及 $X_{\beta_2} \cap \mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_{\beta_1+1} \cap \mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展, 由此 X_{β_2} 起底 $D_{\alpha_{\beta_2}} \cap P_{<\kappa}$. 这与 α_{β_2} 的定义相矛盾.

令 $\gamma < \kappa$ 为过程成功结束的那一步. 令 $Z = X_\beta \cap \mathrm{V}_\kappa$. 那么 $Z \in T$ 就是所寻找的. □

应用上面的定理 3.32, 我们来解决武丁基数下的全荟萃塔力迫构思泛型扩张中的泛型超幂的有秩问题.

定理 3.33 *设 δ 是一个武丁基数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么在 $V[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的, 并且 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)^{<\delta} \subset \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$.*

证明 设 δ 是一个武丁基数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子.

设 $\kappa < \delta$. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 $\langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 为泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V}, \in)$ 中元素的一个序列. 令 $\tau \in \mathrm{V}^{\mathbb{P}_{<\delta}}$ 为一个 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 名字以至于 τ/G 就是这个序列. 不妨假设 $\{\varnothing\}$ 力迫 τ 是一个从 $\check{\kappa}$ 到 $\prod_{\dot{G}}(\mathrm{V}, \in)$ 的函数.

在 V 中, 令 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 以及 $\langle f_T^\alpha \mid \alpha < \kappa \wedge T \in A_\alpha\rangle$ 为具备下述特点的序列:

(a) 对 $\alpha < \kappa$, A_α 是 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个极大冲突子集;

(b) 对 $\alpha < \kappa$, 对 $T \in A_\alpha$, $f_T^\alpha : T \to \mathrm{V}$;

(c) $\forall \alpha < \kappa \forall T \in A_\alpha\ (T \Vdash \tau(\check{\alpha}) = [\![(f_T^\alpha)\check{}\,]\!]_G)$.

根据定理 3.32, 令 $S \in G$ 来见证 $\kappa \subset \bigcup S$ 以及 S 印证序列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$.

根据引理 3.48, 不失一般性, 我们可以假设对 $X \in S$, 对 $\alpha \in X \cap \kappa$, $A_\alpha \cap X$ 中有唯一的 T_X^α 来实现 $(X \cap \bigcup T_X^\alpha) \in T_X^\alpha$.

固定 $\alpha < \kappa$. 因为 $\kappa \subset \bigcup S$, 所以下述集合 $\tilde{S}_\alpha$ 在 S 中是无界闭集:

$$\tilde{S}_\alpha = \{X \in S \mid \alpha \in X\}.$$

于是, $S \leqslant_w \tilde{S}_\alpha$. 这意味着 $\tilde{S}_\alpha \in G$. 由于 $\forall X \in \tilde{S}_\alpha\,(T_X^\alpha \in X)$, 应用无界闭集滤子 $\mathcal{F}^\clubsuit_{\tilde{S}_\alpha}$ 的正规性, 我们可以得到一个 $T_\alpha \in A_\alpha$ 来见证下述事实:

$$S_\alpha = \left\{X \in \tilde{S}_\alpha \mid T_X^\alpha = T_\alpha\right\} \in G.$$

对于 $X \in S_\alpha$, 有 $(X \cap \bigcup T_\alpha) \in T_\alpha$. 因此, $S_\alpha \leqslant T_\alpha$. 于是, $T_\alpha \in G$.

这样, 对于 $\alpha < \kappa$, 令 $h_\alpha : S \to \mathrm{V}$ 为一个满足下述要求的函数: 对于 $X \in \tilde{S}_\alpha$,

$$h_\alpha(X) = f^\alpha_{T_X^\alpha}\left(X \cap \bigcup T_X^\alpha\right).$$

于是, 对于 $\alpha < \kappa$, 对于 $X \in S_\alpha$, 有

$$h_\alpha(X) = f^\alpha_{T_X^\alpha}\left(X \cap \bigcup T_\alpha\right) = f^\alpha_{T_\alpha}\left(X \cap \bigcup T_\alpha\right).$$

这样, 对于 $\alpha<\kappa$, $x_\alpha=[\![f^{\alpha}_{T_\alpha}]\!]_G=[\![h_\alpha]\!]_G$.

现在我们来证明泛型超幂的有秩性. 设 $\kappa=\omega$. 设 $\langle x_n \mid n<\omega\rangle$ 是一个无穷的 $\in_G$- 单调递降序列. 对与 $n<\omega$, 令

$$B_n=\{X\in S \mid h_{n+1}(X)\in h_n(X)\},$$

那么 $B_n\in G$. 因为 G 是 V 上的一个泛型超滤子以及序列 $\langle B_n \mid n<\omega\rangle\in \mathrm{V}$, G 中必有一个 B 来满足

$$\forall n<\omega\ (B\leqslant_w B_n),$$

如若不然, 下述 $P_{<\kappa}$ 的子集合必定在 G 中的某个元素之下是稠密的:

$$\{T\in P_{<\kappa} \mid \exists n<\omega\ (T\perp B_n)\}.$$

如此集合 B 的存在性蕴涵下述事实:

$$\{X\in S \mid \forall n<\omega\ (h_{n+1}(X)\in h_n(X))\}\in G.$$

由于 G 中的元素都非空, 这便是一个矛盾. 因此, $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中是有秩的.

接下来, 我们来验证所要的封闭性.

考虑一般性的 $\kappa<\delta$. 对于 $X\in S$, 令 $\rho_X:\mathrm{ot}(X\cap\kappa)\to(X\cap\kappa)$ 为典型序同构. 如下定义 $g:S\to\mathrm{V}$: 对于 $X\in S$, 令

$$g(X)=\left\langle h_{\rho_X(\beta)}(X)\ \middle|\ \beta\in\mathrm{ot}(X\cap\kappa)\right\rangle.$$

根据引理 3.39,

$$\prod_G(\mathrm{V},\in)\models \text{“}[\![g]\!]_G\text{ 是一个定义在 }\pi_G^{-1}(\kappa)\text{ 上的函数”},$$

并且进一步地, 如果 $\alpha<\kappa$, 那么

$$\prod_G(\mathrm{V},\in)\models [\![g]\!]_G\left(\pi_G^{-1}(\alpha)\right)=[\![h_\alpha]\!]_G.$$

还有种说法就是, $\forall\alpha<\kappa\ ((\pi_G([\![g]\!]_G))(\alpha)=x_\alpha)$. □

下面的例子对由武丁基数 δ 所确定的全荟萃塔 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的泛型同质嵌入映射在 δ 处的作用以及它的临界点是什么提供有趣的信息.

例 3.8　设 δ 是一个武丁基数. 设 $\omega<\kappa<\delta$ 为一个正则基数. 设 G 是 V 上的一个 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 i_G 为泛型嵌入映射.

(1) $\{\eta<\delta \mid \eta\text{ 是全杨森基数}\}$ 在 δ 中是一个荟萃子集;

(2) $i_G(\delta)=\delta$;

(3) κ 是 $\mathfrak{P}(\kappa)$ 上的一个荟萃集;

(4) 如果 $\kappa\in G$, 那么 κ 是泛型嵌入映射 i_G 的临界点.

证明 (练习.) □

例 3.9 设 $\kappa < \gamma < \delta$ 具备下述特点: κ 是一个可测基数, γ 是正则基数, δ 是武丁基数. 令

$$S = \{ X \prec \mathrm{V}_\gamma \mid |X \cap \kappa| = \kappa \wedge \exists r \in \omega^\omega \ (M_x \in L[r]) \},$$

其中, M_X 是 $X \prec \mathrm{V}_\gamma$ 的传递化集合. 那么 S 是荟萃集, 并且若 $G \ni S$ 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, $i_G : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 是 G 在 $\mathrm{V}[G]$ 中诱导出来的泛型嵌入映射, 则 $j[\bigcup S] = j[\mathrm{V}_\gamma] \in j(S)$; $i_G(\kappa) = \kappa$;

$$\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G) \models \kappa \text{ 是一个可测基数} \wedge (\exists r \in \omega^\omega \ (\mathrm{V}_\gamma \in L[r])).$$

从而 κ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中还是一个可测基数.

证明 我们先来证明 S 是荟萃集. 固定 $f : \mathrm{V}_\gamma^{<\omega} \to \mathrm{V}_\gamma$. 设 $\{f, \kappa\} \subset X \prec \mathrm{V}_\delta$ 为一个可数同质子模型. 令 N 为 X 的传递化. 令 $\mu \in X$ 为 κ 上的一个正规测度, 以及 ν 为 μ 的传递化像. 令 $h : \omega \to N$ 为一个双射, 以及令

$$a = \{ (n, m) \mid h(n) \in h(m) \}.$$

在 $L[a]$ 中, 应用 $\nu \in N$, 从 $N_0 = N$ 开始, 构造迭代超幂序列 $\langle N_\alpha \mid \alpha \leqslant \kappa \rangle$.

令 $X_0 = X$. 对于 $\alpha + 1 < \kappa$, 令 $\beta_\alpha = \min(\mu \cap X_\alpha)$, 以及

$$X_{\alpha+1} = \{ f(\beta_\alpha) \mid f : \kappa \to \mathrm{V}_\delta \wedge f \in X_\alpha \}.$$

对于极限序数 $\alpha \leqslant \kappa$, 令 $X_\alpha = \bigcup \{ X_\beta \mid \beta < \alpha \}$.

这样一来, 对于 $\alpha \leqslant \kappa$, N_α 是 X_α 的传递化, 并且 $X_\kappa \cap \mathrm{V}_\gamma$ 对 f 是封闭的, $|X_\kappa \cap \kappa| = \kappa$, $X_\kappa \cap \mathrm{V}_\gamma$ 的传递化属于由一个实数 r 构造出来的论域 $L[r]$. 因此, $X_\kappa \cap \mathrm{V}_\gamma \in S$.

令 $G \ni S$ 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 是有秩的, 它的传递化为传递类 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$, 唯一的嵌入映射为 $i_G : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$. 此时在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)^{|\mathrm{V}_\gamma|} \subset \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$. 所以, $\mathrm{V}_\gamma \in \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$, $j[\bigcup S] = j[\mathrm{V}_\gamma] \in j(S)$; V_γ 是 $j[\mathrm{V}_\gamma]$ 的传递化; $i_G(\kappa) = \kappa$;

$$\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G) \models \kappa \text{ 是一个可测基数} \wedge (\exists r \in \omega^\omega \ (\mathrm{V}_\gamma \in L[r])).$$

从而 κ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中还是一个可测基数. □

可数范围荟萃塔

在这一小节里, 我们来探讨将荟萃集限定在可数集合范围内的情形. 也就是说, 我们将专注全荟萃塔 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 的一个子序.

定义 3.21　设 δ 是一个极限序数. 令

$$Q_{<\delta} = \{S \in P_{<\delta} \mid \forall Y \in S\,(|Y| \leqslant \aleph_0)\},$$

以及令 $Q_{<\delta}$ 上的偏序 $\leqslant$ 为 $P_{<\delta}$ 上的偏序在 $Q_{<\delta}$ 上的限制.

换一种方式说, 对于 $S \in \mathrm{V}_\delta$, $S \in Q_{<\delta}$ 当且仅当 S 在可数范围 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\bigcup S)$ 上是荟萃集. 因此, I.2.3.3 小节关于可数空间上的无界闭子集滤子和荟萃子集的结论在这里完全适用. 那里定义的提升与降落算子 (见定义 I.2.27) 与前面的定义 3.14 是一致的. 比如, 若 $A \subset \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\bigcup A)$, $X \supset \bigcup A$, 则

$$A \uparrow X = \left\{Y \subset X \;\middle|\; |Y| \leqslant \aleph_0 \wedge \left(Y \cap \bigcup A\right) \in A\right\};$$

若 $A \subset \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\bigcup A)$, $X \subset \bigcup A$, 则

$$A \downarrow X = \{Y \cap X \mid Y \in A\}.$$

这样一来, 用荟萃集大统一概念, 我们可以将 I.2.3.3 小节中的定理 I.2.35 分开来用下述方式表述出来:

引理 3.49　设 C 是可数空间 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\bigcup C)$ 上的无界闭集. 那么

(1) 如果 $X \subset \bigcup C$, 那么 $(C \downarrow X) \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)}$;

(2) 如果 $X \supset \bigcup C$, 那么 $(C \uparrow X)$ 是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)$ 上的无界闭集.

推论 3.24　设 S 是可数空间 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\bigcup S)$ 上的荟萃集. 那么

(1) 如果 $X \subset \bigcup S$, 那么 $(S \downarrow X)$ 是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)$ 上的荟萃集;

(2) 如果 $X \supset \bigcup S$, 那么 $(S \uparrow X)$ 是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)$ 上的荟萃集.

我们也将前面关于全荟萃塔的几个引理在这里陈述出来.

与全荟萃塔基本性质引理 3.34 相应的是下述引理:

引理 3.50　设 δ 是一个极限序数. 设 $X \in \mathrm{V}_\delta$. 令 S 和 T 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中的两个条件. 那么

(1) 如果 $X \subset \bigcup S$, 那么 $S \leqslant (S \downarrow X)$;

(2) 如果 $X \supset \bigcup S$, 那么 $(S \uparrow X) \leqslant S$ 并且 $S \leqslant_w (S \uparrow X)$;

(3) 如果 $\bigcup S = \bigcup T$, 并且 S 与 T 在 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中有共同下界, 那么 $S \cap T$ 在 $\mathfrak{P}(\bigcup S)$ 上是荟萃集, 并且 $S \cap T$ 是 S 与 T 在 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中的最大下界.

如果 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且 $X \in \mathrm{V}_\delta$, 那么就令

$$G_X = \left\{A \in G \;\middle|\; X = \bigcup A\right\}.$$

与引理 3.35 的证明相同的证明便得到下述引理:

引理 3.51 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 之上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么, 对于 $X \in V_\delta$, 在 $V[G]$ 中, G_X 是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}^{V}(X)$ 上的一个包含 $\mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)}$ 的 V-超滤子. 不仅如此, 这些 V-超滤子相互之间彼此相容, 即若 $X \subset Y \in V_\delta$, 则对于任意的 $A \subset \mathfrak{P}_{\aleph_1}(X)$ 以及任意的 $B \subset \mathfrak{P}_{\aleph_1}(Y)$, 必有下述结论成立:

(a) $B \in G_Y \rightarrow (B \downarrow X) \in G_X$;

(b) $A \in G_X \rightarrow (A \uparrow Y) \in G_Y$.

如果 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 同前面一样, 在 $V[G]$ 中我们也定义泛型超幂 $\prod_G(V, \in)$、嵌入映射 i'_G, π_G, i_G, 以及在 $\prod_G(V, \in)$ 有秩时它的传递化 $\mathrm{ult}(V, G)$. 我们就不在这里啰嗦了.

对于这个泛型超幂, 我们也有下面的 Łoś 基本定理:

定理 3.34 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设

$$\varphi(v_1, \cdots, v_n)$$

为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 V 中的 n 个函数, 并且它们的定义域都是 G 中的元素. 令

$$X = \bigcup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{dom}(f_i) \text{ 以及 } T = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} (\mathrm{dom}(f_i) \uparrow X).$$

那么

$$\begin{aligned} &\prod_G(V, \in) \models \varphi[\llbracket f_1 \rrbracket_G, \cdots, \llbracket f_n \rrbracket_G] \\ \leftrightarrow &\left\{Y \in T \mid (V, \in) \models \varphi\left[f_1^X(Y), \cdots, f_n^X(Y)\right]\right\} \in G. \end{aligned}$$

因此, 映射 $i'_G : (V, \in) \prec \prod_G(V, \in)$.

同样的证明也给出恒等函数的作用引理:

引理 3.52 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S \in G$ 和 $T \in G$. 那么对于任意的定义在 T 上的函数 $f \in V$, 都有

$$\llbracket f \rrbracket_G \in_G \llbracket \mathrm{Id}_S \rrbracket_G \leftrightarrow \exists a \in \bigcup S \ (\llbracket f \rrbracket_G = i'_G(a)),$$

其中 Id_S 是 S 上的恒等函数.

推论 3.25 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S \in G$. 如果 $i'_G[\bigcup S] \subset \mathrm{YZBF}(\prod(V, \in))$, 那么

$$\llbracket \mathrm{Id}_S \rrbracket_G \in \mathrm{YZBF}\left(\prod(V, \in)\right) \wedge i'_G\left[\bigcup S\right] = \pi_G(\llbracket \mathrm{Id}_S \rrbracket_G).$$

引理 3.53 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且在 $\mathrm{V}[G]$ 中泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 是有秩模型. 设 $S\in Q_{<\delta}$. 那么

$$S\in G\leftrightarrow i_G\left[\bigcup S\right]\in i_G(S).$$

引理 3.54 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 设 $S\in G$, $f:S\to\mathrm{V}$, $f\in\mathrm{V}$. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 中必有

(1) $\prod_G(\mathrm{V},\in)\models(i'_G(f))\,([\![\mathrm{Id}_s]\!]_G)=[\![f]\!]_G$;

(2) 如果 $i'_G(f)\in\mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$, 那么 $(i_G(f))\,(i_G\,[\bigcup S])=\pi_G\left([\![f]\!]_G\right)$.

引理 3.55 设 δ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 必有

(1) 对于每一个传递集合 $a\in\mathrm{V}_\delta$,

(a) $[\![\mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\in\mathrm{YZBF}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$;

(b) $a=\pi_G\left([\![\mathrm{CDH}\restriction_{\mathfrak{P}(a)}]\!]_G\right)$;

(c) $\forall x\in a\ \left(x=\pi_G\left([\![\mathrm{Prj}^a_x]\!]_G\right)\right)$.

(2) $\delta\subset\mathrm{YZXS}\left(\prod_G(\mathrm{V},\in)\right)$.

和引理 3.40 一样, 下面的引理也是一个技术性引理. 这个引理所提供的函数在后面引理 3.61 的证明中有用.

引理 3.56 设 δ 是一个极限序数. 设 $\{\alpha,\beta\}\subset\delta$ 并且 β 也是一个极限序数. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子.

(1) 存在一个具备下述特点的函数 $h_{\beta,\alpha}\in\mathrm{V}$: $\mathrm{dom}\,(h_{\beta,\alpha})\in G$; 并且对于任意的函数 $f\in\mathrm{V}$, 如果 $\mathrm{dom}(f)\in G$, 那么

$$[\![f]\!]_G\in_G[\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G\leftrightarrow\exists S\in G\cap\mathrm{V}_\beta\,\exists g\in\mathrm{V}\ \left(g\in\mathrm{V}^S_\alpha\wedge[\![f]\!]_G=[\![g]\!]_G\right).$$

(2) 如果 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 是有秩的, 那么

$$\left\{\pi_G\left([\![f]\!]_G\right)\mid\exists S\in G\cap\mathrm{V}_\beta\ \left(f\in\mathrm{V}\wedge f\in\mathrm{V}^S_\alpha\right)\right\}\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},G).$$

由于 $\mathbb{Q}_{<\delta}\subset\mathbb{P}_{<\delta}$, 关于起底的定义 3.17 照样适用于 $\mathbb{Q}_{<\delta}$.

引理 3.46 导出下述引理:

引理 3.57 设 δ 是一个极限序数. 设 $W\subset Q_{<\delta}$. 令 $\lambda\geqslant\delta$ 为一个序数. 设 $X\prec\mathrm{V}_\lambda$. 如果 S 和 T 都是 X 起底 W 的证据, 那么 S 和 T 必然是 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中两个无冲突的条件.

对可数空间荟萃塔 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 而言, 我们也有类似的半恰当准稠密子集的概念.

定义 3.22 (半恰当) 设 δ 是一个不可数的强极限基数. 荟萃塔力迫构思 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的一个准稠密子集 D 是**半恰当**的当且仅当存在任意大的序数 λ 来实现下述要求: 对于任意一个 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, 如果 $|X| = \aleph_0$ 并且 $D \in X$, 那么一定存在一个具有下述特点的 Y:

(a) $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$;

(b) $X \subset Y$;

(c) Y 起底 D;

(d) $Y \cap \mathrm{V}_\delta$ 是 $X \cap \mathrm{V}_\delta$ 的末端扩展.

对于 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$, 称 Y 是一个 (D, X)-**证据**当且仅当上述条件中的 (b)~(d) 都成立.

引理 3.58 设 δ 是一个不可数的强极限基数, 以及 D 是全荟萃塔力迫构思 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的一个准稠密子集. 那么下述命题对等:

(1) D 是半恰当的;

(2) $\{X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\delta+1}) \mid \exists Y \prec \mathrm{V}_{\delta+1}\, Y \text{ 是一个}(D, X)\text{-证据}\} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\delta+1})}$;

(3) 令 M 为具备后述特点的传递集合: $M^{\mathrm{V}_\delta} \subset M \wedge \mathrm{V}_{\delta+2} \subset M$, 那么对于任意的 $X \prec M$, 如果 $|X| = \aleph_0$ 以及 $\{\delta, D\} \subset X$, 那么

$$\exists Y \prec M\, (Y \text{ 是一个}(D, X)\text{-证据});$$

(4) 对于每一个梯度严格大于 $|\mathrm{V}_\delta|$ 的极限序数 λ, 以及每一个 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, 如果 $|X| = \aleph_0$ 以及 $\{\delta, D\} \subset X$, 那么 $\exists Y \prec \mathrm{V}_\lambda\, (Y \text{ 是一个}(D, X)\text{-证据})$.

定理 3.35 设 δ 是一个武丁基数. 令 $\langle D_\alpha \mid \alpha < \delta\rangle$ 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个长度为 δ 的序列. 令

$$T = \{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ 不可达} \wedge \forall \alpha < \kappa\, (D_\alpha \cap Q_{<\kappa} \text{ 在 } Q_{<\kappa} \text{ 中是一个半恰当准稠密子集})\}.$$

那么 T 在 δ 中是一个荟萃子集.

证明 令

$$T_0 = \left\{\kappa < \delta \;\middle|\; \kappa \text{ 极限序数} \wedge \forall \alpha < \kappa\, \left(D_\alpha \cap Q_{<\kappa} \text{ 在 } Q_{<\kappa} \text{ 中是一个准稠密子集}\right)\right\}.$$

对于 $\alpha < \delta$, 对于 $S \in Q_{<\delta}$, 令

$$\beta(\alpha, S) = \min\left\{\beta \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta \text{ 是极限序数} \wedge S \in Q_{<\beta} \wedge \\ \exists A \in D_\alpha \cap Q_{<\beta}\, \exists B \in Q_{<\delta}\, (B \leqslant S \wedge B \leqslant A) \end{pmatrix}\right\}.$$

根据荟萃塔的基本事实引理 (引理 3.50), 如果 S 和 A 在 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中是两个相容的条件, 那么它们一定有一个共同的下界 p 以至于 $\bigcup p=\bigcup(S\cup A)$. 于是,

$$\beta(\alpha,S)=\min\left\{\beta\ \middle|\ \left(\begin{array}{l}\beta\text{是极限序数}\ \wedge\ S\in Q_{<\beta}\wedge\\ \exists A\in D_\alpha\cap Q_{<\beta}\,\exists B\in Q_{<\beta}\ (B\leqslant S\ \wedge\ B\leqslant A)\end{array}\right)\right\}.$$

这样一来,

$$T_0=\left\{\kappa<\delta\ \middle|\ \kappa\text{是极限序数}\ \wedge\ \forall\alpha<\kappa\forall S\in Q_{<\kappa}\ (\beta(\alpha,S)\leqslant\kappa)\right\}.$$

因此, T_0 是 δ 的一个无界闭集.

假设定理的结论不成立. 那么 T 不是一个荟萃集. 令 $C\subset T_0$ 为 δ 的一个与 T 不相交的无界闭集. 从而

$$\forall\kappa\in C\ \left(\kappa\text{不可达}\rightarrow\exists\alpha<\kappa\ \left(D_\alpha\cap Q_{<\kappa}\text{非半恰当}\right)\right).$$

以如下方式定义 $f:\delta\rightarrow\delta$:

$$\forall\alpha<\delta\ (f(\alpha)=\min\{\gamma<\delta\mid\ \alpha<\gamma\ \wedge\ \gamma\in C\}).$$

对于 $\alpha<\delta$, 令 $g(\alpha)=f(\alpha)+\omega$. 根据武丁基数的基本特性定理 (定理 3.16), 令 κ 和 $j:\mathrm{V}\rightarrow M$ 满足下述要求:

(a) $\mathrm{Crit}(j)=\kappa<\delta$ 是 g 的一个封闭点;

(b) $\mathrm{V}_{j(g)(\kappa)}\subset M$;

(c) $M^{<\kappa}\subset M$.

因为 κ 对 g 是封闭的, 它对 f 也是封闭的, 所以, $\kappa\in C$. 由于 κ 是可测基数, 自然是不可达基数. 这就给了我们一个具有下述特点的 $\alpha<\kappa$: $D_\alpha\cap Q_{<\kappa}$ 在 $Q_{<\kappa}$ 中是准稠密的, 但不是半恰当的. 令

$$S=\left\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})\mid\neg\left(\exists Y\prec\mathrm{V}_{\kappa+1}\ \left(Y\text{是一个}\ (D_\alpha\cap Q_{<\kappa},X)\text{-证据}\right)\right)\right\}.$$

因为 $D_\alpha\cap Q_{<\kappa}$ 不是半恰当的, 根据半恰当性特征引理 (引理 3.58) 中的 (2), S 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 中是荟萃集. 因为 $\mathrm{V}^M_{\kappa+2}=\mathrm{V}_{\kappa+2}$, 所以在 M 中, S 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 中也是荟萃集.

我们现在来寻找一个久违了的矛盾: 构造一个 $X\in j(S)$ 以及一个 $Y\prec\mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$ 以至于在 M 中, Y 是一个 $(j\left(D_\alpha\cap Q_{<\kappa}\right),X)$-证据.

序数 $j(f)(\kappa)\in j(C)$, 因而 $j(f)(\kappa)\in j\left(T_0\right)$; 而 $\alpha=j(\alpha)<\kappa<j(f)(\kappa)$. 应用同质特性, 在 M 中,

$$j\left(D_\alpha\right)\cap P^M_{<j(f)(\kappa)}\text{ 在 }Q^M_{<j(f)(\kappa)}\text{ 中是准稠密的.}$$

由于 $\mathrm{V}^M_{j(f)(\kappa)} = \mathrm{V}_{j(f)(\kappa)}$, 故 $Q^M_{<j(f)(\kappa)} = Q_{<j(f)(\kappa)}$, 从而在 V 中,

$$j\left(D_\alpha\right) \cap Q_{<j(f)(\kappa)} \text{ 在 } Q_{<j(f)(\kappa)} \text{ 中是准稠密的.}$$

令 $A \in j\left(D_\alpha\right) \cap Q_{<j(f)(\kappa)}$ 为一个与 S 在 $Q_{<j(f)(\kappa)}$ 中相容的条件, 并且令

$$\tilde{S} \in Q_{<j(f)(\kappa)}$$

为它们的一个共同下界. 如有必要, 从中去掉一个非荟萃子集, 不妨假设

$$\forall X \in \tilde{S}\ \left(\left(X \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right) \in S \wedge \left(X \cap \bigcup A\right) \in A\right).$$

由于 $\tilde{S}$ 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}\left(\bigcup \tilde{S}\right)$ 上是荟萃集, 在 V 中一定存在一个具备下述特点的可数的 $Y \subset \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$:

(a) $Y \prec \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$;

(b) $A \in Y$, 并且 Y 对 $j\restriction_{\mathrm{V}_{\kappa+1}}$ 也是封闭的;

(c) $\left(Y \cap \bigcup \tilde{S}\right) \in \tilde{S}$.

取出一个这样的 Y. 由此我们得到 $A \in j\left(D_\alpha \cap Q_{<\kappa}\right) \cap Y$ 以及 $(Y \cap \bigcup A) \in A$. 因此, Y 起底 $j\left(D_\alpha \cap Q_{<\kappa}\right)$. 由于 Y 是可数的, 所以 $Y \in M$.

令 $X = j\left(Y \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right)$. 由于 $\left(Y \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right) \in S$, 我们有 $X \in j(S)$. 由于 Y 可数, $X = j\left[Y \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}\right] \subset Y$.

现在我们来验证 $Y \cap \mathrm{V}^M_{j(\kappa)}$ 是 $X \cap \mathrm{V}^M_{j(\kappa)}$ 的末端扩展. 为此, 令 $a \in X \cap \mathrm{V}^M_{j(\kappa)}$. 我们必须证明 $a \cap Y \subset X$. 令 $b \in Y \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}$ 来实现等式 $a = j(b)$. 由同质特性, $b \in \mathrm{V}_\kappa$. 这样一来, $a = b$. 因为 $X \cap \mathrm{V}_\kappa = j\left(Y \cap \mathrm{V}_\kappa\right) = Y \cap \mathrm{V}_\kappa$, 所以, $a \cap Y = a \cap X$.

于是, 我们就证明了在 M 中, Y 是一个 $\left(j\left(D_\alpha \cap Q_{<\kappa}\right), X\right)$-证据. 这与另外两个事实 $Y \prec \mathrm{V}^M_{j(\kappa)+1}$ 和 $X \in j(S)$ 一起, 与 S 的定义矛盾. □

关于 $\mathbb{P}_{<\delta}$ 中准稠密子集或者准稠密子集序列的印证概念 (定义 3.20) 对于 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 照样适用, 并且下述引理的证明与引理 3.48 完全相同.

引理 3.59 设 δ 是一个极限序数. 设 $S \in Q_{<\delta}$.

(a) 设 W 是 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的一个极大冲突子集. 如果 S 印证 W, 那么 $Q_{<\delta}$ 中必然有一个具备下述特点的条件 T:

(i) $\bigcup S = \bigcup T$, $T \subset S$, $S - T$ 在 S 中为非荟萃集;

(ii) 对每一个 $X \in T$, $W \cap X$ 中有唯一一个 A 来实现 $(X \cap \bigcup A) \in A$.

(b) 设 $\kappa \leqslant \delta$ 以及 $\langle W_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 如果 S 印证 $\langle W_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$, 那么 $Q_{<\delta}$ 中必然有一个具备下述特点的条件 T:

(i) $\bigcup S = \bigcup T$, $T \subset S$, $S - T$ 在 S 中为非荟萃集;

(ii) 对每一个 $X \in T$, 以及每一个 $\alpha \in X \cap \kappa$, $W_\alpha \cap X$ 中有唯一一个 A 来实现 $(X \cap \bigcup A) \in A$.

下面的定理是定理 3.32 在这里的翻版. 它的证明也是定理 3.32 证明的自然修订.

定理 3.36 设 δ 是一个武丁基数. 设 $\kappa \leqslant \delta$, 以及 $\langle D_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 令

$$D = \{S \in Q_{<\delta} \mid S \text{ 印证 } \langle D_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle\}.$$

那么 D 是 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的一个稠密子集.

证明 不妨假设准稠密子集序列的长度为 δ. 设 $\langle D_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的准稠密子集的一个序列. 设 $S \in Q_{<\delta}$. 我们需要找到一个 $T \in Q_{<\delta}$ 来实现两项要求: $T \leqslant S$ 以及 T 印证这个给定的准稠密子集序列.

根据荟萃塔倒影定理 (定理 3.35), 令 $\kappa < \delta$ 为一个具备下述特点的不可达基数: $S \in Q_{<\kappa}$ 以及对于每一个 $\alpha < \kappa$, $D_\alpha \cap Q_{<\kappa}$ 在 $Q_{<\kappa}$ 中是一个半恰当的准稠密子集.

令

$$T = \left\{X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(V_\kappa) \,\middle|\, \left(X \cap \bigcup S\right) \in S \wedge \forall \alpha \in X \cap \kappa \left(X \text{ 起底 } D_\alpha \cap Q_{<\kappa}\right)\right\}.$$

我们来证明此 T 就是所要的. 我们需要证明的是: T 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(V_\kappa)$ 中是荟萃集. 这样 $V_\kappa = \bigcup T$. 这是一个传递集合. 于是, 依照定义 3.20, T 就印证所给定的准稠密子集序列. 因为 $S \supset T \downarrow \bigcup S$, 所以 $T \leqslant S$. 这样, 定理便会得到证明.

现在我们来证明 T 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(V_\kappa)$ 中是荟萃集.

设 $f : V_\kappa^{<\omega} \to V_\kappa$. 我们需要找到一个属于 T 的对 f 封闭的集合 Z.

令 λ 为一个梯度严格大于 $|V_\kappa|$ 的极限序数. 根据半恰当性特征引理 (引理 3.58) 中的 (4), 有: 对于每一个 $\alpha < \kappa$, 以及每一个 $X \prec V_\kappa$, 如果 $|X| = \aleph_0$, $\kappa \in X$, 且

$$D_\alpha \cap Q_{<\kappa} \in X,$$

那么就一定有一个 $Y \prec V_\lambda$ 来实现要求: Y 是一个 $(D_\alpha \cap Q_{<\kappa}, X)$-证据.

我们来构造具备下述特点的一个单调递增的长度 γ 严格小于 ω_1 的同质子模型序列 $\langle X_\beta \mid \beta \leqslant \gamma \rangle$:

(i) $\forall \beta \leqslant \gamma \ (X_\beta \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(V_\lambda) \wedge X_\beta \prec V_\lambda)$;

(ii) $\forall \alpha < \beta \leqslant \gamma \ (X_\beta \cap V_\kappa \text{ 是 } X_\alpha \cap V_\kappa \text{ 的末端扩展})$.

起始步. 令 $X \prec V_\lambda$ 实现下述目标: $\{\kappa, f, S, \langle D_\alpha \cap Q_{<\kappa} \mid \alpha < \kappa \rangle\} \subset X$ 以及 $(X \cap \bigcup S) \in S$. 依据荟萃集特征引理 (引理 3.25) 中的 (4), S 的荟萃集性质保证了这样的 X 的存在性. 现在令 $X_0 \prec X$ 来实现下述目标: $|X_0| = \aleph_0$, 以及

$$\{\kappa, f, S, \langle D_\alpha \cap Q_{<\kappa} \mid \alpha < \kappa \rangle\} \cup \left(X \cap \bigcup S\right) \subset X_0.$$

极限步. 设 $\beta<\omega_1$ 是一个极限序数, 并且 β 是目前 X_β 尚未定义的最小序数. 那么就令 $X_\beta=\bigcup\{X_\alpha\mid\alpha<\beta\}$.

后继步. 设 $\beta<\omega_1$, 并且 $\langle X_\alpha\mid\alpha\leqslant\beta\rangle$ 已经合乎要求地定义好. 如有需要, 我们来定义 $X_{\beta+1}$. 因为 $(\bigcup S)\in X_0\cap\mathrm{V}_\kappa$, $X_\beta\cap\mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_0\cap\mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展, 所以

$$X_\beta\cap\bigcup S=\left(X_0\cap\bigcup S\right)\in S.$$

如果 $X_\beta\cap\mathrm{V}_\kappa\in T$, 我们就成功地停止在这一步上, 令 $\gamma=\beta$, 从而无须再定义 $X_{\beta+1}$. 否则, 我们需要继续. 既然 $X_\beta\cap\mathrm{V}_\kappa\notin T$, 根据 T 的定义, 条件

$$\forall\alpha\in X_\beta\cap\kappa\ \left(X_\beta\,\text{起底}\,D_\alpha\cap Q_{<\kappa}\right)$$

就没有得到实现. 令 $\alpha\in X_\beta\cap\kappa$ 为一个反例. 令

$$\xi_\beta=\min\{\xi\leqslant\beta\mid\alpha\in X_\xi\}.$$

再令 α_β 为 X_{ξ_β} 中见证 X_β 并没有起底 $D_\rho\cap Q_{<\kappa}$ 的最小 ρ. 自然, $\alpha_\beta\leqslant\alpha$. 令 $Y\prec\mathrm{V}_\lambda$ 为一个 $\left(D_{\alpha_\beta}\cap Q_{<\kappa},X_\beta\right)$-证据. 令 $A\in D_{\alpha_\beta}\cap Y$ 满足 $(Y\cap\bigcup A)\in A$. 令 $X_{\beta+1}$ 来实现下述目标：

$$\left(X_\beta\cup\{A\}\cup\left(Y\cap\bigcup A\right)\right)\subset X_{\beta+1}\prec Y\ \wedge\ |X_{\beta+1}|<\kappa.$$

此时 $X_\beta\prec X_{\beta+1}$, 并且 $X_{\beta+1}$ 是一个 $\left(D_{\alpha_\beta}\cap Q_{<\kappa},X_\beta\right)$-证据, 尤其是 $X_{\beta+1}\cap\mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_\beta\cap\mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展.

现在我们需要证明上述构造过程一定在到达 ω_1 之前成功结束：目标 $X_\beta\in T$ 必定在某个 $\beta<\kappa$ 时被实现了.

假设不然. 上述序列构造过程走完了整个 ω_1 步. 由于在构造过程中对于极限序数 β 所定义的 ξ_β 必然满足不等式 $\xi_\beta<\beta$, 根据不可数正则基数上的选择函数定理 (定理 I.2.26), 必然有 ω_1 的一个荟萃子集 H 以及一个 $\eta<\omega_1$ 来见证如下事实：

$$\forall\beta\in H\ (\xi_\beta=\eta).$$

由于 $|X_\eta|=\aleph_0$, $|H|=\aleph_1$, 必然有 H 中的两个 $\beta_1<\beta_2$ 来见证等式 $\alpha_{\beta_1}=\alpha_{\beta_2}$. 可是这样一来, X_{β_1+1} 起底 $D_{\alpha_{\beta_1}}\cap Q_{<\kappa}$ 以及 $X_{\beta_2}\cap\mathrm{V}_\kappa$ 是 $X_{\beta_1+1}\cap\mathrm{V}_\kappa$ 的末端扩展, 由此 X_{β_2} 起底 $D_{\alpha_{\beta_2}}\cap Q_{<\kappa}$. 这与 α_{β_2} 的定义相矛盾.

令 $\gamma<\omega_1$ 为过程成功结束的那一步. 令 $Z=X_\beta\cap\mathrm{V}_\kappa$. 那么 $Z\in T$ 就是所寻找的. □

关于荟萃塔力迫构思 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 泛型扩张中的泛型超幂的有秩问题, 我们也有下述解答：

定理 3.37　设 δ 是一个武丁基数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么在 $V[G]$ 中, 泛型超幂 $\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 是有秩的, 并且 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)^{<\delta}\subset\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$.

证明　将定理 3.33 的证明进行如下修改: 用 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 取代 $\mathbb{P}_{<\delta}$. 这样就得到当前定理的证明. □

定理 3.38　设 δ 是一个武丁基数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子,

$$i_G:\mathrm{V}\to\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$$

是 G 在 $\mathrm{V}[G]$ 中诱导出来的泛型超幂同质嵌入映射. 那么 ω_1 是 i_G 的临界点, 并且 $i_G(\omega_1)=\delta$.

证明　设 δ 是一个武丁基数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子.

根据定理 3.37, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 泛型超幂是有秩的, 所以有典型的泛型同质嵌入映射 $i_G:\mathrm{V}\to\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$.

设 $\alpha<\delta$. 根据传递集合表示引理 (引理 3.55),

$$\alpha=\pi_G\left([\![\mathrm{ot}\restriction_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\alpha)}]\!]_G\right).$$

因此, $\alpha<i_G(\omega_1)$.

根据定理 3.37, $(\omega_1)^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},\in)}=(\omega_1)^{\mathrm{V}[G]}$. 所以, 我们需要证明 $(\omega_1)^{\mathrm{V}[G]}\leqslant\delta$.

令 τ 为一个 $\mathbb{Q}_{<\delta}$- 名字以至于

$$\{\varnothing\}\Vdash\tau:\check{\omega}\to\check{\delta}.$$

对于每一个 $n<\omega$, 令 A_n 为 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 的一个极大冲突子集以至于对于每一个 $S\in A_n$, 必有 $\beta<\delta$ 来实现

$$S\Vdash\tau(\check{n})=\check{\beta}.$$

对于 $n<\omega$ 和 $S\in A_n$, 令 β_n^S 满足上面等式中的序数 β.

依据定理 3.36, 令 $T\in G$ 来印证序列 $\langle A_n\mid n<\omega\rangle$. 依据唯一性引理 (引理 3.59), 我们可以假设

$$\forall X\in T\,\forall n<\omega\left(\text{存在唯一的}\,S\in A_n\cap X\,\left(\left(X\cap\bigcup S\right)\in S\right)\right).$$

对 $X\in T$ 和 $n<\omega$, 用 $S(X,n)$ 来记上式成立的唯一证据; 令 $\beta(X,n)=\beta_n^{S(X,n)}$.

固定 $n<\omega$. 因为对于 $X\in T$ 必有 $S(X,n)\in X$, 所以, 根据选择函数定理, 我们便得到一个 $S_n\in A_n$ 来实现下述目标:

$$\left\{X\subset\bigcup T\;\middle|\;S(X,n)=S_n\right\}\in G.$$

这就意味着 $\tau/G(n)=\beta_n^{S_n}$. 也就是说, $\exists X\in T\ (\tau/G(n)=\beta(X,n))$.

因此, $\mathrm{rng}(\tau/G)\subset\{\beta(X,n)\mid X\in T\wedge n<\omega\}$. 由于 $T\in\mathrm{V}_\delta$, $|T|<\delta$. 所以 τ_G 的值域在 δ 中有界. □

武丁基数极限荟萃塔

在后面的应用中, 我们将涉及两种优化状态: 存在无穷多个武丁基数和一个大于它们的可测基数; 总有更大的武丁基数存在. 因此, 我们需要理清它们各自所确定的可数范围内荟萃塔之间的关系. 在这里我们来分析一下当 κ 是无穷多个武丁基数的极限时, 由 κ 所确定的 $\mathbb{P}_{<\kappa}$ 或 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 与它下属的各武丁基数 δ_n 所确定的 $\mathbb{P}_{<\delta_n}$ 或 $\mathbb{Q}_{<\delta_n}$ 之间的关系.

定理 3.39 设 κ 是一个武丁基数. 设 $S \in \mathbb{Q}_{<\kappa}$. 令

$$S^* = \left\{ X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1}) \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} \left(X \cap \bigcup S\right) \in S \wedge \\ \forall W \in X \ ((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底} W) \end{array} \right) \right\}.$$

那么 S^* 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上是荟萃集.

证明 设 $f : (\mathrm{V}_{\kappa+1})^{<\omega} \to \mathrm{V}_{\kappa+1}$. 我们来构造一个对 f 封闭的 $X \in S^*$. 由于 f 的任意性, 这足以证明 S^* 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上是荟萃集.

令 λ 为一个梯度严格大于 $|\mathrm{V}_\kappa|$ 的极限序数.

我们的目标是递归地定义具备下列特点的三维序列 $\langle(\delta_n, X_n, D_n) \mid n < \omega\rangle$:

(1) 序列 $\langle\delta_n \mid n < \omega\rangle$ 必须满足下列要求:

(a) $(\forall n < \omega)\, \delta_n$ 是不可达基数;

(b) $S \in \mathrm{V}_{\delta_0}$;

(c) $\forall n < \omega\ (\delta_n < \delta_{n+1} < \kappa)$.

(2) 序列 $\langle X_n \mid n < \omega\rangle$ 必须满足下述要求:

(a) $\forall n < \omega\ (X_n \prec X_{n+1})$;

(b) $\{f, \kappa, S\} \subset X_0$;

(c) $\forall n < \omega\ (X_n \prec \mathrm{V}_\lambda \wedge |X_n| = \aleph_0)$.

(3) 序列 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 中的每一个 D_n 都是 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的一个准稠密子集.

(4) 序列 $\langle X_n \mid n < \omega\rangle$ 与序列 $\langle\delta_n \mid n < \omega\rangle$ 以如下方式关联:

$$\forall n < \omega \left(\delta_n \in X_n \wedge X_{n+1} \cap \mathrm{V}_{\delta_n} \text{ 是 } X_n \cap \mathrm{V}_{\delta_n} \text{ 的末端扩展}\right).$$

(5) 序列 $\langle D_n \mid n < \omega\rangle$ 与序列 $\langle X_n \mid n < \omega\rangle$ 以下列方式关联:

(a) $\forall n < \omega\ (D_n \in X_n)$;

(b) $\forall D \left(\begin{array}{l} (\exists n \in \omega\ (D = D_n)) \leftrightarrow \\ (D \text{ 是 } \mathbb{Q}_{<\kappa} \text{ 的准稠密子集} \wedge \exists m < \omega\ (D \in X_m)) \end{array} \right)$.

(6) 三维序列 $\langle(\delta_n, X_n, D_n) \mid n < \omega\rangle$ 以如下方式关联:

$$\forall n < \omega \ \left(X_{n+1} \cap \mathrm{V}_{\delta_n} \text{ 起底 } D_n \cap \mathbb{Q}_{<\delta_n}\right).$$

现在我们来构造所需要的序列. 令 $g:\omega\to\omega\times\omega$ 为下述双射：

$$\forall(n,m)\in\omega\times\omega\ \left(g^{-1}(n,m)=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+m\right).$$

起始步：应用 S 是荟萃集这个条件以及罗文海–斯科伦定理, 令 $X_0\prec\mathrm{V}_\lambda$ 满足下述要求：

(i) $\{f,\kappa,S\}\subset X_0$ 以及 $|X_0|=\aleph_0$;

(ii) $(X_0\cap\bigcup S)\in S$.

将 X_0 中的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的所有的准稠密子集按照以下方式罗列出来：

$$W_{(0,0)},W_{(0,1)},\cdots,W_{(0,n)},\cdots.$$

令 $D_0=W_{g(0)}$.

现在假设对于 $m<n$, (X_m,D_m,δ_m) 和 (X_n,D_n) 已经定义好, 并且不会影响最终目标的实现. 现在来定义 $(X_{n+1},D_{n+1},\delta_n)$.

首先定义 δ_n：根据定理 3.35, 存在一个具有下列特点的不可达基数 δ：

(i) $\delta<\kappa$; $S\in\mathrm{V}_\delta$; $(n>0\to\delta_{n-1}<\delta)$.

(ii) $D_n\cap\mathbb{Q}_{<\delta}$ 在 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 中是半恰当准稠密子集.

由于 $X_n\prec\mathrm{V}_\lambda$, 必有一个具备上述特点的不可达基数 $\delta\in X_n$. 令 $\delta_n\in X_n$ 为最小的具备上述特点的不可达基数.

其次定义 X_{n+1}：应用引理 3.58 以及罗文海–斯科伦定理, 我们得到一个可数的 $X_{n+1}\prec\mathrm{V}_\lambda$ 来作为 $(D_n\cap\mathbb{Q}_{<\delta_n},X_n)$-证据. 然后将 X_{n+1} 中的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的所有的准稠密子集按照以下方式罗列出来：

$$W_{(n+1,0)},W_{(n+1,1)},\cdots,W_{(n+1,m)},\cdots.$$

最后令 $D_{n+1}=W_{g(n+1)}$.

这就完成了三维序列 $\langle(\delta_n,X_n,D_n)\mid n<\omega\rangle$ 的递归定义. 现在我们来验证它们具有前面所列出的各项特点.

令 $X=\bigcup\{X_n\mid n<\omega\}$. 那么 $|X|=\aleph_0$ 以及 $X\prec\mathrm{V}_\lambda$. 由于 $f\in X$, $X\cap\mathrm{V}_{\kappa+1}$ 对 f 是封闭的. 由于 $(\bigcup S)\in X_0\cap\mathrm{V}_{\delta_0}$ 以及 $X\cap\mathrm{V}_{\delta_0}$ 是 $X_0\cap\mathrm{V}_{\delta_0}$ 的末端扩展, 我们就得到 $(X\cap\bigcup S)\in S$. 由于 X 中的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的所有的准稠密子集按照以下矩阵罗列出来：

$$\begin{array}{c}W_{(0,0)},W_{(0,1)},\cdots,W_{(0,m)},\cdots\\ \vdots\\ W_{(n,0)},W_{(n,1)},\cdots,W_{(n,m)},\cdots\\ \vdots\end{array}$$

而 $g:\omega\to\omega\times\omega$ 是一个双射, 所以 X 中的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的所有的准稠密子集就由序列 $\{D_n\mid n<\omega\}$ 罗列出来. 令 $D\in X$ 为 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的一个准稠密子集, 令 $n<\omega$ 满足 $D=D_n$. 根据 X_{n+1} 的定义, $X_{n+1}\cap\mathrm{V}_{\delta_n}$ 起底 $D\cap\mathbb{Q}_{<\delta_n}$. 因为 $X\cap\mathrm{V}_{\delta_n}$ 是 $X_{n+1}\cap\mathrm{V}_{\delta_n}$ 的末端扩展, 我们就有 $X\cap\mathrm{V}_{\kappa+1}$ 起底 D. 这些就表明 $(X\cap\mathrm{V}_{\kappa+1})\in S^*$. □

推论 3.26 设 κ 是一个武丁基数. 令

$$\hat{S}=\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})\mid\forall W\in X\,((W\text{ 在 }\mathbb{Q}_{<\kappa}\text{ 准稠密})\to X\text{ 起底}W)\}.$$

设 $\delta>\kappa$ 是一个极限序数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子或 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 如果 $\hat{S}\in G$, 那么 $G\cap\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 就是 V 上的一个 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子.

证明 设 D 为 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的一个稠密子集. 设 $S\in\mathbb{P}_{<\delta}$ (或者 $S\in\mathbb{Q}_{<\delta}$) 满足 $S\leqslant\hat{S}$. 我们只需证明:

$$\exists\tilde{S}\leqslant S\,\exists T\in D\left(\tilde{S}\leqslant T\right).$$

我们可以假设 $\forall Z\in S\left((Z\cap\mathrm{V}_{\kappa+1})\in\hat{S}\wedge D\in Z\right)$. 这样, S 中的每一个元素都起底 D. 也就是说,

$$\forall Z\in S\,\exists T_Z\in D\cap Z\left(\left(Z\cap\bigcup T_Z\right)\in T_Z\right).$$

根据无界闭集滤子 $\mathcal{F}_S^{\clubsuit}$ 的正规性, 必存在一个 $T\in D$ 来见证

$$\tilde{S}=\{Z\in S\mid T_Z=T\}$$

是 S 的一个荟萃子集. 这样, $\tilde{S}\leqslant T$ 以及 $\tilde{S}\leqslant S$. □

下面的事实表明上述推论算得上一个优化结果.

事实 3.3.1 设 κ 是一个武丁基数. 令

$$\hat{S}=\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})\mid\forall W\in X\,((W\text{ 在 }\mathbb{Q}_{<\kappa}\text{ 准稠密})\to X\text{ 起底}W)\}.$$

设 $\delta>\kappa$ 也是一个武丁基数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 如果 $G\cap\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 就是 V 上的一个 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子, 那么 $\hat{S}\in G$.

证明 根据定理 3.39, 集合 $\hat{S}$ 是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa+1})$ 上的荟萃集.

设 $\delta>\kappa$ 也是一个武丁基数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且 $G\cap\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 就是 V 上的一个 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子. 我们需要证明 $\hat{S}\in G$.

在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 $i_G:\mathrm{V}\prec\mathrm{ult}(\mathrm{V},\in)$ 为泛型嵌入映射. 由于 δ 是不可达基数, $|\mathrm{V}_{\kappa+1}|<\delta$. 根据定理 3.37, $\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$ 对于长度为 $|\mathrm{V}_{\kappa+1}|$ 的序列是封闭的, 所以

$$i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}]\in\mathrm{ult}(\mathrm{V},G).$$

根据引理 3.53, 对于 $T \in G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa}$,

$$T \in G \leftrightarrow i_G\left[\bigcup T\right] \in i_G(T).$$

因此, 我们只需证明 $i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}] \in i_G\left(\hat{S}\right)$.

设 $Z \in i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}]$ 为 $i_G(\mathbb{Q}_{<\kappa})$ 的一个准稠密子集. 令 $D \in \mathrm{V}_{\kappa+1}$ 满足 $Z = i_G(D)$. 那么, $D \subset \mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的一个准稠密子集. 由于 $G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa}$ 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子, $G \cap D$ 非空. 令 $T \in D \cap G$. 那么 $T \in \mathrm{V}_{\kappa+1}$, 从而 $i_G(T) \in i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}]$, 并且

$$\left(\bigcup i_G(T)\right) \cap i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}] = i_G\left[\bigcup T\right] \in i_G(T) \in i_G(D) = Z.$$

这样, $i_G[\mathrm{V}_{\kappa+1}] \in i_G\left(\hat{S}\right)$. 从而 $\hat{S} \in G$. □

关于全荟萃塔也有相同的定理和推论. 下面的定理是 Steel 的一个结果.

定理 3.40 设 δ 是一个武丁基数. 设 $S \in P_{<\delta}$. 令

$$S^* = \left\{ X \in \mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1}) \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} \left(X \cap \bigcup S\right) \in S \wedge \\ \forall D \in X\ ((D \text{ 在 } P_{<\delta} \text{ 是准稠密的}) \to X \text{ 起底 } D) \end{array} \right) \right\}.$$

那么 S^* 在 $\mathfrak{P}_\delta(\mathrm{V}_{\delta+1})$ 中是荟萃集合.

推论 3.27 设 κ 是一个武丁基数. 令

$$\hat{S} = \{ X \in \mathfrak{P}_\kappa(\mathrm{V}_{\kappa+1}) \mid \forall D \in X\ ((D \text{ 在 } P_{<\kappa} \text{ 是准稠密的}) \to X \text{ 起底 } D) \}.$$

设 $\delta > \kappa$ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且 $\hat{S} \in G$. 那么 $G \cap P_{<\kappa}$ 是 V 上的 $P_{<\kappa}$-泛型超滤子.

现在设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

我们来分析 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 的作用与各 $\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$ 的作用之间的关联.

定理 3.41 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

设 $m < \omega$ 以及 $S \in \mathbb{Q}_{<\kappa_m}$. 令 S_m^* 为下述集合:

$$\left\{ X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa) \;\middle|\; \left(\begin{array}{l} \left(X \cap \bigcup S\right) \in S \wedge \\ \forall n \geqslant m\, \forall W \in X\ ((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa_n} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底 } W) \end{array} \right) \right\}.$$

那么 S_m^* 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa)$ 上是荟萃集.

证明 证明与定理 3.39 的证明相似, 只是证明中所递归构造的三维序列的长度由 ω 变成 ω^2. 因此, 我们在此省略详细证明. □

这个定理也有类似的推论:

推论 3.28 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa=\sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}.$$

令 $\tilde{S}$ 为下述集合:

$$\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa) \mid \forall n<\omega\,\forall W\in X\ ((W\text{ 在 }\mathbb{Q}_{<\kappa_n}\text{ 准稠密})\to X\text{ 起底}W)\}.$$

那么 $\tilde{S}$ 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa)$ 上是荟萃集. 设 $\delta>\kappa$ 是一个极限序数. 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且 $\tilde{S}\in G$. 那么对于每一个自然数 n 都有 $G\cap\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$ 在 V 上是 $\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$-泛型超滤子.

证明 证明与推论 3.26 的证明类似. 我们省略详细证明. □

推论 3.29 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa=\sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}.$$

对于 $X\in[\mathrm{V}_{\kappa+1}]^\omega$, 令 $X\in S$ 当且仅当 $X\prec\mathrm{V}_{\kappa+1}$ 并且

$$\exists m<\omega\,\forall n\in(\omega-m)\,\forall W\in X\ ((W\text{ 在 }\mathbb{Q}_{<\kappa_n}\text{ 准稠密})\to X\text{ 起底}W).$$

那么, 对于 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 中的每一个荟萃集 T,

$$S_T=\left\{X\in S\ \middle|\ T\in X\wedge X\cap\left(\bigcup T\right)\in T\right\}$$

是一个荟萃集.

证明 固定 $T\in\mathbb{Q}_{<\kappa}$. 令 $\gamma_0<\kappa$ 为一个不可达基数, 并且 $T\in\mathbb{Q}_{<\gamma_0}$. 设 $m<\omega$ 满足 $\kappa_m>\gamma_0$. 令 T_m^* 为定理 3.41 中定义的集合. 那么 $T_m^*\in\mathbb{Q}_{<\kappa}$. □

基于上述定理和推论所给出的结论, 我们有必要对于 $\mathbb{Q}_{<\delta}$ 所确定的泛型超幂与各 $\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$ 所确定的泛型超幂之间的关联进行分析.

定义 3.23 设 δ 为一个极限序数. 设 $1<\gamma\leqslant\delta$. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 或者 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 令

$$X_{G,\gamma}=\{[\![f]\!]_G \mid \exists S\in G\cap\mathrm{V}_\gamma\ (f\in\mathrm{V}\wedge f:S\to\mathrm{V})\},$$

以及令

$$\pi_{G,\gamma}:(\mathrm{YZBF}(X_{G,\gamma},\in_G),\in_G)\cong(N_{G,\gamma},\in)$$

为 $X_{G,\gamma}$ 的有秩部分的传递化; 并且令

$$\forall x\in\mathrm{V}\ ((i'_G(x)\in\mathrm{YZBF}(X_{G,\gamma},\in_G))\to(i_{G,\gamma}(x)=\pi_{G,\gamma}(i'_G(x)))).$$

那么, $i'_G : \mathrm{V} \prec (X_{G,\gamma}, \in_G) \prec \prod_G (\mathrm{V}, \in)$.

引理 3.60　设 δ 为一个极限序数. 设 $1 < \gamma \leqslant \delta$. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 或者 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么

(1) 对于 $x \in \mathrm{V}$, $i_{G,\gamma}(x)$ 有定义当且仅当 $i_G(x)$ 有定义;

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{dom}\,(i_{G,\gamma}) \left(i_{G,\gamma} \restriction_{\mathrm{V}_\alpha} : \mathrm{V}_\alpha \prec \mathrm{V}_{i_G(\alpha)}^{N_{G,\gamma}} \right)$;

(3) $\gamma \subset N_{G,\gamma}$.

证明　(练习.) □

引理 3.61　设 $1 < \beta$ 为一个序数, $\delta > \beta$ 为一个极限序数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子或 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么 $\delta \subset \mathrm{Ord} \cap N_{G,\beta}$.

证明　令 $\alpha < \delta$. 令

$$X_{G,\beta,\alpha} = \{ [\![f]\!]_G \in X_{G,\beta} \mid \mathrm{rng}(f) \subset \mathrm{V}_\alpha \}.$$

令 $h_{\beta,\alpha}$ 为相应的引理 3.40 中的 (1) 或引理 3.56 中的 (1) 所提供的函数. 那么在关系 $\in_G$ 下属于 $[\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G$ 的对象恰好就是 $X_{G,\beta,\alpha}$ 中的元素. 令 $[\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G$ 具备下述特点：在泛型超幂 $\prod_G (\mathrm{V}, \in)$ 中下述命题成立：

$$[\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G \text{ 是传递集合} \wedge ([\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G, \in_G) \cong ([\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G, \in_G).$$

那么

$$(\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G) \cong (\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G).$$

因为 $\delta \subset \mathrm{YZXS}\left(\prod_G (\mathrm{V}, \in) \right)$, 所以或者

$$(\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G),$$

或者

$$\delta \subset \mathrm{YZXS}\,((\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![g_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G)).$$

二者必居其一. 于是, 或者

$$(\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G),$$

或者

$$\delta \subset \mathrm{YZXS}\,((\{ [\![f]\!]_G \mid [\![f]\!]_G \in_G [\![h_{\beta,\alpha}]\!]_G \}, \in_G)).$$

也就是说, 或者 $(X_{G,\beta,\alpha}, \in_G)$ 是有秩的, 或者 $\delta \subset \mathrm{YZXS}\,((X_{G,\beta,\alpha}, \in_G))$, 二者必居其一. 由于 $\alpha \subset \mathrm{YZXS}\,((X_{G,\beta,\alpha}, \in_G))$, 并且 $(X_{G,\beta,\alpha}, \in_G)$ 中的序数都是 $(X_{G,\beta}, \in_G)$ 中的序数的一个前段. 所以 $\alpha \subset N_{G,\beta}$.

由于 $\alpha < \delta$ 是任意的, 所以引理得证. □

引理 3.62 设 $1 < \beta$ 为一个序数, $\lambda > \beta$ 是一个全杨森基数, $\delta > \lambda$ 为一个极限序数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子或 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子, 并且

$$\{Y \subset \lambda \mid |Y| = \lambda\} \in G.$$

那么 $\lambda \in \mathrm{Ord} \cap N_{G,\beta}$, 并且

$$i_{G,\beta} \restriction_{\mathrm{V}_\lambda} : \mathrm{V}_\lambda \prec \mathrm{V}_\lambda^{N_{G,\beta}}.$$

证明 第一个结论由引理 3.61 给出. 由于 $i_{G,\beta}(\lambda) \leqslant i_G(\lambda)$, 以及 λ 是全杨森基数, 所以

$$\lambda \leqslant i_{G,\beta}(\lambda) \leqslant i_G(\lambda) = \lambda.$$

这就给出第二个结论. □

引理 3.63 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa = \sup \{ \kappa_n \mid n < \omega \}.$$

令 $\tilde{S}$ 为下述集合:

$$\{X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa) \mid \forall n < \omega \forall W \in X \; ((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa_n} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底} W)\}.$$

设 $\delta > \kappa$ 为一个极限序数. 设 G 为 V 上的 $\mathbb{P}_{<\delta}$-泛型超滤子, 或者 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 那么

(1) $\forall n < \omega \left(\prod_{G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}} (\mathrm{V}, \in) \prec \prod_{G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_{n+1}}} (\mathrm{V}, \in) \prec (X_{G,\kappa}, \in_G) \right)$;

(2) $X_{G,\kappa} = \bigcup \left\{ \prod_{G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}} (\mathrm{V}, \in) \;\middle|\; n < \omega \right\}$;

(3) $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}} = \bigcup \left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}]} \;\middle|\; n < \omega \right\}$;

(4) $i_{G,\kappa}(\omega_1) = \kappa$.

证明 (1) 和 (2) 由定义直接得到; (3) 由 (1) 和 (2) 直接得到; (4) 由 (3) 而得, 因为定理 3.38 表明 $i_{G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}}(\omega_1) = \kappa_n$. □

莱维泛型扩张对称模型

设 κ 是一个不可数的极限基数. 令 H 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 对于 $\gamma < \kappa$, 在 $\mathrm{V}[H]$ 中, 令

$$H_\gamma = \{p \in H \mid \mathrm{dom}(p) \subset \gamma \times \omega\},$$

以及

$$\mathbb{R}_H^* = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H_\gamma]} \;\middle|\; \gamma < \kappa \right\}.$$

称 $L\left(\mathbb{R}_H^*\right)$ 为**由 H 所确定的对称模型**.

引理 3.64　设 κ 是一个不可数的极限基数. 设 H 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 设 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思, 且 $|P| < \kappa$. 令 $G \in \mathrm{V}[H]$ 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 那么, 在 $\mathrm{V}[H]$ 中存在一个具备下述特点的 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子 H': 令

$$\mathbb{R}_H^* = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H_\gamma]} \;\middle|\; \gamma < \kappa \right\}; \quad \mathbb{R}_{H'}^* = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]\left[H'_\gamma\right]} \;\middle|\; \gamma < \kappa \right\}.$$

那么

$$L\left(\mathbb{R}_H^*\right) = L\left(\mathbb{R}_{H'}^*\right).$$

证明　对于不可数的基数 $\gamma < \kappa$, 令

$$\mathrm{Col}^\gamma(\omega, <\kappa) = \{p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \mid \mathrm{dom}(p) \cap \gamma \times \omega = \varnothing\}.$$

对于 $p \in \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$, 令

$$f(p) = \left(p\restriction_{\gamma\times\omega}, p\restriction_{(\kappa-\gamma)\times\omega}\right).$$

那么 $f : \mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \cong \mathrm{Col}(\omega, <\gamma) \times \mathrm{Col}^\gamma(\omega, <\kappa)$.

设 $\gamma < \kappa$ 为一个不可数基数, 且 $|P| < \gamma$. 令 $H_{\gamma+1} = H \cap \mathrm{Col}\,(\omega, <\gamma+1)$. 令 $\tilde{H} \in \mathrm{V}\left[H_{\gamma+1}\right]$ 为 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, \gamma)$-泛型超滤子以至于

$$\mathrm{V}\left[H_{\gamma+1}\right] = \mathrm{V}[G]\left[\tilde{H}\right].$$

因为 γ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中不可数, 而在 $\mathrm{V}[G]\left[\tilde{H}\right]$ 中是可数的, 并且 $\left|\mathrm{Col}(\omega, <\gamma+1)^{\mathrm{V}[G]}\right| = \gamma$, 所以我们有一个 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\gamma+1)$-泛型超滤子 $\bar{H}$ 来实现等式:

$$\mathrm{V}[G]\left[\tilde{H}\right] = \mathrm{V}[G]\left[\bar{H}\right].$$

因此, $\mathrm{V}[G]\left[\bar{H}\right] = \mathrm{V}\left[H_{\gamma+1}\right]$. 令

$$H' = f^{-1}\left[\bar{H} \times \left(H \cap \mathrm{Col}^\gamma(\omega, <\kappa)\right)\right].$$

于是, 对于 $\gamma < \delta \leqslant \kappa$, 有

$$\mathrm{V}[G]\left[H'_\delta\right] = \mathrm{V}\left[H_\delta\right].$$

因此, 此 H' 即所求. □

引理 3.65 设 β 是一个极限序数. 令 H 和 H' 分别为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\beta)$-泛型超滤子. 令

$$\mathbb{R}_H^* = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H_\gamma]} \;\middle|\; \gamma < \kappa\right\}; \quad \mathbb{R}_{H'}^* = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G][H'_\gamma]} \;\middle|\; \gamma < \kappa\right\}.$$

设 $\varphi(v_1,\cdots,v_n)$ 为集合论纯语言彰显自由变元的表达式. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为 V 中的元素. 那么

$$L(\mathbb{R}_H^*) \models \varphi[a_1,\cdots,a_n] \leftrightarrow L(\mathbb{R}_{H'}^*) \models \varphi[a_1,\cdots,a_n].$$

证明 因为任意两个 $p,q\in\mathrm{Col}(\omega,<\beta)$ 都可以是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\beta)$-泛型超滤子 H_1 和 H_2 中的元素以至于 $\bigcup H_1$ 与 $\bigcup H_2$ 的差别是有限的. 对于这样两个 H_1 和 H_2, 由它们各自诱导出来的对称模型是相等的. □

引理 3.66 设 β 是一个极限序数. 设 H 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\beta)$-泛型超滤子. 那么

$$\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L(\mathbb{R}_H^*)} = \mathbb{R}_H^*.$$

证明 设 $x\in\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L(\mathbb{R}_H^*)}$. 那么 x 在 $L(\mathbb{R}_H^*)$ 中是利用 $\mathbb{R}_H^*$ 中的元素经序数可定义的. 令 $\alpha<\beta$ 满足 x 是由 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H_\alpha]}$ 中的元素经序数可定义的. 因为

$$L(\mathbb{R}_H^*) = L\left(\mathbb{R}^{**}_{H\cap\mathrm{Col}^\alpha(\omega,<\beta)}\right),$$

其中

$$\mathbb{R}^{**}_{H\cap\mathrm{Col}^\alpha(\omega,<\beta)} = \bigcup\left\{ \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H_\alpha][H\cap\mathrm{Col}^\alpha(\omega,<\gamma)]} \;\middle|\; \alpha<\gamma<\beta\right\}.$$

在 $\mathrm{V}[H_\alpha]$ 中应用引理 3.65, 我们得到 $x\in\mathrm{V}[H_\alpha]$. 这就表明 $x\in\mathbb{R}_H^*$. □

重新安排泛型超幂中的实数

引理 3.67 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为严格递增的武丁基数的序列以及

$$\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}.$$

设 $\rho>\kappa$ 为一个极限序数. 令 $\tilde{S}$ 为下述集合:

$$\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\kappa) \mid \forall n<\omega\,\forall W\in X\,((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa_n} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底 } W)\}.$$

设 $G\ni\tilde{S}$ 为 V 上的一个 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子. 那么在 $\mathrm{V}[G]$ 的某个力迫构思下的泛型扩张之中, 存在 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega<\kappa)$-泛型超滤子 H 来实现等式:

$$\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}} = \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L(\mathbb{R}_H^*)}.$$

证明 首先, 根据推论 3.28, $\tilde{S}$ 是一个荟萃集, 并且当 $G \ni \tilde{S}$ 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子时, $G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}$ 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$-泛型超滤子.

设 $G \ni \tilde{S}$ 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 如下定义偏序集 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$:

$$P = \left\{g \in N_{G,\kappa} \mid \exists \gamma < \kappa \left(g \text{ 是 V 上的 } \mathrm{Col}(\omega, <\gamma)\text{-泛型超滤子}\right)\right\},$$

以及对于 $g, h \in P$, 令 $g \leqslant h \leftrightarrow h \subset g$.

设 K 为 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathrm{Col}\left(\omega, 2^{|P|}\right)$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G][K]$ 中, 令 H^* 为 $\mathrm{V}[G]$ 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 令 $H = \bigcup H^*$.

断言一 此 H 是 V 上的一个 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子.

设 $D \in \mathrm{V}$ 为 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 的一个稠密子集. 设 $g \in P$. 令 $\gamma < \kappa$ 满足 g 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\gamma)$-泛型超滤子. D 的稠密性保证 V 中的集合

$$\{p \cap \mathrm{Col}(\omega, <\gamma) \mid p \in D\}$$

是 $\mathrm{Col}(\omega, <\gamma)$ 的一个稠密子集. 根据 g 的泛型特性, 令 $p \in D$ 满足 $p \cap \mathrm{Col}(\omega, <\gamma) \in g$. 令 δ 满足

$$\gamma < \delta < \kappa \wedge p \in \mathrm{Col}(\omega, <\delta).$$

令 $q = p \cap \mathrm{Col}^{\gamma}(\omega, <\kappa) = p \cap \mathrm{Col}^{\gamma}(\omega, <\delta)$.

根据引理 3.55, $\mathrm{V}_\kappa \subset N_{G,\kappa}$. 根据引理 3.63, $(\omega_1)^{N_{G,\kappa}} = \kappa$. 因此, 所有在 $\mathrm{V}[g]$ 中的 $\mathrm{Col}(\omega, <\delta)$ 的稠密子集的集合在 $N_{G,\kappa}$ 中是一个可数集合. 于是, 在 $N_{G,\kappa}$ 中, 存在一个包括 q 在内的 $\mathrm{V}[g]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\delta)$-泛型超滤子 $\bar{g}$. 令 $h = g \times \bar{g}$. 那么 h 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\gamma) \times \mathrm{Col}^{\gamma}(\omega, <\delta)$-泛型超滤子, 并且 h 确定一个 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\delta)$-泛型超滤子 $\tilde{g} \supset g$ 以至于 $p \in \tilde{g}$. 这样得到的 $\tilde{g} \in P$, 并且 $\tilde{g} \leqslant g$ 以及 $\tilde{g} \cap D \neq \varnothing$. 这就表明下述集合

$$\{\tilde{g} \in P \mid \tilde{g} \cap D \neq \varnothing\}$$

在 $\mathbb{P}$ 中是稠密的. 因此, H^* 与这个集合有非空交. 从而, $H \cap D \neq \varnothing$. 由此断言一得证.

对于 $n < \omega$, 令 $G_n = G \cap \mathbb{Q}_{<\kappa_n}$. 根据推论 3.28, 对每一个 $n < \omega$, G_n 都是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa_n}$-泛型超滤子, 并且 $G_n \in N_{G,\kappa}$, 以及 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}} \in \mathrm{V}\left[G_n\right]$.

断言二 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}} \subseteq L\left(\mathbb{R}_H^*\right)$.

设 $g \in P$ 以及 $x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}}$. 令 γ 满足 g 是 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\gamma)$-泛型超滤子. 因为 γ 在 $N_{G,\kappa}$ 中是可数的, 所以在 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}}$ 中必有一个 y 来实现 $\{x, g\} \in \mathrm{V}[y]$. 令 $n < \omega$ 实现 $y \in \mathrm{V}\left[G_n\right]$. 令 $g' \in N_{G,\kappa}$ 为 $\mathrm{V}\left[G_n\right]$ 上的 $\mathrm{Col}\left(\omega, \kappa_n\right)$-泛型超滤子. 根

据引理 II.3.94, 令 h 为 $\mathrm{V}[g]$ 上的 $\mathrm{Col}\,(\omega,\kappa_n)$-泛型超滤子以至于下述等式成立:

$$\mathrm{V}\,[G_n]\,[g'] = \mathrm{V}[g][h].$$

应用引理 3.64 的证明过程, 我们得到 $\mathrm{V}[g]$ 上的一个 $\mathrm{Col}^\gamma\,(\omega, <\kappa_n+1)$-泛型超滤子 $\bar{g}$ 来实现等式:

$$\mathrm{V}[g][h] = \mathrm{V}[g]\,[\bar{g}]\,.$$

这表明在 P 中有一个 $\tilde{g}$ 来实现

$$\tilde{g} \leqslant g \,\wedge\, x \in \mathrm{V}\,[\tilde{g}]\,.$$

因此断言二得证.

最后, 不等式 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L(\mathbb{R}^*_H)} \subseteq \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{N_{G,\kappa}}$ 由引理 3.66 给出. □

令 $\theta(v)$ 为一个表述命题 $v = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的集合论纯语言的表达式. 称彰显自由变元的表达式 $\psi\,(v_1,\cdots,v_n)$ 为一个 $\Sigma_1(\mathbb{R})$-表达式当且仅当存在一个彰显自由变元的 Σ_1-表达式 $\varphi\,(v_1,\cdots,v_n,v_{n+1})$ 以至于 $\psi\,(v_1,\cdots,v_n)$ 是如下表述式:

$$\exists v_{n+1}\;(\theta\,(v_{n+1})\,\wedge\,\varphi\,(v_1,\cdots,v_n,v_{n+1}))\,.$$

引理 3.68 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为严格递增的武丁基数的序列以及

$$\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}\,.$$

设 H' 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$-泛型超滤子. 设 $\psi\,(v_1,\cdots,v_n)$ 为一个 $\Sigma_1(\mathbb{R})$ 表达式, 以及 $a_1,\cdots,a_n$ 为 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}}$ 中的元素. 那么

$$\left((L(\mathbb{R}))^{L\left(R^*_{H'}\right)} \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n]\right) \to (L(\mathbb{R}) \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n])\,.$$

证明 设 $(L(\mathbb{R}))^{L\left(R^*_{H'}\right)} \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n]$. 令 $\rho>\kappa$ 为一个足够大的极限序数来实现

$$(L_\rho(\mathbb{R}))^{L\left(R^*_{H'}\right)} \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n]\,.$$

令 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子, 并且引理 3.67 中定义的集合 $\tilde{S}\in G$. 令 H 由引理 3.67 提供. 根据引理 3.65,

$$(L_\rho(\mathbb{R}))^{L\left(R^*_H\right)} \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n]\,.$$

根据引理 3.61、引理 3.67 以及 ψ 是一个 $\Sigma_1(\mathbb{R})$ 表达式这一基本事实, 我们就有

$$(L(\mathbb{R}))^{N_{G,\kappa}} \models \psi\,[a_1,\cdots,a_n]\,.$$

由于 $\forall 1 \leqslant m \leqslant n\ (i_{G,\kappa}(a_m) = a_m)$, ψ 又是一个 $\Sigma_1(\mathbb{R})$ 表达式, 上述命题蕴涵下述命题:

$$(X_{G,\kappa}, \in_G) \models \psi^{L(\mathbb{R})}\left[i'_G(a_1), \cdots, i'_G(a_n)\right].$$

根据映射 $i'_G : (\mathrm{V}, \in) \prec (X_{G,\kappa}, \in_G)$ 的同质性, 我们得到

$$L(\mathbb{R}) \models \psi\left[a_1, \cdots, a_n\right].$$

□

引理 3.69 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为严格递增的武丁基数的序列以及

$$\kappa = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

设 $\kappa^* > \kappa$ 为一个全杨森基数. 设 $\psi(v_1, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式, 以及 $a_1, \cdots, a_n$ 为 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}}$ 中的元素. 设 H' 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 那么

$$\left((L(\mathbb{R}))^{L\left(R^*_{H'}\right)} \models \psi\left[a_1, \cdots, a_n\right]\right) \leftrightarrow \left(L(\mathbb{R}) \models \psi\left[a_1, \cdots, a_n\right]\right).$$

证明 设 $\rho > \kappa^*$ 为一个极限序数. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子, 并且引理 3.67 中定义的集合 $\tilde{S} \in G$, 以及下述集合也在 G 之中:

$$\{X \subset \kappa^* \mid |X| = \kappa^*\}.$$

令 H 由引理 3.67 提供. 由于在 V 中存在可测基数, $\mathbb{R}^{\#}$ 存在. 因此,

$$L_{\kappa^*}(\mathbb{R}) \prec L(\mathbb{R}).$$

由于 $\mathbb{R}^{\#}$ 存在, $\mathrm{V}_{\kappa^*} \models$ “$\mathbb{R}^{\#}$ 存在”. 根据 $i_{G,\kappa}$ 的同质特性,

$$\mathrm{V}_{\kappa^*}^{N_{G,\kappa}} \models \mathbb{R}^{\#} \text{存在}.$$

因此, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\left(\mathbb{R}^{N_{G,\kappa}}\right)^{\#}$ 存在. 于是,

$$L_{\kappa^*}\left(\mathbb{R}^{N_{G,\kappa}}\right) \prec L\left(\mathbb{R}^{N_{G,\kappa}}\right).$$

综合起来, 我们就有, 令 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$,

$$\begin{aligned} L\left(\mathbb{R}^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)}\right) \models \psi[\vec{a}] &\leftrightarrow L\left(\mathbb{R}^{L\left(\mathbb{R}^*_{H}\right)}\right) \models \psi[\vec{a}] && \text{(根据引理 3.65)} \\ &\leftrightarrow L\left(\mathbb{R}^{N_{G,\kappa}}\right) \models \psi[\vec{a}] && \text{(根据引理 3.67)} \\ &\leftrightarrow L_{\kappa^*}\left(\mathbb{R}^{N_{G,\kappa}}\right) \models \psi[\vec{a}] && \text{(根据 \# 性质)} \\ &\leftrightarrow L_{\kappa^*}(\mathbb{R}) \models \psi[\vec{a}] && \text{(根据引理 3.62)} \\ &\leftrightarrow L(\mathbb{R}) \models \psi[\vec{a}] && \text{(根据 \# 性质).} \end{aligned}$$

□

设 λ 是一个不可数的基数. 设 φ 是一个集合论纯语言的表达式, 以及 a 是一个集合. 称 $\langle\varphi, a\rangle$ 是 λ-**泛型扩张不变的**当且仅当对于任意两个势不超过 λ 的力迫构思 $\mathbb{P}_1$ 以及 $\mathbb{P}_2$ 而言, 如果 K_1 与 K_2 分别是 V 上的 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 泛型超滤子, 并且 $K_1 \in \mathrm{V}[K_2]$, 那么

$$\forall x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[K_1]} \left((\mathrm{V}[K_1] \models \varphi[x, a]) \leftrightarrow (\mathrm{V}[K_2] \models \varphi[x, a])\right).$$

称 $\langle\varphi, a\rangle$ 是 $(<\lambda)$-**泛型扩张不变的**当且仅当对于所有不可数的 $\gamma<\lambda$ 而言, $\langle\varphi, a\rangle$ 都是 γ-泛型扩张不变的.

引理 3.70 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为严格递增的武丁基数的序列以及

$$\kappa=\sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}.$$

设 $\kappa^*>\kappa$ 为一个可测基数. 设 $\psi(v_1, v_2)$ 为一个彰显自由变元的表达式, 并且令 φ 为 $\psi^{L(\mathbb{R})}$. 设 $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么 $\langle\varphi, a\rangle$ 是 $(<\kappa)$-泛型扩张不变的.

证明 设 $\mathbb{P}_1$ 以及 $\mathbb{P}_2$ 是两个势严格小于 κ 的力迫构思. 不妨设它们都在 V_κ 中. K_1 与 K_2 分别是 V 上的 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 泛型超滤子, 并且 $K_1 \in \mathrm{V}[K_2]$. 设 $x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[K_1]}$.

令 H_2 为 $\mathrm{V}[K_2]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[K_1]$ 中应用引理 3.64, 令 H_1 为 $\mathrm{V}[K_1]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega,<\kappa)$-泛型超滤子来实现等式:

$$L\left(\mathbb{R}_{H_1}^*\right)=L\left(\mathbb{R}_{H_2}^*\right).$$

设 $\kappa^*>\kappa$ 为一个可测基数. 那么在 $\mathrm{V}[K_1]$ 中以及在 $\mathrm{V}[K_2]$ 中, κ^* 都是可测基数. 因而也就是它们中的全杨森基数. 另外, 除了有限个武丁基数外, 几乎所有的 κ_n 都在这两个泛型扩张中为武丁基数. 在 $\mathrm{V}[K_1]$ 和 $\mathrm{V}[K_2]$ 中应用引理 3.69, 我们就有

$$\begin{aligned}(L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}[K_1]} \models \psi[x, a] & \leftrightarrow (L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}_{H_1}^*\right)} \models \psi[x, a] \\ & \leftrightarrow (L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}_{H_2}^*\right)} \models \psi[x, a] \\ & \leftrightarrow (L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}[K_2]} \models \psi[x, a].\end{aligned}$$

□

引理 3.71 设 $\langle\kappa_n \mid n<\omega\rangle$ 为严格递增的武丁基数的序列以及

$$\kappa=\sup\{\kappa_n \mid n<\omega\}.$$

设 $\psi(v_1, v_2)$ 和 $\psi'(v_1, v_2)$ 为两个彰显自由变元的 $\Sigma_1(\mathbb{R})$ 表达式, 并且

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall v_1 \forall v_2\left(\neg\psi(v_1, v_2) \vee \neg\psi'(v_1, v_2)\right).$$

令 $\varphi(v_1, v_2)$ 为 $\psi^{L(\mathbb{R})}$. 设 $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 令 H 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 假设

$$\forall y \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L(\mathbb{R}^*_H)} \left((L(\mathbb{R}))^{L(\mathbb{R}^*_H)} \models \psi[y, a] \vee (L(\mathbb{R}))^{L(\mathbb{R}^*_H)} \models \psi'[y, a]\right).$$

那么 $\langle \varphi, a \rangle$ 是 $(<\kappa)$-泛型扩张不变的.

证明　设 $\mathbb{P}_1$ 以及 $\mathbb{P}_2$ 是两个势严格小于 κ 的力迫构思. 不妨设它们都在 V_κ 中. K_1 与 K_2 分别是 V 上的 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 泛型超滤子, 并且 $K_1 \in V[K_2]$. 设 $x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{V[K_1]}$.

令 H_2 为 $V[K_2]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子. 在 $V[K_1]$ 中应用引理 3.64, 令 H_1 为 $V[K_1]$ 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子来实现等式:

$$L\left(\mathbb{R}^*_{H_1}\right) = L\left(\mathbb{R}^*_{H_2}\right).$$

在 V 中应用引理 3.64, 令 H' 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子来实现等式:

$$L\left(\mathbb{R}^*_{H_1}\right) = L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right).$$

根据引理 3.65, 有

$$\forall y \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)} \left((L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)} \models \psi[y, a] \vee (L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)} \models \psi'[y, a]\right).$$

如果 $(L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)} \models \psi[y, a]$, 那么 $(L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H_1}\right)} \models \psi[y, a]$, 从而

$$(L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H_2}\right)} \models \psi[y, a].$$

在 $V[K_1]$ 中和 $V[K_2]$ 中应用引理 3.68, 我们就有

$$(L(\mathbb{R}))^{V[K_1]} \models \psi[y, a] \wedge (L(\mathbb{R}))^{V[K_2]} \models \psi[y, a].$$

如果 $(L(\mathbb{R}))^{L\left(\mathbb{R}^*_{H'}\right)} \models \psi'[y, a]$, 那么基于同样的讨论我们得到

$$(L(\mathbb{R}))^{V[K_1]} \models \psi'[y, a] \wedge (L(\mathbb{R}))^{V[K_2]} \models \psi'[y, a].$$

因为无论是 $(L(\mathbb{R}))^{V[K_1]}$, 还是 $(L(\mathbb{R}))^{V[K_2]}$, 都不会同时满足 $\psi[y, a]$ 和 $\psi'[y, a]$, 所以, 引理得证. □

对称泛型扩张

定义 3.24 设 M 是 ZFC 的传递模型. 设 $\sigma \subset \gamma^{\omega}$ 中的每一个元素都是 M 上的泛型超滤子, 并且 $\sigma^{<\omega} \subset \sigma$, 以及 $\gamma^{\omega} \cap M(\sigma) = \sigma$. 设 δ 是 M 中的一个满足下述等式的强极限基数:

$$M \models |\mathrm{V}_{\delta}| = \delta.$$

称 $M(\sigma)$ 是 M 的 δ-**对称泛型扩张**当且仅当在 M 中有一个力迫构思 $\mathbb{P}$ 以至于在 M 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张中, 存在一个力迫构思 $\mathrm{Col}(\omega, <\delta)$ 的在 M 上的泛型超滤子 G 来实现等式

$$\sigma = \bigcup \{ \gamma^{\omega} \cap M[G \restriction_{\alpha}] \mid \alpha < \delta \}.$$

例 3.10 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa = \sup \{ \kappa_n \mid n < \omega \}.$$

令 $\delta > \kappa$ 是一个可测基数. 令 H 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[H]$ 中, 设 G 为 V 上的一个 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子; 令

$$\mathbb{R}^{*} = \bigcup \{ \mathbb{R} \cap \mathrm{V}[G \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)] \mid \alpha < \kappa \}.$$

那么 $\mathrm{V}(\mathbb{R}^{*})$ 就是 V 的一个 κ-对称泛型扩张.

引理 3.72 $M(\sigma)$ 是 δ-对称泛型扩张当且仅当 σ 具备下述特点:

(1) σ 中的每一个元素都是 M 上的在 M_{δ} 中的某一个 $\mathbb{P}$ 的泛型超滤子;

(2) $\delta = \sup \left\{ \omega_1^{M[x]} \,\middle|\, x \in \sigma \right\}$.

证明 需要证明充分性. 假设 σ 具备条件 (1) 和 (2). 令

$$P = \left\{ g \,\middle|\, \exists \alpha < \delta \, \exists x \in \sigma \, \left(g \subset \mathrm{Col}(\omega, <\alpha) \text{ 是在 } M[x] \text{ 中的 } M \text{ 上的泛型超滤子} \right) \right\},$$

对 $g, f \in P$, 令 $f \leqslant g$ 当且仅当 $f \supset g$.

那么 $\mathbb{P} \in M(\sigma)$. 由于 δ 是一个强极限基数, 并且对于

$$\alpha < \delta, \ \exists x \in \sigma \ \left(|\alpha|^{M[x]} \leqslant \omega \right), \ P \neq \varnothing.$$

令 G 为 $M(\sigma)$ 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 令 $H = \bigcup G$. 那么 $H \subset \mathrm{Col}(\omega, <\delta)$ 是一个滤子.

断言一 H 是 M 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\delta)$-泛型超滤子.

设 $D \subset \mathrm{Col}(\omega, <\delta)$ 为 M 中的一个稠密子集. 固定 $g \in P$ 以及 $\eta < \delta$ 来实现 g 是 M 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\eta)$-泛型超滤子. 根据 g 的泛型特性, 令 $\eta < \xi < \delta$ 以及

$p \in D \cap \mathrm{Col}(\omega, <\xi)$ 来实现 $p \cap \mathrm{Col}(\omega, <\eta) \in g$. 由于 $\mathrm{Col}(\omega, <\eta)$ 正则性地嵌入到 $\mathrm{Col}(\omega, \xi)$ 中, 并且在 M 中还有 $2^{\xi} < \delta$, 故 σ 中就有一个 y 以及 M 上的一个 $\mathrm{Col}(\omega, <\xi)$-泛型超滤子 $h \in M[y]$ 来见证 $h \supset g$ 以及 $p \in h$. 这就证明了断言一.

断言二 $\sigma \supset \bigcup \left\{ \mathbb{R}^{M[H \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)]} \mid \alpha < \delta \right\}$.

这是因为 $\mathbb{R}^{M(\sigma)} \subset \sigma$, 以及对于 $\alpha < \delta$ 都有 $H \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha) \in M(\sigma)$.

断言三 如果 $x \in \sigma$, 那么 $\exists \alpha < \delta\ (x \in M[H \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)])$.

在 $M(\sigma)$ 中讨论. 固定 $x \in \sigma$. 令

$$D_x = \{ g \in P \mid x \in M[g] \}.$$

我们来证明 D_x 在 $\mathbb{P}$ 中是稠密的.

令 $y \in \sigma$, $\eta < \delta$, $g \in P \cap M[y]$ 满足要求: $g \subset \mathrm{Col}(\omega, <\eta)$ 是 M 上的一个泛型超滤子. 那么, x 与 y 同在 M 上的以 M_δ 内的某个力迫构思的力迫扩张中. 如果 $x \notin M[g]$, 那么 x 在 $M[g]$ 上的位于 $(\mathrm{V}_\xi)^{M[g]}$ 内的某个力迫构思的泛型扩张之中, 其中 $\xi < \delta$. 令 $z \in \sigma$ 来见证 $(\mathrm{V}_{\xi+1})^{M[g]}$ 在 $M[z]$ 中可数, $x \in M[z]$ 以及 $y \in M[z]$. 于是, 存在 $M[z]$ 上的泛型超滤子 $h \subset \mathrm{Col}(\omega, <\xi)$ 以至于 $g \subset h$, 并且 $x \in M[h]$.

这就证明了断言三.

引理得证. □

应用可数范围荟萃塔力迫构思, 我们来证明定理 3.29. 事实上, 我们将证明一个更强的结论.

定理 3.42 (Woodin) 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 为武丁基数的一个严格单调递增序列. 令

$$\kappa = \sup \{ \kappa_n \mid n < \omega \}.$$

令 $\delta > \kappa$ 是一个可测基数.

(1) 令 G 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 设 $H \subset \mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$ 为 V 上第一个泛型超滤子; 令

$$\mathbb{R}_H^* = \bigcup \left\{ \mathbb{R}^{\mathrm{V}[G]} \cap \mathrm{V}[H \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)] \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\}.$$

那么存在一个 $j : L\left(\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\right) \prec L\left(\mathbb{R}_H^*\right)$.

(2) 如果 $\mathbb{P} \in \mathrm{V}_\kappa$ 是一个力迫构思, H 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子, 那么

$$\left(L\left(\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\right), \in, r\right)_{r \in \mathbb{R}^{\mathrm{V}}} \equiv \left((L(\mathbb{R}))^{\mathrm{V}[H]}, \in, r\right)_{r \in \mathbb{R}^{\mathrm{V}}}.$$

(3) 如果 $X \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, 那么 X 是勒贝格可测的; 具备贝尔特性; 如果 X 不可数, 那么 X 必然包含一个完备子集.

(4) 如果 $V(\mathbb{R}_G)$ 是 V 的 κ-对称泛型扩张, 那么 $\mathbb{R}_G^{\#} \cap V = \mathbb{R}^{\#}$.

(5) 如果 $\mathbb{P} \in V_\kappa$ 是一个力迫构思, $G \subset P$ 是 V 上的一个泛型超滤子, 那么 $\left(\mathbb{R}^{\#}\right)^{V} = \left(\mathbb{R}^{\#}\right)^{V[G]} \cap V$.

证明 首先, 对于 $X \in [V_{\kappa+1}]^\omega$, 令 $X \in S$ 当且仅当 $X \prec V_{\kappa+1}$ 并且

$$\exists m < \omega \, \forall n \in (\omega - m) \, \forall W \in X \left((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa_n} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底 } W\right).$$

那么, 对于 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 中的每一个荟萃集 T,

$$S_T = \left\{X \in S \;\middle|\; T \in X \wedge X \cap \left(\bigcup T\right) \in T\right\}$$

是 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(V_{\kappa+1})$ 上的一个荟萃集.

令 $G \ni S$ 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\delta}$-泛型超滤子.

在 $V[G]$ 中, 由 G 所确定的泛型超幂 $\prod_G (V, \in)$ 可能不是有秩的. 但它的有秩部分足以给出我们所需要的结果. 令 $i_G : V \prec \prod_G (V, \in)$ 为泛型超幂. 由于 δ 是可测基数, $i_G(\delta) = \delta$.

根据正规性, 设 $m < \omega$ 以及 S_m^* 为下述集合:

$$\left\{X \in S \;\middle|\; \forall n \geqslant m \, \forall W \in X \left((W \text{ 在 } \mathbb{Q}_{<\kappa_n} \text{ 准稠密}) \to X \text{ 起底 } W\right)\right\},$$

并且 $S_m^* \in G$. 令 $W = \{\kappa_n \mid m \leqslant n \in \omega\}$. 对于 $\lambda \in W$, 令 $G_\lambda = G \cap \mathbb{Q}_{<\lambda}$, 由推论 3.28, G_λ 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\lambda}$-泛型超滤子.

固定 $\lambda \in W$. 令

$$i_{G_\lambda} : V \prec M_\lambda \cong \prod_{G_\lambda} (V, \in) \subset V[G_\lambda]$$

为相应的泛型超幂嵌入映射, 其中 $\pi_\lambda : \prod_{G_\lambda} (V, \in) \cong M_\lambda$ 是传递化映射, 因为泛型超幂 $\prod_{G_\lambda} (V, \in)$ 是有秩的. 定义 $k_\lambda : \prod_{G_\lambda} (V, \in) \to \prod_G (V, \in)$ 如下: 对于 $f \in V$, 如果 $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{Q}_{<\lambda}$, 则令

$$k_\lambda\left([\![f]\!]_{G_\lambda}\right) = [\![f]\!]_G.$$

那么, $i_G = \pi_G \circ \left(k_\lambda \circ \left(\pi_\lambda^{-1} \circ i_{G_\lambda}\right)\right)$, 并且, 如果我们令

$$Z_\lambda = \left\{ i_G(f)\left(\bigcup b\right) \;\middle|\; f : b \to V \wedge f \in V, \wedge b \in G_\lambda \right\},$$

那么, 应用塔尔斯基判定法则, 就有 $Z_\lambda \prec \pi_G\left[\prod_G (V, \in)\right]$, 并且 M_λ 是 Z_λ 的传递化, k_λ^{-1} 就是传递化映射.

对于 W 中的 $\lambda_0 < \lambda_1$, 令 $k_{\lambda_0\lambda_1} : \prod\limits_{G_{\lambda_0}} (\mathrm{V}, \in) \prec \prod\limits_{G_{\lambda_1}} (\mathrm{V}, \in)$ 为由下述等式所确定的映射：

$$k_{\lambda_0\lambda_1}\left([\![f]\!]_{G_{\lambda_0}}\right) = [\![f]\!]_{G_{\lambda_1}}.$$

那么 $i_{G_{\lambda_1}} = k_{\lambda_0\lambda_1} \circ i_{G_{\lambda_0}}$, $Z_{\lambda_0} \subset Z_{\lambda_1}$, $k_{\lambda_0\lambda_1}$ 就是恒等嵌入映射的传递化. 令

$$Z^* = \bigcup \{ Z_\lambda \mid \lambda \in W \}.$$

令 $\{(M^*, E^*), i^*, k^*_\lambda \mid \lambda \in W\}$ 为下述定向模型系统的定向极限结构：

$$\left\{ M_{\lambda_0}, i_{G_{\lambda_0}}, k_{\lambda_0\lambda_1} \;\middle|\; \lambda_0 \in W \wedge \lambda_1 \in W \wedge \lambda_0 < \lambda_1 \right\}.$$

那么 $(Z^*, E) \cong (M^*, E^*)$. 尽管 (M^*, E^*) 可能不是有秩结构, 但我们还是有

$$(R)^{M^*} = \bigcup \left\{ (\mathbb{R})^{M_\lambda} \mid \lambda \in W \right\},$$

并且对于 $\lambda \in W$,

$$(\mathbb{R})^{M_\lambda} = (\mathbb{R})^{\mathrm{V}[G_\lambda]} = (\mathbb{R})^{\mathrm{V}[G \cap \mathrm{V}_\lambda]}.$$

这样一来, $\mathrm{V}\left((\mathbb{R})^{M^*}\right)$ 是 V 的 κ-对称泛型扩张. 由于 $i_G(\delta) = \delta$, $i^*(\delta) = \delta$. 因此,

$$i^* \restriction_{L_\delta(\mathbb{R}^{\mathrm{V}})} : L_\delta\left(\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\right) \to L_\delta\left(\mathbb{R}^{M^*}\right).$$

在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 H 为 V 上的 $\mathrm{Col}(\omega, <\kappa)$-泛型超滤子来实现等式：

$$\mathbb{R}^{M^*} = \bigcup \left\{ (\mathbb{R})^{\mathrm{V}[G]} \cap \mathrm{V}[H \cap \mathrm{Col}(\omega, <\alpha)] \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\}.$$

因为 δ 在 $\mathrm{V}[H]$ 中还是可测基数 ($\mathrm{Col}(\omega, <\kappa) \in \mathrm{V}_\delta$ 是一个相对而言的小力迫构思), $\left(\mathbb{R}^{M^*}\right)^\# \in \mathrm{V}[H]$. 由此, 如果 $\xi > |\mathbb{R}|^{\mathrm{V}}$ 是一个正则基数, 那么 ξ 就是一个 $\mathbb{R}^{\mathrm{V}}$-无差别元, 以及在 $\mathrm{V}[H]$ 中, 如果 $\xi > \left|\mathbb{R}^{M^*}\right|^{\mathrm{V}[H]}$ 是一个正则基数, 那么 ξ 就是一个 $\mathbb{R}^{M^*}$-无差别元. 对于在 δ 中无界多个 V 中的全杨森基数 γ, 我们都有 $i^*(\gamma) = \gamma$, 而这些全杨森基数在 $\mathrm{V}[H]$ 中又都是正则基数. 这就有下述包含式：

$$\left(\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\right)^\# \subset \left(\mathbb{R}^{M^*}\right)^\#.$$

于是, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 就存在 $j : L\left(\mathbb{R}^{\mathrm{V}}\right) \prec L\left(\mathbb{R}^{M^*}\right)$. □

3.3.3 迭代树

在解决是否每一个投影集合都是胜负确定集合的问题过程中, 马丁和斯蒂尔给出了一种将线性迭代超幂构造推广到非线性迭代超幂迭代构造的方法. 这种基于树偏序的迭代超幂被证明是一种行之有效的方法. 迭代树不仅在解决胜负确定性问题中功勋卓著, 而且在大基数内模型的构造中也是一种基本工具. 马丁和斯蒂尔关于迭代树方法以及主要应用的文章见文献 21. 由于篇幅所限, 我们将局限在围绕满足解决胜负确定性需要的范围建立迭代树方法. 至于迭代树方法在内模型构造中的应用超出本《导引》的范围. 有兴趣的读者可参见文献 21 的 (3).

准模块

因为在解决一些特别的超幂迭代的极限模型是否有秩的问题中需要涉及一些并非整个理论 ZFC 的模型, 所以我们有必要锁定一种合适的弱一点的理论以满足那样的需求. 首先, 我们对集合论的纯语言添加一个一元函数符号 $\mathfrak{P}$ (一个在幂集公理下可以依定义引进的函数符号), 从而得到一个新语言 $\mathcal{L}_\in(\mathfrak{P})$. 其次, 称理论 ZC 的一个类模型 (M,E) 满足 $\Sigma_1(\mathfrak{P})$-映像存在原理当且仅当它的扩充结构 $(M,E,\mathfrak{P})$ 满足所有由语言 $\mathcal{L}_\in(\mathfrak{P})$ 中的 Σ_1 表达式所确定的映像存在原理实例, 其中扩充结构 $(M,E,\mathfrak{P})$ 是用 M 中的幂集运算来解释一元函数符号 $\mathfrak{P}$ 之后得到的结果. 再次, 如果 (M,E) 是 ZC 的一个类模型, $u\in M$, 称 (M,E) 满足以 u 为定义域的映像存在原理当且仅当对于集合论纯语言中的彰显自由变元的表达式

$$\varphi\left(u,x,y,z_1,\cdots,z_n\right)$$

都有

$$(M,E)\models\forall z_1\,\cdots\,\forall z_n\,\left((\forall x\in u\,\exists! y\,\varphi)\to(\exists v\,\forall x\in u\,\exists y\in v\,\varphi)\right).$$

以 u 为定义域的映像存在原理表明: 以 u 为定义域的类函数的值域一定是一个集合, 从而以 u 为定义域的类函数也就是一个集合. 最后, 我们来引进**准模块**的概念:

定义 3.25 (准模块) 一个类结构 $(M,\in,\delta)$ 是一个**准模块**当且仅当

(a) $(M,\in)$ 是 ZC 的一个传递模型;

(b) δ 是一个序数, 并且 $\delta\in M$;

(c) $(M,\in)$ 满足 $\Sigma_1(\mathfrak{P})$-映像存在原理以及以 V_δ 为定义域的映像存在原理.

21 (1) D. A. Martin and J. R. Steel, Projective determinacy, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 85(1988), no. 18, 6582-6586.

(2)—, A proof of projective determinacy, J. Amer. Math. Soc., 1989, 2, no.1: 71-125.

(3)—, Iteration trees, J. Amer. Math. Soc., 1994, 7, no.1: 1-73.

注意, 如果 $(M,\in)$ 是 ZC 的一个传递模型, 并且满足 $\Sigma_1(\mathfrak{P})$-映像存在原理, 那么

$$(M,\in)\models\forall\alpha\in\mathrm{Ord}\,\exists x\ (x=\mathrm{V}_\alpha)\,.$$

所以上述定义中 (c) 的后半部分在 (a), (b) 和 (c) 的前半部分的前提下是合适的. 同时还应当注意到, 如果 $(M,\in,\delta)$ 是一个准模块, 那么

$$(M,\in,\delta)\models\forall x\,\exists\alpha\in\mathrm{Ord}\ (x\in\mathrm{V}_\alpha)\,.$$

设 $\mathcal{M}=(M,\in,\delta)$ 为一个准模块, $E\in M$ 是一个张子. 诚如我们对 ZFC 的类模型 M 定义超幂 $\prod\limits_E^M(M,\in)$ 那样, 同样可以定义张子超幂 $\prod\limits_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$. 唯一不同的是超幂基本定理适合的范围必须将所使用的张子限制在临界点不超过 δ 的范围以内.

定理 3.43 设 $\mathcal{M}=(M,\in,\delta)$ 为一个准模块. 设 κ 以及 $\lambda>\kappa$ 是 M 中的序数, 并且 $\kappa\leqslant\delta$. 设 $E\in M$ 是 M 中的一个 (κ,λ)-张子. 令 $\varphi(v,\cdots,v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式.

设 $(a_1,f_1),\cdots,(a_n,f_n)$ 为 $\mathcal{D}_E^M$ 中的元素. 令 $b=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$. 那么

$$\begin{aligned}&\prod_E^{\mathcal{M}}(\mathcal{M},\in)\models\varphi\left[[\![(a_1,f_1)]\!]_E^M,\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]_E^M\right]\\ \leftrightarrow&\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid\mathcal{M}\models\varphi\left[\left(f_1\circ\mathrm{TY}^b_{a_1}\right)(z),\cdots,\left(f_n\circ\mathrm{TY}^b_{a_n}\right)(z)\right]\right\}\in E_b.\end{aligned}$$

证明 定理的证明是依照表达式复杂性的归纳法. 我们来探讨当 φ 是形如 $(\exists v_0\,\psi)$ 的表达式的情形, 已说明在弱理论下定理的证明与以前情形的差别所在. 为了简化记号, 让我们暂时省略掉上标或下标.

$$\begin{aligned}&\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}\models\varphi\,[[\![(a_1,f_1)]\!],\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]]\\ \leftrightarrow&\ \exists a_0\in[\lambda]^{<\omega}\,\exists f_0\in M\cap M^{[\kappa]^{|a_0|}}\ \left(\prod_E^{\mathcal{M}}\models\psi\,[[\![(a_0,f_0)]\!],\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]]\right),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\left(\prod_E^{\mathcal{M}}\models\psi\,[[\![(a_0,f_0)]\!],\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]]\right)\\ \leftrightarrow&\left(\left\{z\in[\kappa]^{|a_0\cup b|}\mid\mathcal{M}\models\psi\left[f_0\left(\mathrm{TY}^{a_0\cup b}_{a_0}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}^{a_0\cup b}_{a_n}(z)\right)\right]\right\}\in E_{a_0\cup b}\right),\end{aligned}$$

其中 $b=\bigcup\{a_k \mid 1\leqslant k\leqslant n\}$. 令 $\theta\left(\vec{a},\vec{f},b,\kappa\right)$ 为下述命题:

$$\left(\left\{z\in[\kappa]^{|a_0\cup b|}\mid \mathcal{M}\models\psi\left[f_0\left(\mathrm{TY}_{a_0}^{a_0\cup b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{a_0\cup b}(z)\right)\right]\right\}\in E_{a_0\cup b}\right).$$

那么,

$$\exists a_0\in[\lambda]^{<\omega}\,\exists f_0\in M\cap M^{[\kappa]^{|a_0|}}\,\theta\left(\vec{a},\vec{f},b,\kappa\right)$$

$$\leftrightarrow\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \exists x\in M\,\left(\mathcal{M}\models\psi\left[x,f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right)\right\}\in E_b.$$

很自然, 上述对等式的上面的命题蕴涵下面的命题; 欲见其下面的命题蕴涵上面的命题, 我们这样来分析: 因为 $\mathcal{M}$ 满足以 V_δ 为定义域的映像存在原理, 上述对等式的下面的命题意味着 M 中有一个具备下述功能的序数 α:

$$\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \exists x\in \mathrm{V}_\alpha^M\,\left(\mathcal{M}\models\psi\left[x,f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right)\right\}\in E_b.$$

集合

$$\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \exists x\in \mathrm{V}_\alpha^M\,\left(\mathcal{M}\models\psi\left[x,f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right)\right\}$$

既属于 M 也属于 E_b. 应用 M 中的选择公理, 我们就得到所求的结论.

又因为

$$\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \exists x\in M\,\left(\mathcal{M}\models\psi\left[x,f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right)\right\}\in E_b$$

$$\leftrightarrow\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \mathcal{M}\models\varphi\left[f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right\}\in E_b,$$

所以, 我们就有

$$\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}\models\varphi\left[[\![(a_1,f_1)]\!],\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]\right]$$

$$\leftrightarrow\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid \mathcal{M}\models\varphi\left[f_1\left(\mathrm{TY}_{a_1}^{b}(z)\right),\cdots,f_n\left(\mathrm{TY}_{a_n}^{b}(z)\right)\right]\right\}\in E_b.\qquad\square$$

根据定理 3.43, 我们有典型的 $(i'_E):\mathcal{M}\prec\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$. 应用通常的分析, 有下述引理:

引理 3.73 设 $\mathcal{M}=(M,\in,\delta)$ 为一个准模块. 令 $\kappa\leqslant\delta$ 以及 $\{E,\lambda\}\subset M$, 并且 E 是 $\mathcal{M}$ 中的一个 (κ,λ)-张子. 那么

(1) $\mathcal{M}\models$ “$\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 中的每一个元素都是一个集合”, 从而 $\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 中的每一个元素就是一个集合.

(2) $\mathcal{M}\models$ “$\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 是有秩的”, 从而 $\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 是有秩的.

这样一来, 如果 $\mathcal{M}=(M,\in,\delta)$ 为一个准模块, $\kappa\leqslant\delta$ 以及 $\{E,\lambda\}\subset M$, 并且 E 是 $\mathcal{M}$ 中的一个 (κ,λ)-张子, 那么我们就有唯一的

$$\pi_E^{\mathcal{M}}:\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}\cong\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)=\left(\mathrm{ult}(M,E),\in,\delta^{\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)}\right),$$

其中, $\mathrm{ult}(M,E)$ 是传递的, 从而定义

$$i_E^{\mathcal{M}}=\pi_E^{\mathcal{M}}\circ(i'_E):\mathcal{M}\prec\mathrm{ult}(\mathcal{M},E).$$

当然, 所有这些类 $\prod\limits_E^{\mathcal{M}},(i'_E),\pi_E^{\mathcal{M}},\mathrm{ult}(M,E),\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)$ 以及 $i_E^{\mathcal{M}}$ 都是 M 的类; 并且超幂 $\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)$ 自身也是一个准模块.

外来张子超幂构造

设 M 和 N 是 ZFC 的两个传递类模型. 设 $\kappa\in M\cap N$ 为它们共同的不可达基数. 设 $M\cap V_{\kappa+1}=N\cap V_{\kappa+1}$. 设 $E\in M$ 是 M 中的一个 (κ,λ)-张子. 我们如下定义 N 在 E 下的超幂 $\prod\limits_E^N(N,\in)$: 令

$$\mathcal{D}_E^N=\left\{(a,f)\;\middle|\;a\in[\lambda]^{<\omega}\ \wedge\ f\in N\ \wedge\ f:[\kappa]^{|a|}\to N\right\}.$$

对于 $(a,f),(b,g)\in\mathcal{D}_E^N$, 令

$$(a,f)\equiv_E(b,g)\leftrightarrow\left\{z\in[\kappa]^{|a\cup b|}\mid\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(z)=\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(z)\right\}\in E_{a\cup b}.$$

对于 $(a,f)\in\mathcal{D}_E^N$, 令

$$[\![(a,f)]\!]_E^N=\left\{(b,g)\in\mathcal{D}_E^N\;\middle|\;\begin{array}{l}(b,g)\equiv_E(a,f)\wedge\\\forall(c,h)\in\mathcal{D}_E^N\ ((c,h)\equiv_E(a,f)\to\mathrm{RK}(g)\leqslant\mathrm{RK}(h))\end{array}\right\}.$$

从而 $[\![(a,f)]\!]_E^N$ 是一个集合. 令 $\mathcal{D}_E^N/\equiv_E=\left\{[\![(a,f)]\!]_E^N\mid(a,f)\in\mathcal{D}_E^N\right\}$.

如下定义 $\mathcal{D}_E^N/\equiv_E$ 上的二元关系 $\in_E^N$:

$$\begin{aligned}&[\![(a,f)]\!]_E^N\in_E^N[\![(b,g)]\!]_E^N\\\leftrightarrow&\left\{z\in[\kappa]^{|a\cup b|}\mid\left(f\circ\mathrm{TY}_a^{a\cup b}\right)(z)=\left(g\circ\mathrm{TY}_b^{a\cup b}\right)(z)\right\}\in E_{a\cup b}.\end{aligned}$$

如此定义了 N 经外来张子 E 的超幂 $\prod\limits_E^N(N,\in)=(\mathcal{D}_E^N,\in_E^N)$. 尽管这样的超幂未必是有秩的, 但是我们依旧有下述瓦西基本定理:

定理 3.44 设 M 和 N 是 ZFC 的两个传递类模型. 设 $\kappa \in M \cap N$ 为它们共同的不可达基数. 设 $M \cap \mathrm{V}_{\kappa+1} = N \cap \mathrm{V}_{\kappa+1}$. 设 $E \in M$ 是 M 中的一个 (κ, λ)-张子. 令 $\varphi(v, \cdots, v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式.

设 $(a_1, f_1), \cdots, (a_n, f_n)$ 为 $\mathcal{D}_E^N$ 中的元素. 令 $b = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$. 那么

$$\prod_E^N (N, \in) \models \varphi\left[[\![(a_1, f_1)]\!]_E^N, \cdots, [\![(a_n, f_n)]\!]_E^N\right]$$
$$\leftrightarrow \left\{z \in [\kappa]^{|b|} \mid (N, \in) \models \varphi\left[\left(f_1 \circ \mathrm{TY}_{a_1}^b\right)(z), \cdots, \left(f_n \circ \mathrm{TY}_{a_n}^b\right)(z)\right]\right\} \in E_b.$$

证明 证明同定理 1.33 的证明. 详细讨论留作练习. □

因此, 我们有典型的嵌入映射 $(i')_E^N : (N, \in) \prec \prod_E^N (N, \in)$. 如果 $\prod_E^N (N, \in)$ 是有秩的, 那么用 $\mathrm{ult}(N, E)$ 来记 $\prod_E^N (N, \in)$ 的传递化, 并且用

$$\pi_E^N : \prod_E^N (N, \in) \cong \mathrm{ult}(N, E)$$

来记传递化映射; 复合映射 $i_E^N = \pi_E^N \circ (i')_E^N : (N, \in) \prec \mathrm{ult}(N, E)$ 为典型同质嵌入映射.

下面的引理揭示在外来超幂是有秩结构时, 内在超幂与外来超幂之间的吻合之处.

设 X 与 Y 为两个类, α 为一个序数. 称 X 与 Y 的**吻合度**为 α 当且仅当

$$X \cap \mathrm{V}_\alpha = Y \cap \mathrm{V}_\alpha.$$

引理 3.74 设 M 和 N 是 ZFC 的传递类模型, 并且 $M \cap \mathrm{V}_{\xi+1} = N \cap \mathrm{V}_{\xi+1}$(它们的吻合度为 $\xi + 1$). 设 $E \in M$ 在 M 中是一个 (κ, λ)-张子以及 $\xi \geqslant \kappa$. 假设超幂 $\prod_E^N (N, \in)$ 是有秩的. 那么

(a) 如果 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $f : [\kappa]^{|a|} \to \left((\xi^+)^M \cup \mathrm{V}_{\xi+1}^M\right)$, 那么

$$\pi_E^M\left([\![(a, f)]\!]_E^M\right) = \pi_E^N\left([\![(a, f)]\!]_E^N\right).$$

(b) $\forall \alpha \left(\alpha \leqslant (\xi^+)^M \to i_E^M(\alpha) = i_E^N(\alpha)\right)$; 尤其有 $i_E^M(\kappa) = i_E^N(\kappa)$.

(c) $\mathrm{ult}(M, E) \cap \mathrm{V}_{i_E^M(\xi)+1} = \mathrm{ult}(N, E) \cap \mathrm{V}_{i_E^N(\xi)+1}$; 尤其有

$$\mathrm{ult}(M, E) \cap \mathrm{V}_{i_E^M(\kappa)+1} = \mathrm{ult}(N, E) \cap \mathrm{V}_{i_E^N(\kappa)+1}.$$

证明 因为 M 与 N 的吻合度为 $\xi+1$, 所以

$$\left(\xi^{+}\right)^{M} \cup V_{\xi+1}^{M}=\left(\xi^{+}\right)^{N} \cup V_{\xi+1}^{N}.$$

从而, 对于 $n<\omega$ 而言, 模型 M 与 N 具有完全相同的从 $[\kappa]^{n}$ 到

$$\left(\xi^{+}\right)^{M} \cup V_{\xi+1}^{M}=\left(\xi^{+}\right)^{N} \cup V_{\xi+1}^{N}$$

的函数. 这就表明引理的 (a) 成立. 从而 (b) 和 (c) 也就相继得到. □

内在迭代

我们先来规范一下有关准模块迭代的一些术语. 设 (D, R) 是一个非空有顶偏序集合. 假设对于每一个 $d \in D$, M_{d} 是一个传递类, 并且

$$(\langle(M_{d}, \in) \mid d \in D\rangle, \langle j_{d, d'} \mid d \in D \wedge d' \in D \wedge d\, R\, d'\rangle)$$

是同质嵌入映射的一个有顶系统. 令 $\left(\tilde{\mathcal{M}}, \langle k_{d} \mid d \in D\rangle\right)$ 为这个有顶系统的正向极限. 如果 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的每一个元素都是一个集合, 并且它还是有秩的, 就令

$$\pi: \tilde{M} \cong(N, \in)$$

为它的传递化, 其中, N 是传递的. 此时我们称

$$((N, \in),\langle\pi \circ k_{d} \mid d \in D\rangle)$$

为这个有顶系统的**典型极限**; 称 $(N, \in)$ 为这个有顶系统的**典型极限模型**; 否则, 就没有典型极限, 也就没有典型极限模型. 当然, 如果 (D, R) 有一个 R- 极大元 d, 那么有顶系统的正向极限模型就同构于 M_{d}; 这个系统的典型极限是 $(M_{d}, \langle j_{d', d} \mid d' \in D\rangle)$, M_{d} 就是典型极限模型. 当个体结构为准模块 $(M_{d}, \in, \delta_{d})$ 时, 类似的名词也相应地有定义.

有一类迭代是我们需要区分的, 这就是**内在迭代**.

设 M 是 ZFC 的一个传递类模型, θ 是一个非零序数. M 的一个长为 θ 的**内在迭代**是具备如下性质的一个序列 $\langle E_{\alpha} \mid \alpha+1<\theta\rangle$: 存在一组传递类 $\langle M_{\alpha} \mid \alpha<\theta\rangle$ 以及一组同质嵌入映射 $\langle j_{\alpha, \beta} \mid \alpha \leqslant \beta<\theta\rangle$ 来见证下述事实:

(a) $M_{0}=M$;

(b) 如果 $\alpha+1<\theta$, 那么 $E_{\alpha} \in M_{\alpha}$ 是 M_{α} 中的一个张子;

(c) 如果 $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, 那么 $j_{\alpha, \gamma}=j_{\beta, \gamma} \circ j_{\alpha, \beta}$;

(d) 如果 $\alpha+1<\theta$, 那么 $M_{\alpha+1}=\operatorname{ult}(M_{\alpha}, E_{\alpha})$, 并且 $j_{\alpha, \alpha+1}=i_{E_{\alpha}}^{M_{\alpha}}$;

(e) 如果 $\lambda < \theta$ 是一个极限序数, 那么 $(M_\lambda, \langle j_{\alpha,\lambda} \mid \alpha < \lambda \rangle)$ 是

$$(\langle M_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle, \langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leqslant \beta < \lambda \rangle)$$

的典型极限.

注意所涉及的上述各个 M_α 以及 $j_{\alpha,\beta}$ 都是由 M 以及张子序列 $\langle E_\alpha \mid \alpha+1 < \theta \rangle$ 完全确定的. 同时需要注意的是整个张子序列 $\langle E_\alpha \mid \alpha+1 < \theta \rangle$ 并没有要求在 M 中. 这是比我们前面看到过的 V 上的迭代更具一般性的地方.

类似地, 我们也有关于准模块的内在迭代.

设 $\mathcal{M}$ 是一个准模块, θ 是一个非零序数. $\mathcal{M}$ 的一个长为 θ 的**内在迭代**是具备如下性质的一个序列 $\langle E_\alpha \mid \alpha+1 < \theta \rangle$: 存在一组准模块 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \theta \rangle$ 以及一组同质嵌入映射 $\langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leqslant \beta < \theta \rangle$ 来见证下述事实:

(a) $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$;

(b) 如果 $\alpha+1 < \theta$, 那么 $E_\alpha \in \mathrm{V}^{\mathcal{M}_\alpha}_{\delta^{\mathcal{M}_\alpha}}$ 是 $\mathcal{M}_\alpha$ 中的一个张子;

(c) 如果 $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, 那么 $j_{\alpha,\gamma} = j_{\beta,\gamma} \circ j_{\alpha,\beta}$;

(d) 如果 $\alpha+1 < \theta$, 那么 $\mathcal{M}_{\alpha+1} = \mathrm{ult}\,(\mathcal{M}_\alpha, E_\alpha)$, 并且 $j_{\alpha,\alpha+1} = i^{\mathcal{M}_\alpha}_{E_\alpha}$;

(e) 如果 $\lambda < \theta$ 是一个极限序数, 那么 $(\mathcal{M}_\lambda, \langle j_{\alpha,\lambda} \mid \alpha < \lambda \rangle)$ 是

$$(\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle, \langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leqslant \beta < \lambda \rangle)$$

的典型极限.

有时候将 ZFC 的传递类模型 $(M, \in)$ 看成一种 $\delta = \mathrm{Ord} \cap M$ 的 "准模块" 会比较方便, 比如, 上面讲的内在迭代便是下面准模块的内在迭代的一种特殊情形. 于是, 我们称 $\mathcal{M}$ 是一个**广义准模块**当且仅当它或者是一个准模块, 或者它是 ZFC 的一个传递类模型 $(M, \in)$.

现在我们来探讨广义准模块的内在迭代的有秩性问题. Michell 是首先考虑内在迭代 (当所涉及的 E_α 是它们的临界点上的正规超滤子时) 的有秩性问题的一位学者. 内在迭代之所以有一个有秩性问题, 关键就在于内在迭代序列一般不是基点模型 M_0 上可以定义出来的序列, 也就是不属于基点模型.

解决内在迭代问题的核心是下述引理:

引理 3.75 设 $\mathcal{M} = \left(M, \in, \delta^{\mathcal{M}}\right)$ 是一个广义准模块. 假设存在具备下述特点的三元组 (τ, η, δ): $\delta \leqslant \eta$ 是两个序数,

$$\tau : \mathcal{M} \prec (\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)\,.$$

设 $E \in M$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个 (κ, λ)-张子, 并且 $\kappa \leqslant \delta^{\mathcal{M}}$. 那么存在下述同质嵌入交换

图:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ & i_E^{\mathcal{M}} \downarrow & \searrow \tau \\ \mathrm{ult}(\mathcal{M}, E) & \sigma \longrightarrow & (\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)\,. \end{array}$$

□

证明 根据 τ 的同质嵌入性质, $\tau(E)$ 是 $(\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)$ 中的一个 $(\tau(\kappa), \tau(\lambda))$-张子, 因此也就是 V 上的一个 $(\tau(\kappa), \tau(\lambda))$-张子. 对于 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, 令

$$X_a = \bigcap \left\{ \tau(Y) \in (\tau(E))_{\tau(a)} \ \mid Y \in E_a \right\}.$$

由于 M 是可数的, X_a 是 $(\tau(E))_{\tau(a)}$ 中的可数个元素的交, 因此,

$$X_a \in (\tau(E))_{\tau(a)}.$$

又由于 $[\lambda]^{<\omega}$ 是可数的, 根据 $\tau(E)$ 所具备的可数完备性, 令 $h : \tau\left[[\lambda]^{<\omega}\right] \to \tau(\kappa)$ 来见证

$$\forall a \in [\lambda]^{<\omega} \ \left(h[\tau(a)] \in X_a\right).$$

我们如下定义 σ : 对于 $a \in [\lambda]^{<\omega}$ 和满足 $f : [\kappa]^{|a|} \to M$ 的 $f \in M$,

$$\sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(a, f)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right)\right) = (\tau(f))(h[\tau(a)]).$$

欲见 σ 的定义无歧义, 设 $[\![(a, f)]\!]_E^{\mathcal{M}} = [\![(b, g)]\!]_E^{\mathcal{M}}$. 那么

$$Y = \left\{ z \in [\kappa]^{|a \cup b|} \mid f\left(\mathrm{TY}_a^{a \cup b}(z)\right) = g\left(\mathrm{TY}_b^{a \cup b}(z)\right) \right\} \in E_{a \cup b}.$$

由 $X_{a \cup b}$ 的定义,

$$h[\tau(a \cup b)] \in X_{a \cup b} \subset \tau(Y).$$

这样

$$(\tau(f))\left(\mathrm{TY}_{\tau(a)}^{\tau(a \cup b)}(h[\tau(a \cup b)])\right) = (\tau(g))\left(\mathrm{TY}_{\tau(b)}^{\tau(a \cup b)}(h[\tau(a \cup b)])\right).$$

因为 $\mathrm{TY}_{\tau(a)}^{\tau(a \cup b)}(h[\tau(a \cup b)]) = h[\tau(a)]$ 以及 $\mathrm{TY}_{\tau(b)}^{\tau(a \cup b)}(h[\tau(a \cup b)]) = h[\tau(b)]$, 我们有

$$(\tau(f))(h[\tau(a)]) = (\tau(g))(h[\tau(b)]),$$

也就是

$$\sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(a, f)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right)\right) = \sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(b, g)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right)\right).$$

至于 σ 的同质嵌入特性的证明则与上述证明完全类似. 我们就省略一点空间.

最后, 我们来证明可交换性. 设 $x \in M$. 那么

$$\begin{aligned}\sigma\left(i_E^{\mathcal{M}}(x)\right) &= \sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left(\llbracket\varnothing, c_x\rrbracket_E^{\mathcal{M}}\right)\right)\\ &= c_{\tau(x)}(h[\tau(\varnothing)])\\ &= \tau(x).\end{aligned}$$

□

注意, 上述证明事实上直接给出了从 $\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 到 $(\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)$ 的同质嵌入映射. 因为 $(\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)$ 是传递的, 所以 $\prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$ 是有秩的, 从而 $\pi_E^{\mathcal{M}}: \prod_E^{\mathcal{M}}\mathcal{M} \prec \mathrm{ult}(\mathcal{M}, E)$ 存在.

下述引理将引理 3.75 推广到可数内在迭代情形之上.

引理 3.76 设 $\mathcal{M} = \left(M, \in, \delta^{\mathcal{M}}\right)$ 是一个广义准模块. 假设存在具备下述特点的三元组 (τ, η, δ): $\delta \leqslant \eta$ 是两个序数,

$$\tau: \mathcal{M} \prec (\mathrm{V}_\eta, \in, \delta).$$

设 $\theta > 0$ 是一个可数序数. 令广义准模块序列 $\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \theta\rangle$ 以及同质嵌入映射序列 $\langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leqslant \beta < \theta\rangle$ 来见证 $\langle E_\alpha \mid \alpha + 1 < \theta\rangle$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个内在迭代. 令

$$\left(\tilde{\mathcal{M}}_\theta, \langle k_{\alpha,\theta} \mid \alpha < \theta\rangle\right)$$

为

$$(\langle \mathcal{M}_\alpha \mid \alpha < \theta\rangle, \langle j_{\alpha,\beta} \mid \alpha \leqslant \beta < \theta\rangle)$$

的正向极限. 那么一定存在从 $\tilde{\mathcal{M}}_\theta$ 到 $(\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)$ 的同质嵌入映射 τ^* 以至于下述等式成立:

$$\tau^* \circ k_{0,\theta} = \tau.$$

从而正向极限模型 $\tilde{M}_\theta$ 是有秩的.

证明 因为 $\mathcal{M}$ 和 θ 都是可数的, 所以根据归纳法就可以得知每一个 M_α 都是可数的.

应用关于 $\alpha < \theta$ 的归纳法, 我们来定义嵌入映射 $\tau_\alpha: \mathcal{M}_\alpha \prec (\mathrm{V}_\eta, \in, \delta)$, 并且在定义中将确保

$$\forall \beta < \alpha\ (\tau_\alpha \circ j_{\beta,\alpha} = \tau_\beta).$$

令 $\tau_0 = \tau$.

假设 $\alpha = \gamma + 1$. 应用引理 3.75 于参数组 $(\mathcal{M}_\gamma, E_\gamma, \tau_\gamma)$. 引理 3.75 为我们提供了一个所需要的 τ_α, 并且它具备所要求的交换图性质, 从而归纳假设的条件得以满足.

现在假设 $\alpha < \theta$ 是一个极限序数. 对于 $\beta < \alpha$, $\mathcal{M}_\beta = \left(M_\beta, \in, \delta^{\mathcal{M}_\beta}\right)$. 令 $x \in M_\alpha$. 令 $\beta < \alpha$ 以及 $y \in M_\beta$ 来实现等式 $x = j_{\beta,\alpha}(y)$. 定义

$$\tau_\alpha(x) = \tau_\beta(y).$$

应用正向极限的定义可知 τ_α 的定义毫无歧义, 并且

$$\forall \beta < \alpha \left(\tau_\alpha \circ j_{\beta,\alpha} = \tau_\beta\right).$$

最后, τ^* 的定义类似上述极限 α 的情形. 令 $\tilde{M}_\theta = \left(\tilde{M}_\theta, \tilde{\in}_\theta, \tilde{\delta}_\theta\right)$. 设 $x \in \tilde{M}_\theta$. 令 $\alpha < \theta$ 以及 $y \in M_\alpha$ 来实现等式 $x = k_{\alpha,\theta}(y)$. 定义

$$\tau^*(x) = \tau_\alpha(y).$$

同样地, 根据正向极限的定义以及 $\langle \tau_\alpha \mid \alpha < \theta \rangle$ 的定义可知 τ^* 的定义毫无歧义, 并且具备所要的性质.

由于 $\tau^* : \tilde{M}_\theta \prec (V_\eta, \in \delta)$, $(V_\eta, \in \delta)$, 所以 $\tilde{M}_\theta$ 是有秩的. □

下面的定理解决集合论论域自身的内在迭代有秩性问题.

定理 3.45　V 的任何一个内在迭代都有一个有秩的正向极限模型.

证明　设 $\mathcal{I}$ 是 V 的一个内在迭代. 欲得一个矛盾, 假设这个内在迭代 $\mathcal{I}$ 的正向极限模型并非有秩. 令 δ 足够大以至于 $\mathcal{I} \in V_\delta$. 令 $\eta > \delta$ 具备下述特点: $(V_\eta, \in, \delta)$ 是一个准模块, 并且

$$(V_\eta, \in, \delta) \models \text{“}\mathcal{I}\text{ 的正向极限模型并非有秩”}.$$

设 $(X, \in, \delta) \prec (V_\eta, \in, \delta)$, 并且 $\mathcal{I} \in X$, X 可数. 令 $\pi : X \cong M$ 为 X 的传递化. 令 $\mathcal{J} = \pi(\mathcal{I})$. 那么 $(M, \in, \pi(\delta))$ 是一个可数准模块, 并且

$$\pi^{-1} : (M, \in, \pi(\delta)) \prec (V_\eta, \in, \delta).$$

进一步地有

$$(M, \in, \pi(\delta)) \models \text{“}\mathcal{J}\text{ 的正向极限模型并非有秩”}.$$

根据有秩特性的内外不变特性, $\mathcal{J}$ 的正向极限并非有秩. 可是这与引理 3.76 的结论相矛盾. □

对于准模块我们也可以定义外来张子的超幂构造. 称准模块 $\mathcal{M} = \left(M, \in, \delta^{\mathcal{M}}\right)$ 和准模块 $\mathcal{N} = \left(N, \in, \delta^{\mathcal{N}}\right)$ 的吻合度至少为 α 当且仅当 $\alpha \leqslant \min\left\{\delta^{\mathcal{M}}, \delta^{\mathcal{N}}\right\}$, 并且 M 和 N 的吻合度至少为 α. 类似地, 我们也可以定义广义准模块之间的吻合度. 我们关注两个准模块之间的吻合度的主要动机是为了解决用一个准模块中的张子到另

外一个准模块去构造超幂的合适性问题. 假设 κ 是一个序数, 并且广义准模块 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的吻合度至少为 $\kappa+1$. 假设 E 是 M 中的一个 (κ,λ)-张子. 因为对于 $n<\omega$,

$$(\mathfrak{P}([\kappa]^n))^M = (\mathfrak{P}([\kappa]^n))^N,$$

所以可以用 E 来定义超幂 $\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$, 正像我们前面对类模型定义的那样. 由于两种定义完全一样, 我们就不在此处多费笔墨了. 同样地, 我们有下述基本定理:

定理 3.46 设 $\mathcal{M}=(M,\in,\delta^{\mathcal{M}})$ 和 $\mathcal{N}=\left(N,\in,\delta^{\mathcal{N}}\right)$ 为广义准模块. 设 κ 以及 $\lambda>\kappa$ 是 M 中的序数, 并且 $\kappa<\delta^{\mathcal{N}}$. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的吻合度至少为 $\kappa+1$. 设 $E\in M$ 是 M 中的一个 (κ,λ)-张子. 令 $\varphi(v,\cdots,v_n)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 设 $(a_1,f_1),\cdots,(a_n,f_n)$ 为 $\mathcal{D}_E^{\mathcal{N}}$ 中的元素. 令 $b=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$. 那么

$$\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}\models\varphi\left[[\![(a_1,f_1)]\!]_E^{\mathcal{N}},\cdots,[\![(a_n,f_n)]\!]_E^{\mathcal{N}}\right]$$
$$\leftrightarrow\left\{z\in[\kappa]^{|b|}\mid\mathcal{N}\models\varphi\left[\left(f_1\circ\mathrm{TY}_{a_1}^b\right)(z),\cdots,\left(f_n\circ\mathrm{TY}_{a_n}^b\right)(z)\right]\right\}\in E_b.$$

依据定理 3.46, 我们就有典型嵌入映射 $(i')_E^{\mathcal{N}}:\mathcal{N}\prec\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$, 并且超幂 $\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ 中的每一个元素都是一个集合. 当然, 这个超幂也可能不是有秩的. 如果它是有秩的, 并且 $\mathcal{N}$ 是一个准模块 $(N,\in,\delta)$, 那么就有唯一的

$$\pi_E^{\mathcal{N}}:\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}\cong\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)=\left(\mathrm{ult}(N,E),\in,\delta^{\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)}\right),$$

其中 $\mathrm{ult}(N,E)$ 是传递的. 如果它是有秩的, 并且 $\mathcal{N}=(N,\in)$, 那么就有唯一的

$$\pi_E^{\mathcal{N}}=\pi_E^N:\prod_E^{\mathcal{N}}\mathcal{N}\cong\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)=(\mathrm{ult}(N,E),\in),$$

其中 $\mathrm{ult}(N,E)$ 是传递的. 无论哪一种情形下, 都有

$$i_E^{\mathcal{N}}=\pi_E^{\mathcal{N}}\circ(i')_E^{\mathcal{N}}:\mathcal{N}\prec\mathrm{ult}(\mathcal{N},E).$$

当 $\mathcal{N}=(N,\in)$ 时, 我们依旧用 i_E^N 来代替 $i_E^{\mathcal{N}}$. 当然, $\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)$ 是一个广义准模块, 并且它是一个准模块当且仅当 $\mathcal{N}$ 是一个准模块.

下面的引理是引理 3.74 的相似伙伴.

引理 3.77 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个广义准模块, 并且 $M\cap\mathrm{V}_{\xi+1}=N\cap\mathrm{V}_{\xi+1}$(它们的吻合度至少为 $\xi+1$). 设 $E\in M$ 在 $\mathcal{M}$ 中是一个 (κ,λ)-张子以及 $\xi\geqslant\kappa\leqslant\delta^{\mathcal{N}}$. 假设超幂 $\prod_E^N(N,\in)$ 是有秩的. 那么

(a) 如果 $a \in [\lambda]^{<\omega}$, $f : [\kappa]^{|a|} \to \left((\xi^+)^{\mathcal{M}} \cup V_{\xi+1}^{\mathcal{M}}\right)$, 那么

$$\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right) = \pi_E^{\mathcal{N}}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{N}}\right);$$

(b) $\forall \alpha \left(\alpha \leqslant (\xi^+)^{\mathcal{M}} \to i_E^{\mathcal{M}}(\alpha) = i_E^{\mathcal{N}}(\alpha)\right)$; 尤其有 $i_E^{\mathcal{M}}(\kappa) = i_E^{\mathcal{N}}(\kappa)$;

(c) $\mathrm{ult}(\mathcal{M}, E) \cap V_{i_E^{\mathcal{M}}(\xi)+1} = \mathrm{ult}(\mathcal{N}, E) \cap V_{i_E^{\mathcal{N}}(\xi)+1}$; 尤其有

$$\mathrm{ult}(\mathcal{M}, E) \cap V_{i_E^{\mathcal{M}}(\kappa)+1} = \mathrm{ult}(\mathcal{N}, E) \cap V_{i_E^{\mathcal{N}}(\kappa)+1}.$$

据此, 如果 $\mathcal{M}$ 是一个广义准模块, E 是 $\mathcal{M}$ 中的一个 (κ, λ)-张子, 那么对于任意合乎要求 $i_E^{\mathcal{N}}$ 存在的广义准模块 $\mathcal{N}$, 都有

$$\mathrm{Crit}(E) = \mathrm{Crit}\left(i_E^{\mathcal{M}}\right) = \mathrm{Crit}\left(i_E^{\mathcal{N}}\right).$$

下面的引理是上面的引理的自然推论.

引理 3.78　设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个广义准模块, 并且 $M \cap V_{\xi+1} = N \cap V_{\xi+1}$(它们的吻合度至少为 $\xi+1$). 设 $E \in M$ 在 $\mathcal{M}$ 中是一个 (κ, λ)-张子以及 $\xi \geqslant \kappa \leqslant \delta^{\mathcal{N}}$. 假设超幂 $\prod_E^N (N, \in)$ 是有秩的. 令 $\rho = (\mathrm{qiangdu}(E))^{\mathcal{M}}$ 为张子 E 在 $\mathcal{M}$ 中的强度. 那么

(1) $\prod_E^N (N, \in)$ 与 $\mathcal{M}$ 的吻合度为 ρ;

(2) $V_{\rho+1}^{\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)} \subset V_{\rho+1}^{\mathcal{M}}$.

证明　根据张子强度的定义以及超幂的定义, 有

$$V_{\rho+1}^{\mathrm{ult}(\,EM)} \subset V_{\rho+1}^{\mathcal{M}}.$$

根据引理 3.77 中的 (c) 以及不等式 $\rho \leqslant i_E^{\mathcal{M}}(\kappa)$, 有

$$V_{\rho+1}^{\mathrm{ult}(\mathcal{N},E)} = V_{\rho+1}^{\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)}.$$

综合起来就得到结论中的不等式. □

迭代树与交错链

定义 3.26 (迭代树序)　设 θ 是一个非零序数. θ 上的一个严格偏序 T 是 θ 的一个**迭代树序**当且仅当下述命题成立:

(i) 对于 $\beta < \theta$, T 在集合 $\{\alpha \mid \alpha T \beta\}$ 上的限制是一个秩序;

(ii) T 遵从序数的自然序, 即如果 $\alpha T \beta$, 那么 $\alpha < \beta$;

(iii) 0 是 θ 的 T-最小节点, 即如果 $0 < \alpha < \theta$, 那么 $0\ T\ \alpha$;

(iv) 对于 $\alpha < \theta$, α 是一个后继序数当且仅当 α 也是一个 T-**后继**, 当且仅当 α 有一个 T-**前置**(β 是 α 的 T-**前置**当且仅当 $\beta T \alpha$ 并且集合 $\{\gamma \mid \beta T \gamma \wedge \gamma T \alpha\}$ 是空集);

(v) 对于所有的极限序数 $\lambda < \theta$, $\forall \beta < \alpha \exists \gamma < \lambda\ (\beta < \gamma \wedge \gamma T \lambda)$.

当 T 是 θ 的一个树序时, 对于 $\alpha+1<\theta$, 我们用记号 $(\alpha+1)_T^-$ 来记 $\alpha+1$ 的 T-直接前置.

自然, 非零序数 θ 上的自然的序数序 $<$ 是它上面的一个迭代树序. 我们当然希望关心其他并非线性的迭代树序. 比如, 下面的迭代树序将是我们重点关注的一种.

例 3.11 对于 $m,n\in\omega$, 令

$$m\,T\,n\leftrightarrow(m=0<n\vee(\exists k\in\omega\,(m+2(k+1)=n))).$$

那么 T 是 ω 上的一个树序.

定义 3.27 (迭代树) 一个三元组 $\mathcal{T}=(\mathcal{M},T,\langle E_\alpha\mid\alpha+1<\theta\rangle)$ 被称为一棵**迭代树**当且仅当存在一个由一组广义准模块 $\langle\mathcal{M}_\alpha\mid\alpha<\theta\rangle$ 和一组同质嵌入映射 $\langle j_{\alpha,\beta}\mid\alpha T\beta<\theta\rangle$ 组成的具备下述特点的系统:

(a) T 是 θ 的一个迭代树序;

(b) $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$;

(c) 对于 $\alpha<\theta$, $\mathcal{M}_\alpha$ 是一个广义准模块, $E_\alpha\in\mathrm{V}_{\delta\mathcal{M}_\alpha}^{\mathcal{M}_\alpha}$ 是 $\mathcal{M}_\alpha$ 中的一个张子;

(d) 对于 $\alpha\,T\,\beta\,T\,\gamma<\theta$, 总有交换图 $j_{\alpha,\gamma}=j_{\beta,\gamma}\circ j_{\alpha,\beta}$;

(e) 对于 $\alpha+1<\theta$, 总有下述命题成立:

(i) $\mathcal{M}_\alpha$ 与 $\mathcal{M}_{(\alpha+1)_T^-}$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)+1$;

(ii) $\mathcal{M}_{\alpha+1}=\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}_{(\alpha+1)_T^-},E_\alpha\right)$;

(iii) $j_{(\alpha+1)_T^-,\alpha+1}=i_{E_\alpha}^{\mathcal{M}_{(\alpha+1)_T^-}}$;

(f) 对于每一个极限序数 $\lambda<\theta$, 二元组 $(\mathcal{M}_\lambda,\langle j_{\alpha,\lambda}\mid\alpha\,T\,\lambda\rangle)$ 是二元组

$$(\langle\mathcal{M}_\alpha\mid\alpha\,T\,\lambda\rangle,\langle j_{\alpha,\beta}\mid\alpha\,T\,\beta\,T\,\lambda\vee\alpha=\beta\,T\,\lambda\rangle)$$

的典型极限, 其中对于 $\alpha<\theta$, $j_{\alpha,\alpha}$ 是从 $\mathcal{M}_\alpha$ 到它自身的恒等嵌入映射;

注意, 由迭代树的定义可知任何一棵迭代树 $\mathcal{T}=(\mathcal{M},T,\langle E_\alpha\mid\alpha+1<\theta\rangle)$ 中的每一个 $\mathcal{M}_\alpha$ 和 $j_{\alpha,\beta}$ 都完全由三元组自身中的广义准模块 $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$、迭代树序 $T^{\mathcal{T}}$、张子序列 $\left\langle E_\alpha^{\mathcal{T}}\mid\alpha+1<\theta\right\rangle$ 所确定; 并且对于每一个 $\alpha+1<\theta$, 都有 $\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)<\delta^{\mathcal{M}_{(\alpha+1)_T^-}}$, 从而前面的相关引理, 比如引理 3.77 和引理 3.78, 在迭代树情形中就适用.

当 $\mathcal{T}=(\mathcal{M},T,\langle E_\alpha\mid\alpha+1<\theta\rangle)$ 是一棵迭代树时, 称 $\mathcal{T}$ 是在 $\mathcal{M}$ 之上的一棵迭代树, 或者说 $\mathcal{M}$ 是迭代树 $\mathcal{T}$ 的基点模型, 或者说 $\mathcal{M}$ 是迭代树 $\mathcal{T}$ 的出发点; 称 θ 为迭代树 $\mathcal{T}$ 的**高度**, 或者**长度**, 并且用记号 $\mathrm{lh}(\mathcal{T})$ 来标记. 当 M 是 ZFC 的传递类模型, $\mathcal{T}$ 是在 $(M,\in)$ 上的一棵迭代树时, 就简单地称 $\mathcal{T}$ 为 M 上的一棵迭代树. 总之, 在不至于带来混淆的前提下, 我们常常会使用一些简单术语来表述.

注意, 迭代树是前面所定义的内在迭代的一种一般化. 如果 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个内在迭代, 那么 $(\mathcal{M},<,\mathcal{I})$ 就是一棵以序数的自然序为迭代树序的 $\mathcal{M}$ 上的一棵迭代树, 并且此时的迭代树序是一个秩序.

就一棵迭代树而言, 所涉及的广义准模块之间的吻合度直接依赖于迭代树构造中所使用的张子的强度 (见定义 1.20). 这种依赖关系由下面的引理表明.

定义 3.28　设 $\mathcal{T}$ 是一棵在 $\mathcal{M}$ 上的迭代树, 以及 $\alpha<\beta\leqslant \mathrm{lh}(\mathcal{T})$. 令

$$\rho^{\mathcal{T}}(\alpha,\beta)=\min\left\{\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma^{\mathcal{T}}\right)^{\mathcal{M}_\gamma^{\mathcal{T}}}\right)\mid \alpha\leqslant\gamma<\beta\right\}.$$

引理 3.79　设 $\mathcal{T}$ 是一棵在 $\mathcal{M}$ 上的迭代树, 以及 $\alpha<\beta\leqslant \mathrm{lh}(\mathcal{T})$. 那么

(1) $\mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}}$ 与 $\mathcal{M}_\beta^{\mathcal{T}}$ 的吻合度至少为 $\rho^{\mathcal{T}}(\alpha,\beta)$;

(2) $V_{\rho^{\mathcal{T}}(\alpha,\beta)+1}^{\mathcal{M}_\beta^{\mathcal{T}}}\subset V_{\rho^{\mathcal{T}}(\alpha,\beta)+1}^{\mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}}}$.

证明　设 $\mathcal{T}$ 是一棵在 $\mathcal{M}$ 上的迭代树, 以及 $\alpha<\beta\leqslant \mathrm{lh}(\mathcal{T})$. 在固定此 mT 的前提下, 在下面的讨论中, 我们省略上标 $\mathcal{T}$ 以简化表述.

固定 $\alpha<\mathrm{lh}(\mathcal{T})$. 我们对 $\alpha<\beta<\mathrm{lh}(\mathcal{T})$ 进行归纳.

设 $\beta=\gamma+1(\gamma\geqslant\alpha)$. 令 $\xi=\beta_T^-$. 根据迭代树的定义, $\mathcal{M}_\beta=\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}_\xi,E_\gamma\right)$. 根据引理 3.78 中的 (1), $\mathcal{M}_\beta$ 与 $\mathcal{M}_\gamma$ 的吻合度为 E_γ 在 $\mathcal{M}_\gamma$ 中的强度 $(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma\right))^{\mathcal{M}_\gamma}$. 如果 $\alpha=\gamma$, 那么

$$\rho(\alpha,\beta)=\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma\right)\right)^{\mathcal{M}_\gamma}.$$

如果 $\alpha<\gamma$, 那么

$$\rho(\alpha,\beta)=\min\left\{\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma\right)\right)^{\mathcal{M}_\gamma},\rho(\alpha,\gamma)\right\}.$$

根据归纳假设, $\mathcal{M}_\alpha$ 与 $\mathcal{M}_\gamma$ 的吻合度为 $\rho(\alpha,\gamma)$. 无论哪一种情形, (1) 都成立. 如果 $\alpha=\gamma$, 或者 $\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma\right)\right)^{\mathcal{M}_\gamma}\leqslant\rho(\alpha,\gamma)$, 根据引理 3.78 中的 (2), 以及当 $\alpha<\gamma$ 时的归纳假设, 我们有

$$V^{\mathcal{M}_\beta}_{(\mathrm{QiangDu}(E_\gamma))^{\mathcal{M}_\gamma}+1}\subset V^{\mathcal{M}_\gamma}_{(\mathrm{QiangDu}(E_\gamma))^{\mathcal{M}_\gamma}+1}\subseteq V^{\mathcal{M}_\alpha}_{(\mathrm{QiangDu}(E_\gamma))^{\mathcal{M}_\gamma}+1}.$$

如果 $\alpha<\gamma$ 且 $\rho(\alpha,\gamma)\leqslant\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\gamma\right)\right)^{\mathcal{M}_\gamma}$, 那么引理 3.78 中的 (2) 以及归纳假设给出

$$V^{\mathcal{M}_\beta}_{\rho(\alpha,\gamma)+1}\subseteq V^{\mathcal{M}_\gamma}_{\rho(\alpha,\gamma)+1}\subset V^{\mathcal{M}_\alpha}_{\rho(\alpha,\gamma)+1}.$$

因此, 无论如何都有 (2) 成立.

现在假设 β 是一个极限序数.

我们先来证明下述集合是有限的：

$$\{\gamma<\beta\mid(\gamma+1)\,T\,\beta\wedge\mathrm{Crit}\left(E_\gamma\right)\leqslant\rho(\alpha,\beta)\}.$$

假设不然, 上述集合中有一个单调递增序列 $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots$. 对于每一个 $m < \omega$, $\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m}) \leqslant \rho(\alpha,\beta)$. 于是, 对于每一个 $m < \omega$,

$$\begin{aligned} j_{(\gamma_m+1)_T^-,(\gamma_{m+1}+1)_T^-}\,(\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m})) &\geqslant j_{(\gamma_m+1)_T^-,(\gamma_m+1)}\,(\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m}))\\ &= i_{E_{\gamma_m}}^{\mathcal{M}_{(\gamma_m+1)_T^-}}\,(\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m}))\\ &= i_{E_{\gamma_m}}^{\mathcal{M}_{\gamma_m}}\,(\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m}))\\ &\geqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_{\gamma_m}))^{\mathcal{M}_{\gamma_m}}\\ &\geqslant \rho(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

因为 $j_{(\gamma_m+1)_T^-,(\gamma_{m+1}+1)_T^-}\,(\mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m})) > \mathrm{Crit}\,(E_{\gamma_m})$, 所以根据上述不等式, 我们有

$$j_{(\gamma_m+1)_T^-,(\gamma_{m+1}+1)_T^-}\,(\rho(\alpha,\beta)) > \rho(\alpha,\beta).$$

由此得到一个序数的无穷单调递降序列:

$$\left\langle j_{(\gamma_m+1)_T^-,\beta}\,(\rho(\alpha,\beta)) \;\middle|\; m\in\omega \right\rangle.$$

这就是一个矛盾.

根据上面的有限性以及集合 $\{\gamma<\beta \mid \gamma\,T\,\beta\}$ 在 β 中的 $\in$- 无界性, 令 $\alpha < \gamma_0\,T\,\beta$ 来见证下列不等式:

$$\forall\gamma\;((\gamma_0<\gamma \wedge (\gamma+1)\,T\,\beta) \to (\mathrm{Crit}\,(E_\gamma) > \rho(\alpha,\beta)))\,.$$

这样, $\mathrm{Crit}\,(j_{\gamma_0,\beta}) > \rho(\alpha,\beta)$. 于是, $\mathcal{M}_\beta$ 与 $\mathcal{M}_{\gamma_0}$ 的吻合度为

$$\rho(\alpha,\beta)+1 = \rho\,(\alpha,\gamma_0)+1.$$

由关于 (α,γ_0) 的 (1) 和 (2), 我们就得到关于 (α,β) 的 (1) 和 (2). □

推论 3.30 设 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_\alpha \mid \alpha+1<\mathrm{lh}(\mathcal{T})\rangle)$ 是一棵迭代树. 设 $\alpha+1<\mathrm{lh}(\mathcal{T})$. 那么

(a) $\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)+1 \leqslant \rho^{\mathcal{T}}\left((\alpha+1)_T^-,\alpha\right)$;

(b) $\forall\beta\,\left(\left((\alpha+1)_T^- \leqslant \beta < \alpha\right) \to \left(\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)+1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_\beta))^{\mathcal{M}_\beta^{\mathcal{T}}}\right)\right)$.

证明 根据迭代树定义中的 (e), $\mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}}$ 与 $\mathcal{M}_{(\alpha+1)_T^-}$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)+1$. 根据引理 3.79 中的 (2), 它们之间的吻合度至多为 $\rho^{\mathcal{T}}\left((\alpha+1)_T^-,\alpha\right)$. 所以,

$$\mathrm{Crit}\,(E_\alpha)+1 \leqslant \rho^{\mathcal{T}}\left((\alpha+1)_T^-,\alpha\right).$$

设 $\left((\alpha+1)_T^- \leqslant \beta < \alpha\right)$. 根据函数 ρ 的定义 (定义 3.28),

$$\rho^{\mathcal{T}}\left((\alpha+1)_T^-,\alpha\right) \leqslant \left(\mathrm{QiangDu}\left(E_\beta^{\mathcal{T}}\right)\right)^{\mathcal{M}_\beta^{\mathcal{T}}}.$$

关于 β 的结论 (a) 就给出关于 β 的结论 (b). □

上面我们对迭代树上的模型之间的吻合度进行了分析. 这对于构造迭代树是必要的. 一般而言, 构造迭代树, 关键因素有三个: 第一个是每一步上的张子 E_α 的选择; 第二个是保证后继步上的迭代超幂的有秩性; 第三个是保证极限步上的极限模型的有秩性. 我们仅仅涉及高度不超过 $\omega+1$ 的迭代树, 因而不会对一般情形进行讨论. 因此, 我们的重点是解决有限步构造中的张子选择问题以及 ω 步内的张子选择问题以及所构造的迭代模型的有秩性问题. 对于张子的选择, 我们将依赖单步引理 (引理 3.86). 后面的具体构造中将明确这句话的含义. 下面先来解决有限迭代树中的迭代模型的有秩问题.

有限迭代树有秩性问题

我们的重点是考虑 ZFC 的模型的有限迭代问题. 我们希望证明对于这样的迭代树, 有秩性一般都有保障. 抽象的有秩性证明的策略如下: 假设有一个反例, 一棵准模块 $\mathcal{M}$ 上的迭代树 $\mathcal{T}$ 不能遵从有秩性, 同时会有一个同质嵌入映射

$$\tau : \mathcal{M} \prec \mathcal{M}^* \subset \mathcal{N} = (\mathrm{V}, \in, \delta)\,.$$

在这样输入数据的基础上, 我们来构造 $\mathcal{N}$ 上的一棵迭代树 $\mathcal{S}$ 以及同质嵌入映射序列

$$\tau_\alpha : \mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}} \prec \mathcal{M}_\alpha^* \subset \mathcal{N}_\alpha^{\mathcal{S}}.$$

讨论的关键是这些映射所具备的 “吻合度”. 为此, 我们先明确这个名词的含义:

定义 3.29　*设 $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ 为准模块. 设 $\tau : \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ 以及 $\tau' : \mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$. 设 η 为一个序数. 称 τ 与 τ' 的吻合度至少为 η 当且仅当*

(a) *$\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}'$ 的吻合度至少为 η;*

(b) $\tau\left(\mathrm{V}_\eta^{\mathcal{M}}\right) = \tau'\left(\mathrm{V}_\eta^{\mathcal{M}'}\right)$;

(c) $\tau\restriction_{\mathrm{V}_\eta^{\mathcal{M}}} = \tau'\restriction_{\mathrm{V}_\eta^{\mathcal{M}'}}$.

下述引理是构造那些所需要的映射 τ_α 的主要工具 (这个引理在文献 22 中被命名为 “平移引理”).

引理 3.80　*设 $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ 为准模块. 设 $\tau : \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ 以及 $\tau' : \mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$. 假设 τ 与 τ' 的吻合度至少为 $\kappa+1$. 假设 $E \in M$ 是 $\mathcal{M}$ 中的一个以 κ 为临界点的张子. 假设 $\prod_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'} \mathcal{N}'$ 是有秩的. 那么 $\prod_{E}^{\mathcal{M}'} \mathcal{M}'$ 是有秩的, 并且进一步地有下述事实: 如果*

$$\sigma : \mathrm{ult}\,(\mathcal{M}', E) \to \mathrm{ult}\,(\mathcal{N}', \tau(E))$$

22 D. Martin and J. Steel, Iteration Trees, J. Amer. Math. Soc., 1994, 7, no.1: 1-73.

是由等式

$$\sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left(\llbracket(a,f)\rrbracket_E^{\mathcal{M}'}\right)\right)=\pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left(\llbracket(\tau(a),\tau'(f))\rrbracket_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right)$$

所确定的映射, 那么 σ 的定义毫无歧义, σ 与 τ 的吻合度至少为 $(\mathrm{QiangDu}(E))^{\mathcal{M}}$, 并且有下述交换图:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{ult}\,(\mathcal{M}',E) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{ult}\,(\mathcal{N}',\tau(E))\\ \uparrow i_E^{\mathcal{M}'} & & \uparrow i_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\\ \mathcal{M}' & \xrightarrow{\tau'} & \mathcal{N}'.\end{array}$$

证明 对于 $\llbracket(a,f)\rrbracket_E^{\mathcal{M}'}\in\prod_E^{\mathcal{M}'}\mathcal{M}'$, 令

$$\tilde{\sigma}\left(\llbracket(a,f)\rrbracket_E^{\mathcal{M}'}\right)=\llbracket(\tau(a),\tau'(f))\rrbracket_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}.$$

欲证: $\tilde{\sigma}$ 的定义毫无歧义, 并且 $\tilde{\sigma}:\prod_E^{\mathcal{M}'}\mathcal{M}'\prec\prod_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\mathcal{N}'$.

如果我们能够证明这个命题, 那么根据假设, $\prod_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\mathcal{N}'$ 是有秩的, 因此, $\tilde{\sigma}:\prod_E^{\mathcal{M}'}\mathcal{M}'$ 也就是有秩的; 从而 σ 的定义就是毫无歧义的, 并且是同质嵌入映射.

我们来证明 $\tilde{\sigma}$ 的定义毫无歧义. 设 $\llbracket(a,f)\rrbracket_E^{\mathcal{M}'}=\llbracket(b,g)\rrbracket_E^{\mathcal{M}'}$. 那么

$$X=\left\{z\in[\kappa]^{|a\cup b|}\mid f\left(\mathrm{TY}_a^{a\cup b}(z)\right)=g\left(\mathrm{TY}_b^{a\cup b}(z)\right)\right\}\in E_{a\cup b}.$$

这个集合 $X\in\mathrm{V}_{\kappa+1}^{\mathcal{M}'}$. 根据关于吻合度的假设, 我们有

$$X\in\mathrm{V}_{\kappa+1}^{\mathcal{M}}\wedge\tau(X)=\tau'(X).$$

τ 的同质性保证 $\tau(X)\in(\tau(E))_{\tau(a\cup b)}$. 依据这些事实以及 τ' 的同质性, 我们有下列集合

$$\tau'(X)=\left\{z\in[\tau'(\kappa)]^{|a\cup b|}\mid\tau'(f)\left(\mathrm{TY}_{\tau(a)}^{\tau(a\cup b)}(z)\right)=\tau'(g)\left(\mathrm{TY}_{\tau(b)}^{\tau(a\cup b)}(z)\right)\right\}$$

也属于 $(\tau(E))_{\tau(a\cup b)}$. 因此, $\llbracket(\tau(a),\tau'(f))\rrbracket_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}=\llbracket(\tau(b),\tau'(g))\rrbracket_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}$.

关于 $\tilde{\sigma}$ 是同质嵌入映射的证明就留作练习.

现在我们来计算 σ 和 τ 的吻合度.

根据引理 3.78, $\mathrm{ult}(\mathcal{M}',E)$ 与 $\mathcal{M}$ 的吻合度为 E 在 $\mathcal{M}$ 中的强度 $(\mathrm{Qiang\ Du}\ (E))^{\mathcal{M}}$. 我们需要验证 σ 与 τ 的吻合度为 $\gamma=(\mathrm{QiangDu}(E))^{\mathcal{M}}$. 为此, 我们必须证明

$$\sigma\restriction\left(\mathrm{V}_\gamma^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\cup\left\{\mathrm{V}_\gamma^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\right\}\right)=\tau\restriction\left(\mathrm{V}_\gamma^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\cup\left\{\mathrm{V}_\gamma^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\right\}\right).$$

由于 $\gamma \leqslant i_E^{\mathcal{M}}(\kappa)$, 加上引理 3.77 所提供的等式

$$i_E^{\mathcal{M}'}(\kappa) = i_E^{\mathcal{M}}(\kappa) \wedge V_{i_E^{\mathcal{M}'}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)} = V_{i_E^{\mathcal{M}}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)},$$

以及 $V_{i_E^{\mathcal{M}}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}(\mathcal{M},E)} \subset M$, 我们证明下述等式即可:

$$\sigma \restriction \left(V_{i_E^{\mathcal{M}'}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\right) = \tau \restriction \left(V_{i_E^{\mathcal{M}'}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}\right).$$

$V_{i_E^{\mathcal{M}'}(\kappa)+1}^{\mathrm{ult}\left(\mathcal{M}',E\right)}$ 中的元素都形如 $\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)$, 其中

$$f : [\kappa]^{|a|} \to V_{\kappa+1}^{\mathcal{M}'}.$$

考虑 $\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)$. 由定义,

$$\sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)\right) = \pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left([\![(\tau(a),\tau'(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right).$$

由于 f 可以被 $V_{\kappa+1}^{\mathcal{M}'}$ 中的一个元素所编码记录, 我们有 $\tau(f) = \tau'(f)$. 于是,

$$\pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left([\![(\tau(a),\tau'(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right) = \pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left([\![(\tau(a),\tau(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right).$$

由于 τ 与 τ' 的吻合度为 $\kappa+1$, 尤其是 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{N}'$ 的吻合度为 $\tau(\kappa)+1$, 根据引理 3.77, 我们有

$$\pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left([\![(\tau(a),\tau(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right) = \pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}}\left([\![(\tau(a),\tau(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}}\right).$$

由 τ 的同质性,

$$\pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}}\left([\![(\tau(a),\tau(f))]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}}\right) = \tau\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right)\right).$$

因为 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}'$ 的吻合度为 $\kappa+1$, 所以再次应用引理 3.77, 有

$$\tau\left(\pi_E^{\mathcal{M}}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}}\right)\right) = \tau\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)\right).$$

综合上面的系列等式, 我们就得到

$$\sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)\right) = \tau\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(a,f)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)\right).$$

最后, 我们来证明交换图命题. 设 x 在 $\mathcal{M}'$ 的论域中. 那么

$$\begin{aligned}
\sigma\left(i_E^{\mathcal{M}'}(x)\right) &= \sigma\left(\pi_E^{\mathcal{M}'}\left([\![(\varnothing,c_x)]\!]_E^{\mathcal{M}'}\right)\right) \\
&= \pi_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left([\![(\varnothing,c_{\tau'(x)})]\!]_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\right) \\
&= i_{\tau(E)}^{\mathcal{N}'}\left(\tau'(x)\right).
\end{aligned}$$

□

现在我们来解决有限迭代树的有秩性问题.

定理 3.47 设 $n<\omega$.

(1) 设 $\mathcal{T}$ 是准模块 $\mathcal{M}$ 上的一棵高度为 $n+1$ 的迭代树. 假设 $\tau:\mathcal{M}\prec(\mathrm{V}_\nu,\in\delta)$, 其中 ν 和 δ 是两个序数. 假设 $n^*<n$ 以及 E 是 $\mathcal{M}_n^{\mathcal{T}}$ 中的一个张子, 并且 $\mathrm{Crit}(E)<\rho^{\mathcal{T}}(n^*,n)$. 那么 $\prod_E^{\mathcal{M}_{n^*}^{\mathcal{T}}}\mathcal{M}_{n^*}^{\mathcal{T}}$ 是有秩的.

(2) 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{N}=(\mathrm{V},\in)$ 上的一棵高度为 $n+1$ 的迭代树. 假设 $n'<n$ 以及 E 是 $\mathcal{N}_n^{\mathcal{S}}$ 中的一个张子, 并且 $\mathrm{Crit}(E)<\rho^{\mathcal{S}}(n',n)$. 那么 $\prod_E^{\mathcal{N}_{n'}^{\mathcal{S}}}\mathcal{N}_{n'}^{\mathcal{S}}$ 是有秩的.

证明 首先, 我们来证明 $(1)_n\Rightarrow(2)_n$. 假设 $\mathcal{S}$, n', F 见证 $(2)_n$ 不成立. 取 δ 足够大以至于迭代树 $\mathcal{S}$ 上所有的张子 $E_m^{\mathcal{S}}$ 以及 F 都在 V_δ 中. 令 $\nu>\delta$ 足够大以至于 $\mathcal{M}=(\mathrm{V}_\nu,\in,\delta)$ 是一个准模块, 并且

$$\left((i')_E^{\mathcal{N}_{n'}^{\mathcal{S}}}\right)\left(j_{0,n}^{\mathcal{S}}(\mathrm{V}_\nu)\right)$$

并非有秩. 那么 $\left(\mathcal{M},S,\left\langle E_m^{\mathcal{S}}\mid m<n\right\rangle\right)$ 是 $\mathcal{M}$ 上的一棵高度为 $n+1$ 的迭代树, 其中 S 是迭代树 $\mathcal{S}$ 上的迭代树序. 于是, 迭代树 $\left(\mathcal{M},S,\left\langle E_m^{\mathcal{S}}\mid m<n\right\rangle\right)$, 与 $\tau=\mathrm{Id}$, $n^*=n'$, 以及 $E=F$ 一起就构成 $(1)_n$ 的反例.

现在假设存在一个 $n<\omega$ 以至于 $(1)_n$ 不成立. 设 n 是满足情况的最小反例. 设 $\mathcal{T}$ 是准模块 $\mathcal{M}$ 上的一棵高度为 $n+1$ 的迭代树

$$(\mathcal{M},T,\langle E_m\mid m<n\rangle).$$

假设 $\tau:\mathcal{M}\prec(\mathrm{V}_\nu,\in\delta)$, 其中 ν 和 δ 是两个序数. 假设 $n^*<n$ 以及 E 是 $\mathcal{M}_n^{\mathcal{T}}$ 中的一个张子, 并且 $\mathrm{Crit}(E)<\rho^{\mathcal{T}}(n^*,n)$. 但是 $\prod_E^{\mathcal{M}_{n^*}^{\mathcal{T}}}\mathcal{M}_{n^*}^{\mathcal{T}}$ 并非有秩.

令 η 为一个足够大的极限序数以至于迭代树 $\mathcal{T}\in\mathrm{V}_\eta$. 令 $X\prec(\mathrm{V}_\eta,\in)$ 可数, 并且 $\{\mathcal{T},E\}\subset X$. 令 $\pi:(X,\in)\cong(M',\in)$. 那么

$$\tau\circ\left(\pi^{-1}\restriction_{\pi(\mathcal{M})}\right):\pi(\mathcal{M})\prec(\mathrm{V}_\nu,\in,\delta),$$

并且 $\pi(\mathcal{T}),n^*,\pi(E)$ 一起见证 $(1)_n$ 不成立. 这时, $\pi(M)$ 的论域是一个可数集合. 因此, 我们可以不失一般性地假设 $\mathcal{M}$ 的论域 M 是一个可数集合.

我们现在来构造 $\mathcal{N}=(\mathrm{V},\in,\delta)$ 上的一棵高度为 $n+1$ 的迭代树 $\mathcal{S}$ 以及找到 $\mathcal{N}_n^{\mathcal{S}}$ 中的一个张子 F 来见证超幂 $\prod_F^{\mathcal{N}_n^{\mathcal{S}}}\mathcal{N}_n^{\mathcal{S}}$ 并非有秩. 这便是一个矛盾.

我们要构造的迭代树 $\mathcal{S}$ 的迭代树序还是迭代树 $\mathcal{T}$ 的迭代树序 T, 即令 $S=T$. 在构造 $\mathcal{S}$ 的同时, 我们也对 $m\leqslant n$ 构造嵌入映射

$$\tau_m:\mathcal{M}_m\prec\left(\mathrm{V}_{\nu_m}^{\mathcal{N}_m},\in,\delta_m\right),$$

其中, $\nu_m = j^{\mathcal{S}}_{0,m}, \delta_m = j^{\mathcal{S}}_{0,m}(\delta)$. 我们要构造的迭代树 $\mathcal{S}$ 将是

$$(\mathcal{N}, S, \langle \tau_m (E_m) \mid m < n \rangle).$$

我们用 Q_m 来记 $\mathrm{V}^{\mathcal{N}_m}_{\nu_m}$ 以及用 $\mathcal{Q}_m$ 来记 $\left(\mathrm{V}^{\mathcal{N}_m}_{\nu_m}, \in, \delta_m\right)$. 重要的是将确保

$$\forall m \leqslant n \ (\tau_m \in N_m).$$

这是得到矛盾的关键.

令 $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} = (\mathrm{V}, \in, \delta)$ 以及 $\delta_0 = \delta, \nu_0 = \nu$ 和 $\tau_0 = \tau$.

设 $m < n$ 并且对于每一个 $k \leqslant m$, 已经定义了 $\mathcal{N}_k = (\mathcal{N}_k, \in, \delta_k)$ 以及

$$\tau_k : \mathcal{M}_k \prec \mathcal{Q}_k = (Q_k, \in, \delta_k) = \left(\mathrm{V}^{\mathcal{N}_k}_{\nu_k}, \in, \delta_k\right),$$

并且已经确保下述几点:

(a) $(\mathcal{N}, S \restriction_{m+1}, \langle \tau_k (E_k) \mid k < m \rangle)$ 是 $\mathcal{N}$ 上的一棵高度为 $m+1$ 的迭代树, 并且对于 $k \leqslant m$, 它的第 k 个模型是广义准模块 $\mathcal{N}_k$ 以及 $\tau_k \in N_k$;

(b) 对于所有的 $k < n$, 如果 $(k+1)^-_T \leqslant m \leqslant k$, 那么映射 $\tau_{(k+1)^-_T}$ 与 τ_m 的吻合度为 $\mathrm{Crit}\,(E_k) + 1$;

(c) 如果 $n^* \leqslant m$, 那么 τ_{n^*} 与 τ_m 的吻合度为 $\mathrm{Crit}(E) + 1$.

τ_m 的同质性蕴涵着 $\tau_m (E_m)$ 是准模块 $\mathcal{Q}_m$ 中的一个张子, 因此也就是 $\mathcal{N}_m$ 中的一个张子.

如果到此为止我们可以证明下述命题:

$$(m+1)^-_T < m \to \mathrm{Crit}\,(\tau_m (E_m)) < \rho^{\mathcal{S}} \left((m+1)^-_T, m\right),$$

那么, 根据 n 的极小性, 我们就可以推导出超幂

$$\prod_{\tau_m(E_m)}^{\mathcal{N}_{(m+1)^-_T}} \mathcal{N}_{(m+1)^-_T}$$

是有秩的. 根据引理 3.79, 证明上述命题便对等于证明模型 $\mathcal{N}_{(m+1)^-_T}$ 与模型 $\mathcal{N}_m$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(\tau_m (E_m)) + 1$. 可是, 这个命题是我们的归纳假设中条件 (b) 的一个推论: 映射 $\tau_{(m+1)^-_T}$ 与 τ_m 的吻合度为 $\mathrm{Crit}\,(\tau_m (E_m)) + 1$. 所以, 超幂 $\prod_{\tau_m(E_m)}^{\mathcal{N}_{(m+1)^-_T}} \mathcal{N}_{(m+1)^-_T}$ 是有秩的.

令 $\mathcal{N}_{m+1} = \mathrm{ult}\left(\mathcal{N}_{(m+1)^-_T}, \tau_m (E_m)\right)$. 因为 $E_m \in \mathrm{V}^{\mathcal{M}_m}_{\delta_m}$, 所以

$$\tau_m (E_m) \in \mathrm{V}^{\mathcal{Q}_m}_{\delta_m} = \mathrm{V}^{\mathcal{N}_m}_{\delta_m}.$$

于是, $\left(\mathcal{N}_0, T\restriction_{(m+2)}, \langle\tau_k\left(E_k\right) \mid k<(m+1)\rangle\right)$ 是 $\mathcal{N}_0$ 上的一棵高度为 $(m+2)$ 的迭代树.

置 $\nu_{m+1}=i_{\tau_m\left(E_m\right)}^{\mathcal{N}_{(m+1)_T^-}}\left(\nu_{(m+1)_T^-}\right)$ 以及 $\delta_{m+1}=i_{\tau_m\left(E_m\right)}^{\mathcal{N}_{(m+1)_T^-}}\left(\delta_{(m+1)_T^-}\right)$. 现在我们有

$$\operatorname{ult}\left(\mathcal{Q}_{(m+1)_T^-}, \tau_m\left(E_m\right)\right)=\left(\mathrm{V}_{\nu_{m+1}}^{\mathcal{N}_{m+1}}, \in, \delta_{m+1}\right).$$

这样, 可以用以下参数替换的方式来应用引理 3.80.

以这里的 $\mathcal{M}_m$ 替代那里的 $\mathcal{M}$; 以 $\mathcal{M}_{(m+1)_T^-}$ 替代那里的 $\mathcal{M}'$; 以 $\mathcal{Q}_m$ 替代那里的 $\mathcal{N}$; 以 $\mathcal{Q}_{(m+1)_T^-}$ 替代那里的 $\mathcal{N}'$; 以 τ_m 替代那里的 τ; 以 $\tau_{(m+1)_T^-}$ 替代那里的 τ'; 以 $\operatorname{Crit}\left(E_m\right)$ 替代那里的 κ; 以 E_m 替代那里的 E.

这样, 应用引理 3.80 就给我们一个嵌入映射

$$\sigma: \mathcal{M}_{m+1} \prec \operatorname{ult}\left(\mathcal{Q}_{(m+1)_T^-}, \tau_m\left(E_m\right)\right)=\mathcal{Q}_{m+1},$$

并且 σ 与 τ_m 的吻合度至少为 E_m 在 $\mathcal{M}_m$ 中的强度 $(\operatorname{QiangDu}\left(E_m\right))^{\mathcal{M}_m}$.

假设 $(k+1)_T^- \leqslant m<k<n$. 我们关于 m 的归纳假设 (b) 保证 $\tau_{(k+1)_T^-}$ 与 τ_m 的吻合度至少为 $\operatorname{Crit}\left(E_k\right)+1$. 根据推论 3.30, 有

$$\operatorname{Crit}\left(E_k\right)+1 \leqslant\left(\operatorname{QiangDu}\left(E_m\right)\right)^{\mathcal{M}_m}.$$

因此, σ 与 $\tau_{(k+1)_T^-}$ 的吻合度至少为 $\operatorname{Crit}\left(E_k\right)+1$.

上述分析就明确了对于 $k<n$,

$$\left((k+1)_T^-<m+1 \leqslant k\right) \rightarrow\left(\tau_{(k+1)_T^-} \text{与}\, \sigma \,\text{的吻合度至少是}\, \operatorname{Crit}\left(E_k\right)+1\right).$$

因此, 如果我们置 $\tau_{m+1}=\sigma$, 那么关于 $(m+1)$ 的归纳假设 (b) 就会得到满足. 剩下的是如果这样设置了, 条件 (c) 是否也得到满足.

现在设 $n^*<m+1$. 根据不等式

$$\operatorname{Crit}(E)+1 \leqslant \rho^{\mathcal{T}}\left(n^*, n\right) \leqslant\left(\operatorname{QiangDu}\left(E_m\right)\right)^{\mathcal{M}_m},$$

以及我们关于 m 的归纳假设条件 (c), 我们得到 τ_{n^*} 与 σ 的吻合度至少为 $\operatorname{Crit}(E)+1$. 因此, 如果我们置 $\tau_{m+1}=\sigma$, 那么关于 $m+1$ 的归纳假设条件 (c) 也得到满足.

可是, 我们还不能置 σ 为 τ_{m+1}, 因为最为关键的问题是 σ 可能不在 $\mathcal{N}_{m+1}$ 中. 为了解决这个问题, 令

$$\mu(m)=\sup \left\{\operatorname{Crit}\left(E_m\right) \mid(k+1)_T^- \leqslant m<k<n\right\}.$$

令

$$\mu'(m)= \begin{cases}\mu(m) & \text{若 } m<n^*, \\ \max \{\mu(m), \operatorname{Crit}(E)\} & \text{若 } n^* \leqslant m.\end{cases}$$

现在我们的任务是寻找一个具备下述特点的 $\bar{\tau}:\mathcal{M}_{m+1}\prec\mathcal{Q}_{m+1}$：

$$\bar{\tau}\upharpoonright\left(\mathrm{V}_{\mu'(m)+1}^{\mathcal{M}_{m+1}}\right)=\sigma\upharpoonright\left(\mathrm{V}_{\mu'(m)+1}^{\mathcal{M}_{m+1}}\right)\wedge,\bar{\tau}\in N_{m+1}.$$

如果这个任务得以完成, 那么 $\bar{\tau}$ 与 σ 的吻合度至少为 $\mu'(m)+1$, 我们便可以置

$$\tau_{m+1}=\bar{\tau},$$

从而完成我们构造中的归纳步骤.

因为 n 是有限的, 无论是 $\mu(m)$ 还是 $\mu'(m)$ 都是在一个有限的序数集合上求上确界, 而这个有限集合中的每一个序数都严格小于 $(\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m}$, 所以

$$\mu'(m)+1\leqslant(\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m}.$$

令

$$\chi=\sigma\upharpoonright\left(\mathrm{V}_{\mu'(m)+1}^{\mathcal{M}_{m+1}}\right)=\tau_m\upharpoonright\left(\mathrm{V}_{\mu'(m)+1}^{\mathcal{M}_{m+1}}\right).$$

因为 $\tau_m\in N_m$, 所以 $\chi\in N_m$. 所有的 $\mathcal{M}_k$ 的论域 M_k 都是可数传递集合; 由于 $\mathrm{Crit}\left(j_{0,m+1}^{\mathcal{S}}\right)$ 是一个可测基数, 所有这些 M_ℓ 都属于每一个 $\mathcal{N}_k\,(k\leqslant m+1)$ 并且在其中为可数传递集合. 现在 $\mu'(m)$ 或者是 0 或者是一个无穷序数. 对于无穷序数 α 来说, $\mathrm{V}_{\alpha+1}$ 的可数子集都可以被 $\mathrm{V}_{\alpha+1}$ 中的某个元素所编码记录. 函数 χ 以 M_{m+1} 的一个子集合为定义域, 因此它可以由 $\mathrm{V}_{\mu'(m)}^{\mathcal{N}_m}$ 的某个子集合所编码记录, 而集合 $\mathrm{V}_{\mu'(m)}^{\mathcal{N}_m}$ 在 $\mathcal{N}_m$ 中是可数的, 因此函数 χ 可以由 $\mathrm{V}_{\mu'(m)}^{\mathcal{N}_m}$ 的某个元素所编码记录. 因为 $\mathcal{N}_m$ 与 $\mathcal{N}_{m+1}$ 的吻合度至少为 $\mu'(m)+1$, 所以 χ 是 $\mathbb{N}_{m+1}$ 中的一个元素.

令 $\langle a_i\mid i<\omega\rangle\in N_{m+1}$ 为 M_{m+1} 的一个列表. 令 U 为由所有具备下述特点的 $u\in(Q_{m+1})^{<\omega}$ 所构成的树:

(i) $\forall i<\mathrm{dom}(u)\ (a_i\in\mathrm{dom}(\chi)\rightarrow u(i)=\chi\,(a_i))$;

(ii) 对于所有的表达式 $\varphi\,(v_1,\cdots,v_\ell)$, 以及所有的 $(i_1,\cdots,i_\ell)\in\mathrm{dom}(u)^\ell$,

$$\mathcal{M}_{m+1}\models\varphi\,[a_{i_1},\cdots,a_{i_\ell}]\leftrightarrow\mathcal{Q}_{m+1}\models\varphi\,[u\,(i_1)\,,\cdots,u\,(i_\ell)].$$

由于函数 $\omega\ni i\mapsto\sigma\,(a_i)$ 是树 U 上的一根无穷树枝, 根据有秩特性的内外不变特点, 在 N_{m+1} 中就有一根树 U 的无穷树枝 f 存在. 取这样一根树枝 $f\in N_{m+1}\cap[U]$. 函数

$$\forall i<\omega\ (M_{m+1}\ni a_i\mapsto f(i)\in Q_{m+1})$$

就是所寻求的 $\bar{\tau}:\mathcal{M}_{m+1}\prec\mathcal{Q}_{m+1}$ 以至于 $\bar{\tau}\in N_{m+1}$ 并且 $\chi\subset\bar{\tau}$.

这就完成了我们的递归构造.

由于 E 是 $\mathcal{M}_n$ 中的一个张子, 我们知道 $\tau_n(E)$ 是 $\mathcal{Q}_n$ 中的一个张子, 从而也是 $\mathcal{N}_n$ 中的一个张子.

为完成证明, 我们从事实 $\mathcal{N} \models$ "$\tau_n(E)$ 具备可数完备性" $\left(这与超幂 \prod_{\tau_n(E)}^{\mathcal{N}_n} \mathcal{N}_n\right.$ 有秩对等$\left.\right)$ 出发来得出一个矛盾.

令 $\kappa = \mathrm{Crit}(E)$. 根据假设, 超幂 $\prod_{E}^{\mathcal{M}_{n^*}} \mathcal{M}_{n^*}$ 并非有秩. 令

$$\cdots \in_E^{\mathcal{M}_{n^*}} [\![(a_2, f_2)]\!]_E^{\mathcal{M}_{n^*}} \in_E^{\mathcal{M}_{n^*}} [\![(a_1, f_1)]\!]_E^{\mathcal{M}_{n^*}} \in_E^{\mathcal{M}_{n^*}} [\![(a_0, f_0)]\!]_E^{\mathcal{M}_{n^*}}.$$

不失一般性, 我们可以假设 $\forall i < \omega\ (a_i \subseteq a_{i+1})$. 对于 $i < \omega$, 令

$$X_{i+1} = \left\{z \in [\kappa]^{|a_{i+1}|} \mid f_{i+1}(z) \in f_i\left(\mathrm{TY}_{a_i}^{a_{i+1}}(z)\right)\right\},$$

以及令 $X_0 = [\kappa]^{|a_0|}$. 于是 $X_0 \in E_{a_0}$, 以及根据定理 3.46,

$$\forall i < \omega\ \left(X_{i+1} \in E_{a_{i+1}}\right).$$

由于 τ_n 是同质映射,

$$\forall i < \omega\ \left(\tau_n\left(X_i\right) \in \left(\tau_n(E)\right)_{\tau_n(a_i)}\right).$$

彻底可数集合 M_n 的所有子集合都在 N_n 中, 于是, 两个序列 $\langle a_i \mid i < \omega\rangle$ 以及 $\langle X_i \mid i < \omega\rangle$ 都在 N_n 中. 而 τ_n 也在 N_n 中, 因此,

$$\langle \tau_n\left(a_i\right) \mid i < \omega\rangle \in N_n \wedge \langle \tau_n\left(X_i\right) \mid i < \omega\rangle \in N_n.$$

令 $b = \bigcup\{\tau_n\left(a_i\right) \mid i < \omega\}$. 由于 $\tau_n(E)$ 在 $\mathcal{N}_n$ 中是可数完备的, 令 $h : b \to \tan_n(\kappa)$ 来见证下述事实:

$$\forall i < \omega\ \left(h\left[\tau_n\left(a_i\right)\right] \in \tau_n\left(X_i\right)\right).$$

由于 $\mathcal{M}_n$ 与 $\mathcal{M}_{n^*}$ 的吻合度为 $\rho^{\mathcal{T}}\left(n^*, n\right) \geqslant \kappa + 1$, 所有的 $X_i \in M_{n^*}\,(i < \omega)$. 根据 τ_{n^*} 的同质性,

$$\forall i < \omega, \forall z \in \tau_{n^*}\left(X_i\right)\ \left(\left(\tau_{n^*}\left(f_{i+1}\right)\right)(z) \in \left(\tau_{n^*}\left(f_i\right)\right)\left(\mathrm{TY}_{a_i}^{a_{i+1}}(z)\right)\right).$$

又因为 τ_n 与 τ_{n^*} 的吻合度至少为 $\kappa + 1$, 所以

$$\forall i < \omega, \forall z \in \tau_n\left(X_i\right)\ \left(\left(\tau_{n^*}\left(f_{i+1}\right)\right)(z) \in \left(\tau_{n^*}\left(f_i\right)\right)\left(\mathrm{TY}_{a_i}^{a_{i+1}}(z)\right)\right).$$

于是,

$$\forall i < \omega, \left(\left(\tau_{n^*}\left(f_{i+1}\right)\right)\left(h\left[\tau_n\left(a_{i+1}\right)\right]\right) \in \left(\tau_{n^*}\left(f_i\right)\right)\left(h\left[\tau_n\left(a_i\right)\right]\right)\right).$$

可是, 这与 $\mathcal{N}_{n^*}$ 是有秩的相矛盾. □

无穷树枝极限模型有秩问题

我们的目标是要构造长度为 ω 的交错链, 并且根据需要控制交错链的两根树枝所确定的极限模型的有秩性. 所以, 我们就需要对无穷树枝所确定的极限模型的有秩性问题进行仔细分析. 首先, 正式引入无穷迭代树的树枝概念.

定义 3.30 设 $\theta \geqslant \omega$ 是一个序数. 设 T 是 θ 上的一个迭代树偏序.

(1) θ 的一个非空子集 b 是 T 的一根**树枝**当且仅当

(i) b 没有 $\in$- 最大元;

(ii) $(b, T\cap(b\times b))$ 是一个线性有序集合;

(iii) 如果 $\beta\in b$ 并且 $\alpha\,T\,\beta$, 那么 $\alpha\in b$.

(2) 如果 θ 是一个极限序数, T 是 θ 上的一个迭代树偏序, b 是 T 的一根树枝, 那么称 b 是 T 的一根**无界树枝 (参天树枝、共尾树枝)** 当且仅当 b 是 θ 的一个无界子集.

(3) 如果 $\mathcal{T}$ 是一棵迭代树, 并且 T 就是 $\mathcal{T}$ 的迭代树偏序, b 是 T 的一根树枝, 那么就称 b 为迭代树 $\mathcal{T}$ 的一根树枝.

(4) 如果 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_\alpha \mid \alpha+1<\theta\rangle)$ 是一棵在 $\mathcal{M}$ 上的高度为 θ 的迭代树, b 是 $\mathcal{T}$ 的一根树枝, 我们用记号

$$\left(\tilde{\mathcal{M}}_b^{\mathcal{T}}, \left\langle j_{\alpha,b}^{*\mathcal{T}} \;\middle|\; \alpha\in b\right\rangle\right)$$

来记

$$\left(\mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}}, \left\langle j_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}} \;\middle|\; \alpha\,T\,\beta\in b\right\rangle\right)$$

的正向极限; 并且称 b 是迭代树 $\mathcal{T}$ 的一个**有秩树枝**当且仅当极限模型 $\tilde{\mathcal{M}}_b^{\mathcal{T}}$ 是有秩的; 当 b 是 $\mathcal{T}$ 的一个有秩树枝时, 我们用记号

$$\left(\mathcal{M}_b^{\mathcal{T}}, \left\langle j_{\alpha,b}^{\mathcal{T}} \;\middle|\; \alpha\in b\right\rangle\right)$$

来记

$$\left(\mathcal{M}_\alpha^{\mathcal{T}}, \left\langle j_{\alpha,\beta}^{\mathcal{T}} \;\middle|\; \alpha\,T\,\beta\in b\right\rangle\right)$$

的正向极限.

例 3.12 设 C 是例 3.11 中定义在 ω 上的迭代树偏序. 令

$$\text{Even} = \{2n \mid n<\omega\} \ \wedge\ \text{Odd} = \{0\}\cup\{2n+1 \mid n<\omega\}.$$

那么 Even 和 Odd 就是 C 的两根参天树枝; 并且 C 无其他树枝.

我们不讨论高度 $\theta>\omega$ 的迭代树的参天树枝的存在性以及有秩性问题, 尽管这两个问题在一般的大基数内模型理论中特别重要, 因为篇幅限制决定了我们只关

注高度不超过 ω 的迭代树. 下面来分析一下由这样的迭代树的树枝所提供的极限模型在什么条件下是有秩的, 在什么条件下是无秩的.

引理 3.81 设 $\langle \mathcal{M}_n \mid n < \omega\rangle$ 是广义准模块的一个序列. 对于 $m \leqslant n < \omega$, 令 $j_{m,n} : \mathcal{M}_m \prec \mathcal{M}_n$, 并且假设这些映射构成一个交换图序列, 即

$$\forall m < \omega\, \forall n < \omega\, \forall k < \omega\ (m \leqslant n \leqslant k \to (j_{m,k} = j_{n,k} \circ j_{m,n})).$$

还假设对于所有的 $n < \omega$, $j_{0,n}\left[\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}_0}\right]$ 在 $\mathcal{M}_n$ 的序数中无界. 令

$$\left(\tilde{\mathcal{M}}, \langle j_n^* \mid n < \omega\rangle\right)$$

为 $(\mathcal{M}_n, \langle j_{m,n} \mid m \leqslant n < \omega\rangle)$ 的正向极限. 那么下述命题对等:

(a) $\tilde{\mathcal{M}}$ 是无秩的;

(b) 存在一个具备下述特点的序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega\rangle$:

(i) $\forall n \in \omega$ (ξ_n 是 $\mathcal{M}_n$ 中的一个序数);

(ii) $\forall m < \omega\, \forall n < \omega\ (m < n \to j_{m,n}(\xi_m) > \xi_n)$.

证明 (b) $\Rightarrow$ (a). 令序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega\rangle$ 为 (b) 所提供. 那么 $\langle j_n^*(\xi_n) \mid n < \omega\rangle$ 就是极限模型 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的一个序数的无穷单调递降序列.

(a) $\Leftarrow$ (b). 设 $\tilde{\mathcal{M}}$ 是无秩模型. 如果 $\langle x_i \mid i < \omega\rangle$ 是 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的在 $\tilde{\mathcal{M}}$ 的属于关系 $\in^{\tilde{\mathcal{M}}}$ 下的单调递降序列, 那么 $\left\langle \mathrm{RK}^{\tilde{\mathcal{M}}}(x_i) \,\middle|\, i < \omega\right\rangle$ 就是 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的序数的单调递降序列. 因为 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的每一个序数都可以写成下述形式: 它是由某个自然数 n 和某个在 $\mathcal{M}_n$ 中的序数 γ 在映射 j_n^* 下的像 $j_n^*(\gamma)$, 所以我们可以假设存在两个具备下述关联特性的序列 $\langle n_i \mid i < \omega\rangle$ 以及 $\langle \gamma_i \mid i < \omega\rangle$:

(i) $\forall i < \omega$ (γ_i 是 $\mathcal{M}_{n_i}$ 中的一个序数);

(ii) 序列 $\left\langle j_{n_i}^*(\gamma_i) \,\middle|\, i < \omega\right\rangle$ 是 $\tilde{\mathcal{M}}$ 中的序数的单调递降无穷序列.

注意, 如果有无穷多个 n_i 彼此相等, 那么必有无穷多个 γ_i 同属某个 $\mathcal{M}_n$, 从而 $\mathcal{M}_n$ 中就会有一个序数的无穷单调递降序列. 于是, 我们可以假设序列 $\langle n_i \mid i < \omega\rangle$ 是一个单调递增的序列. 又由于 $j_{0,n_0}\left[\mathrm{Ord}^{\mathcal{M}_0}\right]$ 在 $\mathcal{M}_{n_0}$ 的序数中是无界的, 我们可以不失一般性地假设 $n_0 = 0$. 另外, 如有必要, 用 $\omega \times \gamma_i$ 替换 γ_i, 我们可以假设每一个 γ_i 都是极限序数. 这样一来, 对于 $i < \omega$ 以及 $n_i \leqslant n < n_{i+1}$, 令

$$\xi_n = j_{n_i,n}(\gamma_i) + n_{i+1} - n.$$

于是, 序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega\rangle$ 就见证了 (b) 成立. □

受引理 3.81 的启示, 我们可以引进一个事关如何控制交错链的树枝所确定的极限模型能否根据需要有秩或无秩的概念: **连续无秩**.

定义 3.31 (连续无秩) 称广义准模块 $\mathcal{M}$ 上的一棵高度为 ω 的迭代树

$$\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_n \mid n < \omega \rangle)$$

是**连续无秩**的当且仅当存在一个具备下述特点的序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega \rangle$:

(i) $\forall n < \omega \ \left(\xi_n \in M_n^{\mathcal{T}} \text{ 是} \mathcal{M}_n^{\mathcal{T}} \text{ 中的序数}\right)$;

(ii) $\forall m < \omega \, \forall n < \omega \ \left(m \, T \, n \to j_{m,n}^{\mathcal{T}}(\xi_m) > \xi_n\right)$.

注意, 一棵连续无秩的迭代树不可能有一根有秩树枝, 因为如果 b 是 T 的一根树枝, 那么 $\left\langle j_{n,b}^{*\mathcal{T}}(\xi_n) \,\middle|\, n < \omega \right\rangle$ 就是极限模型 $\tilde{\mathcal{M}}_b^{\mathcal{T}}$ 中一个无穷单调递降序数序列.

下面的引理给出连续无秩迭代树的例子.

引理 3.82 设 $\mathcal{T}$ 是 V 上的一棵高度为 ω 的迭代树, 并且 $\mathcal{T}$ 没有树枝, 那么 $\mathcal{T}$ 就是一棵连续无秩的迭代树.

证明 令 T 为迭代树 $\mathcal{T}$ 的迭代树偏序. 令

$$T^* = \{(m, n) \in \omega \times \omega \mid n \, T \, m\}.$$

那么, T 没有树枝就对等于 T^* 是一个有秩关系. 对于 $m < \omega$, 应用 T^*-递归定义 ξ_m 如下:

$$\xi_m = \sup\{\xi_n + 1 \mid n \, T^* \, m\} = \sup\{\xi_n + 1 \mid m \, T \, n\}.$$

对于 $m \, T \, n$, 有

$$j_{m,n}^{\mathcal{T}}(\xi_m) \geqslant \xi_m > \xi_n.$$

这个序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega \rangle$ 就见证了 $\mathcal{T}$ 连续无秩. □

由此看来, 我们还需要适当地修改连续无秩的概念以有利于实现既定目标.

定义 3.32 设 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_n \mid n < \omega \rangle)$ 是广义准模块 $\mathcal{M}$ 上的一棵高度为 ω 的迭代树. 设 b 是 T 的一根树枝. 称 $\mathcal{T}$ 是 b **之外连续无秩**的当且仅当存在一个具备下述特点的序列 $\langle \xi_n \mid n < \omega \rangle$:

(i) $\forall n < \omega \ \left(\xi_n \in M_n^{\mathcal{T}} \text{ 是} \mathcal{M}_n^{\mathcal{T}} \text{ 中的序数}\right)$;

(ii) $\forall m < \omega \, \forall n < \omega \ \left(m \, T \, n \to \left(\begin{cases} j_{m,n}^{\mathcal{T}}(\xi_m) > \xi_n & \text{若 } n \notin b, \\ j_{m,n}^{\mathcal{T}}(\xi_m) = \xi_n & \text{若 } n \in b \end{cases}\right)\right)$.

这会是我们所需要的那一类迭代树的基本性质. 我们将根据解决问题的需要构造在某一根树枝 b 之外连续无秩的迭代树 $\mathcal{T}$, 并且保证由树枝 b 所确定的极限模型一定是有秩的. 下面的引理帮助我们确保这一点.

引理 3.83 设 $\mathcal{T}$ 是一棵高度为 ω 的迭代树以及 b 是 T 的一根树枝. 假设 $\mathcal{T}$ 在 b 之外是连续无秩的, 并且 b 又是一根无秩树枝. 那么 $\mathcal{T}$ 一定是一棵连续无秩的迭代树.

证明 设序列 $\langle \xi_i \mid i < \omega \rangle$ 见证 $\mathcal{T}$ 在树枝 b 之外是连续无秩的序列. 因为树枝 b 是无秩的, 令 $\langle \gamma_m \mid m < \omega \rangle$ 为引理 3.81 所提供的序列. 对于 $i < \omega$, 令

$$\xi_i^* = \begin{cases} \xi_i & \text{若 } i \notin b, \\ \xi_i + \gamma_i & \text{若 } i \in b. \end{cases}$$

那么序列 $\langle \xi_i^* \mid i < \omega \rangle$ 就见证了 $\mathcal{T}$ 是连续无秩的. □

在对无穷迭代树的分析中, 我们将依赖一个看起来技术味道比较浓的性质.

定义 3.33 设 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_n \mid n < \omega \rangle)$ 为一棵高度为 ω 的迭代树. 对于 $n < \omega$, 令

$$\mu^{\mathcal{T}}(n) = \sup\left\{\mathrm{Crit}\,(E_m) \mid (m+1)_T^- \leqslant n < m\right\}.$$

称 $\mathcal{T}$ 是一棵**足够强的迭代树**当且仅当对于每一个 $m < \omega$ 都有

$$\mu^{\mathcal{T}}(m) + 1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m}.$$

定理 3.48 设 $\mathcal{M}$ 为一个准模块. 假设 $\tau : \mathcal{M} \prec (\mathrm{V}_\nu, \in, \delta)$. 那么不存在 $\mathcal{M}$ 上的高度为 ω 的连续无秩的足够强的迭代树.

证明 设 $\mathcal{M}$ 为一个准模块以及 $\tau : \mathcal{M} \prec (\mathrm{V}_\nu, \in, \delta)$. 假设定理结论不成立. 设 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_n \mid n < \omega \rangle)$ 是一棵足够强的迭代树, 并且设 $\langle \xi_n \mid n < \omega \rangle$ 为一个序列见证 $\mathcal{T}$ 的一棵连续无秩的迭代树. 我们来寻找一个矛盾.

和定理 3.47 的证明一样, 可以假设 M 是可数传递集合. 令 $\mathcal{N} = (\mathrm{V}, \in, \delta)$. 我们来构造一棵迭代树 $\mathcal{S} = (\mathcal{N}, T, \langle F_m \mid m < \omega \rangle)$. 事实上, 迭代树 $\mathcal{S}$ 的构造是通过对于 $m < \omega$ 构造下列集合来实现的：

(a) 一个不可数的准模块 $\bar{\mathcal{N}}_m$.

(b) $\psi_m : \bar{\mathcal{N}}_m \prec \mathcal{P}_m = \left(\mathrm{V}_{\eta_m}^{\mathcal{N}_m}, \in, \delta_m\right)$, 其中, $\delta_m = j_{0,m}^{\mathcal{S}}(\delta)$.

(c) $\bar{\tau}_m : \mathcal{M}_m \prec \bar{\mathcal{Q}}_m = \left(\mathrm{V}_{\bar{\nu}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_m}, \in, \bar{\delta}_m\right)$, 其中, $\psi_m\left(\bar{\nu}_m\right) = \nu_m = j_{0,m}^{\mathcal{S}}(\nu)$, $\bar{\delta}_m = \delta^{\bar{\mathcal{N}}_m}$, 因此 $\psi_m\left(\bar{\delta}_m\right) = \delta_m$;

置 $\tau_m = \psi_m \circ \bar{\tau}_m$, 从而有 $\tau_m : \mathcal{M}_m \prec \mathcal{Q}_m = \left(\mathrm{V}_{\nu_m}^{\mathcal{P}_m}, \in, \delta_m\right) = \left(\mathrm{V}_{\nu_m}^{\mathcal{N}_m}, \in, \delta_m\right)$. 再令张子

$$F_m = \tau_m\left(E_m\right).$$

因此, 对于 $m < \omega$, 需要构造的独立对象为 $\bar{N}_m, \eta_m, \psi_m, \bar{\tau}_m$.

在上述构造中, 对于 $m < \omega$, 还会确保下列条件被满足：

(i) 对于每一个 $k < \omega$, 如果 $(k+1)_T^- \leqslant m \leqslant k$, 那么 $\bar{\tau}_{(k+1)_T^-}$ 与 $\bar{\tau}_k$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(E_k) + 1$;

(ii) 对于每一个 $k \leqslant m$, ψ_k 与 ψ_m 是吻合度至少为

$$\min\left\{(\mathrm{QiangDu}\,(\bar{\tau}_i\,(E_i)))^{\bar{\mathcal{N}}_i} \mid k \leqslant i < m\right\}$$
$$\left(= \min\left\{\bar{\tau}_i\left((\mathrm{QiangDu}\,(E_i))^{\mathcal{M}_i}\right) \mid k \leqslant i < m\right\}\right);$$

(iii) $\bar{\tau}_m \in \bar{N}_m$;

(iv) $\left\{\alpha \;\middle|\; \bar{\nu}_m < \alpha \in \mathrm{Ord}^{\bar{N}_m} \wedge \left(\mathrm{V}_\alpha^{\bar{N}_m}, \in, \bar{\delta}_m\right) \text{ 是一个准模块}\right\}$ 的序型为 $\bar{\tau}\,(\xi_m)$;

(v) $\bar{N}_{m+1} \in \bar{N}_m$.

由于条件 (v) 与 $\in$-极小原理相冲突, 因此我们便得到所寻找的矛盾.

现在来构造 $\left(\bar{N}_m, \eta_m, \psi_m, \bar{\tau}_m\right)$.

令 η_0 满足下述要求：$(\mathrm{V}_{\eta_0}, \in, \delta)$ 是一个准模块; 集合

$$\left\{\alpha \;\middle|\; \nu < \alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathcal{N}} \wedge (\mathrm{V}_\alpha, \in, \delta) \text{ 是一个准模块}\right\}$$

的序型为 $\tau\,(\xi_0)$. 令 $\bar{N}_0 = P_0 = \mathrm{V}_{\eta_0}$; 令 $\psi_0 = \mathrm{Id}\restriction_{\bar{N}_0}$; 令 $\tau_0 = \tau$.

设 $m \in \omega$. 假设对于 $k \leqslant m$, 我们已经定义好了 $\left(\bar{N}_k, \eta_k, \psi_k, \bar{\tau}_k\right)$. 假设

$$(\mathcal{N}, T\restriction_{m+1}, \langle F_k \mid k < m\rangle)$$

是一棵迭代树. 假设对于 $m' \leqslant m$, 上列中的 (a)~(c) 在用 m' 替换 m 之后都成立. 假设上列中的 (i)~(iv) 对于 m 成立, 以及 (v) 在用 m' 替换 m 之后对于所有的 $m' < m$ 都成立.

由 τ_m 的同质性, $F_m = \tau_m\,(E_m)$ 是 $\mathcal{Q}_m$ 中的一个张子, 因而也是 $\mathcal{N}_m$ 中的一个张子.

我们先来证明条件 (i) 和 (ii)(事实上, 当 $k = m$ 时的条件 (i) 和 (ii)) 保证了 $\tau_{(m+1)^-_T}$ 与 τ_m 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(E_m) + 1$. 根据条件 (i), 我们只需证明条件 (i) 和 (ii) 蕴涵 $\psi_{(m+1)^-_T}$ 与 ψ_m 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(\bar{\tau}\,(E_m)) + 1$. 根据推论 3.30,

$$\mathrm{Crit}\,(E_m) + 1 \leqslant \rho^{\mathcal{T}}\left((m+1)^-_T, m\right),$$

也就是

$$\forall i\, \left((m+1)^-_T \leqslant i < m \to \mathrm{Crit}\,(E_m) + 1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_i))^{\mathcal{M}_i}\right).$$

条件 (i) 保证对于所有这样的 i 都有 $\bar{\tau}_i\,(\mathrm{Crit}\,(E_m)) = \bar{\tau}_m\,(\mathrm{Crit}\,(E_m))$. 根据 $\bar{\tau}_i$ 的同质性, 如果 i 满足给定的不等式, 那么

$$\mathrm{Crit}\,(\bar{\tau}\,(E_m)) + 1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(\bar{\tau}_i\,(E_i)))^{\bar{\mathcal{Q}}_i} = (\mathrm{QiangDu}\,(\bar{\tau}_i\,(E_i)))^{\bar{\mathcal{N}}_i}.$$

据此, 条件 (ii) 就给出我们所要的结论.

$\tau_{(m+1)_T^-}$ 和 τ_m 的吻合度蕴涵 $\mathcal{Q}_{(m+1)_T^-}$ 与 $\mathcal{Q}_m$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(\tau_m\,(E_m))+1$, 因此, $\mathcal{N}_{(m+1)_T^-}$ 与 $\mathcal{N}_m$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(\tau_m\,(E_m))+1$. 这样,

$$(m+1)_T^- = m \vee \mathrm{Crit}\,(\tau_m\,(E_m))+1 < \rho^{\mathcal{S}}\left((m+1)_T^-, m\right).$$

于是, 根据定理 3.47 的 (2), 我们得到超幂 $\prod_{\tau_m(E_m)}^{\mathcal{N}_{(m+1)_T^-}} \mathcal{N}_{(m+1)_T^-}$ 是有秩的. 由于 $F_m = \tau_m\,(E_m)$ 属于 $\mathrm{V}_{\delta_m}^{\mathcal{N}_m}$, 据此就有 $(\mathbb{N}, T\restriction_{m+2}, \langle F_k \mid k < m+1\rangle)$ 是一棵迭代树.

根据 $\bar{\tau}_m$ 的同质性, 我们得到 $\bar{F}_m = \bar{\tau}_m\,(E_m)$ 是 $\bar{\mathcal{Q}}_m$ 中的一个张子, 从而也就是 $\bar{\mathcal{N}}_m$ 中的一个张子, 并且 $\bar{F}_m$ 属于 $\mathrm{V}_{\bar{\delta}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_m}$. 进一步地有 $\psi_m\left(\bar{F}_m\right) = F_m$. 这样, 我们可以按照下面的参数替换方式来应用引理 3.80; 用 $\bar{\mathcal{N}}_m$ 替换 $\mathcal{M}$, 用 $\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}$ 替换 $\mathcal{M}'$, 用 $\mathcal{P}_m$ 替换 $\mathcal{N}$, 用 $\mathcal{P}_{(m+1)_T^-}$ 替换 $\mathcal{N}'$, 用 ψ_m 替换 τ, 用 $\psi_{(m+1)_T^-}$ 替换 τ', 用 $\mathrm{Crit}\left(\bar{F}_m\right)$ 替换 κ, 用 $\bar{F}_m$ 替换 E. 这样应用引理 3.80 就得到超幂 $\prod_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}} \bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}$ 是有秩的, 并且得到一个与映射 ψ_m 的吻合度至少为 $\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}$ 的同质嵌入映射

$$\hat{\sigma} : \mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right) \prec \mathrm{ult}\left(\mathcal{P}_{(m+1)_T^-}, F_m\right).$$

不仅如此, 对于 $k \leqslant m$, $\hat{\sigma}$ 与 ψ_k 的吻合度至少为

$$\min\left\{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_i\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_i} \mid k \leqslant i < m+1\right\},$$

其中, $\bar{F}_i = \bar{\tau}_i\,(E_i)$. 当 $k = m$ 时已知; 归纳假设条件 (ii) 给出 $k < m$ 时的结论.

再次应用引理 3.80, 得到一个同质嵌入映射

$$\bar{\sigma} : \mathcal{M}_{m+1} \prec \mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{Q}}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right),$$

并且 $\bar{\sigma}$ 与 $\bar{\tau}_m$ 的吻合度至少为 $(\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\bar{\mathcal{M}}_m}$ 以及

$$\bar{\sigma} \circ i_{E_m}^{\mathcal{M}_{(m+1)_T^-}} = i_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}.$$

应用与定理 3.47 证明中的相应步骤的讨论我们得到后述事实：对于所有的 $k < \omega$, 如果 $(k+1)_T^- \leqslant m+1 \leqslant k$, 那么 $\bar{\tau}_{(k+1)_T^-}$ 与 $\bar{\sigma}$ 的吻合度至少为 $\mathrm{Crit}\,(E_k)+1$.

接下来, 我们证明存在一个具备下述特点的 $\bar{\tau} \in \mathrm{ult}\left(\bar{N}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right)$：

$$\bar{\tau} : \mathcal{M}_{m+1} \prec \mathrm{ult}\left(\mathcal{Q}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right),$$

并且 $\bar{\tau}$ 与 $\bar{\sigma}$ 的吻合度至少为 $\mu^{\mathcal{T}}(m)+1$ 以及 $\bar{\tau}\,(\xi_{m+1}) = \bar{\sigma}\,(\xi_{m+1})$.

这里的证明与定理 3.47 的证明中关于 $\bar{\tau}$ 的存在性的证明类似. 所以, 我们只在此指明不同之处, 将详细讨论留给读者. 因为 $\bar{N}_k$ 不可数, 所以 M_k 属于所有的 $\bar{N}_{k'}$ 并且在其中是可数的. 在定理 3.47 的证明中, 迭代树高度的有限性给了我们两个不等式:

$$\mu(m)+1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m} \wedge \mu'(m)+1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m}.$$

这里, 树 $\mathcal{T}$ 是一棵足够强的迭代树直接给出 $\mu(m)+1 \leqslant (\mathrm{QiangDu}\,(E_m))^{\mathcal{M}_m}$. 为保障等式 $\bar{\tau}\,(\xi_{m+1}) = \bar{\sigma}\,(\xi_{m+1})$, 我们就在此处树 U 的定义中对要求 (i) 添加一项额外要求:“并且当 $a_i = \xi_{m+1}$ 时, 有等式 $u(i) = \bar{\sigma}\,(a_i)$.”

唯一阻止我们实施如下设置的是条件 (v):

$$\bar{N}_{m+1} = \mathrm{ult}\left(\bar{N}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right);\ \eta_{m+1} = i_{F_m}^{\mathcal{N}_{(m+1)_T^-}}(\eta_m);\ \bar{\tau}_{m+1} = \bar{\tau};\ \psi_{m+1} = \hat{\sigma}.$$

换句话说, 如果没有条件 (v) 这个可能的障碍, 我们便可以按照上述设置等式来完成递归步骤. 为了满足条件 (v), 我们还得做一些事情.

根据假设, $\xi_{m+1} < i_{E_m}^{\mathcal{M}_{(m+1)_T^-}}(\xi_m)$. 这样,

$$\begin{aligned} i_{F_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}\left(\bar{\tau}_{(m+1)_T^-}\left(\xi_{(m+1)_T^-}\right)\right) &= i_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{Q}}_{(m+1)_T^-}}\left(\bar{\tau}_{(m+1)_T^-}\left(\xi_{(m+1)_T^-}\right)\right) \\ &= \bar{\sigma}\left(i_{E_m}^{\mathcal{M}_{(m+1)_T^-}}\left(\xi_{(m+1)_T^-}\right)\right) \\ &\geqslant \bar{\sigma}\,(\xi_{m+1}) \\ &= \bar{\tau}\,(\xi_{m+1}). \end{aligned}$$

令 $\bar{\delta} = i_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}(\bar{\delta}_m)$. 由条件 (iv), 在 $\mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right)$ 中, 存在 $i_{F_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}\left(\bar{\tau}_{(m+1)_T^-}(\xi_{(m+1)_T^-})\right)$ 个具备下述特点的序数 α:

$$\alpha > i_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}(\bar{\nu}) \wedge \left(\mathrm{V}_\alpha^{\mathrm{ult}(\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m)}, \in, \bar{\delta}\right) \text{ 是一个准模块.}$$

令 $\bar{\eta}$ 为第 $\bar{\tau}\,(\xi_{m+1})$ 个这样的序数 α. 再令 $\eta_{m+1} = \hat{\sigma}\,(\bar{\eta})$.

令 $\bar{N} = \mathrm{ult}\left(\bar{N}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right)$, 以及令 $\bar{\mathcal{N}} = \mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}, \bar{F}_m\right)$. 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中应用罗文海-斯科伦定理, 我们便得到一个具备下述特点的 $X \subseteq \mathrm{V}_\eta^{\bar{\mathcal{N}}}$:

(1) $\left(X, \in, \bar{\delta}\right) \prec \left(\mathrm{V}_\eta^{\bar{\mathcal{N}}}, \in, \bar{\delta}\right)$;

(2) $\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{(\mathrm{QiangDu}(\bar{F}_m))^{\bar{\mathcal{N}}_m}} \cup \left\{\bar{\tau}, i_{\bar{F}_m}^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)_T^-}}(\bar{\nu}_m)\right\} \subseteq X$;

(3) 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中, X 中的基数与 $\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{(\mathrm{QiangDu}(\bar{F}_m))^{\bar{\mathcal{N}}_m}}$ 的基数相同.

因为 $(X,\in,\delta)$ 是一个准模块的同质子模型, 它的传递化也就是一个准模块. 令

$$\pi:(X,\in,\delta)\cong\left(\bar{N}_{m+1},\in,\bar{\delta}_{m+1}\right)=\bar{\mathcal{N}}_{m+1}$$

为 $(X,\in,\delta)$ 的传递化. 然后依据下述等式定义 ψ_{m+1} 和 $\bar{\tau}_{m+1}$:

$$\psi_{m+1}=\hat{\sigma}\circ\pi^{-1}:\bar{\mathcal{N}}_{m+1}\prec\mathcal{P}_{m+1};$$
$$\bar{\tau}_{m+1}=\pi\left(\bar{\sigma}\right):\mathcal{M}_{m+1}\prec\left(\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}_{m+1}}_{\pi\left(i^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)^-_T}}_{\bar{F}_m}\left(\bar{\nu}_m\right)\right)},\in,\bar{\delta}_{m+1}\right)=\bar{\mathcal{Q}}_{m+1}.$$

注意, $\bar{\tau}_{m+1}=\pi\circ\bar{\sigma}$. 这是因为对 $x\in M_{m+1}$, 有

$$\bar{\tau}_{m+1}(x)=\left(\pi(\bar{\sigma})\right)(x)=\left(\pi\left(\bar{\sigma}\right)\right)\left(\pi(x)\right)=\pi\left(\bar{\sigma}(x)\right).$$

又因为 $\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}}\subset X$, 有 $\pi\restriction\left(\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}}\right)$ 是一个恒等映射, 从而

$$\pi\left(\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}}\right)=\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}}.$$

这就蕴涵着 $\hat{\sigma}$ 与 ψ_{m+1} 的吻合度至少为 $\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}$, 以及 $\bar{\sigma}_m$ 与 $\bar{\sigma}_{m+1}$ 的吻合度至少为 $\left(\mathrm{QiangDu}\left(E_m\right)\right)^{\mathcal{M}_m}$. 根据我们对 $\hat{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 的那些已知事实, 就得到条件 (i) 和 (ii) 在将 "m" 用 "$m+1$" 替换之后也成立; 因为 $\bar{\tau}\in X$, 所以条件 (iii) 在将 "m" 用 "$m+1$" 替换之后也成立.

由 $\bar{\eta}$ 的定义, 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中存在 $\bar{\tau}\left(\xi_{m+1}\right)$ 个具备下述特点的序数 α:

$$\alpha>i^{\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)^-_T}}_{\bar{F}_m}\left(\bar{\nu}_m\right)\wedge\left(\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\alpha},\in,\bar{\delta}\right)\text{ 是一个准模块.}$$

由此得到在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中存在 $\bar{\tau}_{m+1}\left(\xi_{m+1}\right)$ 个具备下述特点的序数 α:

$$\alpha>\bar{\nu}_{m+1}\wedge\left(\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}_{m+1}}_{\alpha},\in,\bar{\delta}_{m+1}\right)\text{ 是一个准模块.}$$

于是, 条件 (iv) 在将 "m" 用 "$m+1$" 替换之后也成立.

由 X 的性质 (3), 在 $\bar{\mathcal{N}}$ 中, $\bar{\mathcal{N}}_{m+1}$ 的基数与 $\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}}$ 的基数相同. 因此, $\bar{N}_{m+1}$ 可以被 $\mathrm{V}^{\bar{\mathcal{N}}}_{\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}+1}$ 中的某个元素所编码记录. 根据引理 3.77, $\mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{N}}_{(m+1)^-_T},\bar{F}_m\right)$ 与 $\mathrm{ult}\left(\bar{\mathcal{N}}_m,\bar{F}_m\right)$ 的吻合度至少为 $i^{\bar{\mathcal{N}}_m}_{\bar{F}_m}\left(\mathrm{Crit}\left(\bar{F}_m\right)\right)+1$, 而这个序数不比 $\left(\mathrm{QiangDu}\left(\bar{F}_m\right)\right)^{\bar{\mathcal{N}}_m}+1$ 小. 因此

$$\bar{N}_{m+1}\in\mathrm{ult}\left(\bar{N}_m,\bar{F}_m\right)\subseteq\bar{N}_m.$$

我们已经完全验证了关于 $m+1$ 的递归假设条件. 从而我们的递归构造得以定义完毕. 这也就意味着得到了我们所寻找的矛盾. □

根据上述分析, 我们就得到下面的定理:

定理 3.49　*不存在 V 上的高度为 ω 的足够强的连续无秩的迭代树.*

证明　诚如定理 3.47 中的 (1)⇒(2) 的论证那样, 任何本定理的反例必然导致前述定理 3.48 的一个反例. □

对我们来说, 真正直接会被用到的是下述推论:

推论 3.31　*设 T 是 V 上的一棵高度为 ω 的足够强的迭代树. 设 b 是 T 的一根树枝. 如果 T 在 b 之外是连续无秩的, 那么 b 一定是 T 的一根有秩树枝.*

证明　这是引理 3.83 以及定理 3.49 综合起来的直接推论. □

首先, 我们在 ω 上如下定义一个树偏序 C : 将所有的正偶数自然排序; 将所有的奇数自然排序; 得到两条链后, 再将 0 置于这两条链的开端处. 这样就得到一棵恰好具有两根无穷树枝的树. 明确解析地我们这样来定义: 对于 $m, n \in \omega$, 令

$$m\,C\,n \leftrightarrow (0 = m < n \vee (\exists k \in \omega\,(k \geqslant 1 \wedge m + 2k = n)))\,.$$

其次, 我们将按照这个树顺序来构造张子超幂迭代树, 以至于会得到如下的情形:

$$\begin{array}{ccccccc}
M_0 & \xrightarrow{i^{M_0}_{E_0}} & M_1 & \xrightarrow{i^{M_1}_{E_2}} & M_3 & \xrightarrow{i^{M_3}_{E_4}} & \cdots \\
 & \searrow i^{M_0}_{E_1} & & & & & \\
 & & M_2 & \xrightarrow{i^{M_2}_{E_3}} & M_4 & \xrightarrow{i^{M_4}_{E_5}} & \cdots
\end{array}$$

其中, E_{n+1} 是来自模型 M_{n+1} 中的张子, $i^{M_n}_{E_{n+1}}$ 是将张子 E_{n+1} 应用到 M_n 上得到的张子超幂 $\mathrm{ult}\,(M_n, E_{n+1}) \cong M_{n+2}$ 所确定的同质嵌入映射. 相对于 M_n 而言, E_{n+1} 是一个外部的张子, 但是 M_n 与 M_{n+1} 这两个模型关于张子 E_{n+1} 的临界点的幂集是同一个集合, 所以, 作为其临界点的测度, 它测量的效果一样. 当然, 这正是我们需要恰当解决的一个基本问题: 怎样应用来自外部的张子定义超幂?

如果这样的构造得以成功, 那么我们就得到一个长度为 ω 的交错链, 相应的迭代树恰好有两根无穷树枝:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Even} &= \{2n \mid n < \omega\} \\
\mathrm{Odd} &= \{0\} \cup \{2n+1 \mid n < \omega\}\,.
\end{aligned}$$

整个构造的关键是根据需要, 选取适当的张子以达到控制交错链上的树枝最终所提供的极限模型是否有秩的目的.

构造交错链的基本工具是下面的**单步引理**.

在表述单步引理之前, 我们需要定义一个算子和一个短语, 以及一些证明中需要用到的事实.

武丁基数的对等描述

我们需要关于武丁基数的进一步的对等描述以适应单步引理证明的需要.

对于序数 α, β 以及 $\gamma \geqslant \alpha$, 我们按照如下方式对集合论纯语言添加足够多的常元符号：令

$$\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}=\begin{cases}\{\in\} \cup\left\{c_{a} \mid a \in \mathrm{V}_{\alpha}\right\} & \text{如果 } \beta=0, \\ \{\in\} \cup\left\{c_{a} \mid a \in \mathrm{V}_{\alpha}\right\} \cup\{d\} & \text{如果 } \beta>0.\end{cases}$$

令

$$\mathcal{V}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}=\begin{cases}\left(\mathrm{V}_{\gamma+\beta}, \in, \gamma, a\right)_{a \in \mathrm{V}_{\alpha}} & \text{如果 } \beta>0, \\ \left(\mathrm{V}_{\gamma}, \in, a\right)_{a \in \mathrm{V}_{\alpha}} & \text{如果 } \beta=0\end{cases}$$

为语言 $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$ 的结构：对于每一个 $a \in \mathrm{V}_{\alpha}$, 用 a 来解释常元符号 c_a, 并且在 $\beta>0$ 时, 用 γ 来解释常元符号 d.

对于 $z \in (\mathrm{V}_{\gamma+\beta})^{<\omega}$, 定义 z 在模型 $\mathcal{V}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}$ 中实现的型, 记成 $\operatorname{tp}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}(z)$, 为下述集合：

$$\operatorname{tp}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}(z)=\left\{\varphi\left(v_{1}, \cdots, v_{\operatorname{dom}(z)}\right) \in \mathcal{L}_{\beta}^{\alpha} \;\middle|\; \mathcal{V}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha} \models \varphi[z]\right\}.$$

为了保证语言 $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$ 中的表达式都是 V_{α} 中的元素, 我们需要有一种合适的编码方式. 为此, 将集合论纯语言的符号一律用奇自然数来标记; 令 0 表示常元符号 d; 对于 $a \in \omega$, 令 $2a+2$ 来记常元符号 c_a; 对于 $a \notin \omega$, 令 a 来记 c_a; 由这些基本符号所组成的 $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$-表达式都是一些有限序列; 然后我们用一个可以简单计算的单射将这些表达式序列转换成这些表达式的编码以至于语言 $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$ 的表达式都由 V_{α} 中的一个元素所编码. 具体用来实现这一意图的编码单射 $\mathbf{c}: \mathrm{V}^{<\omega} \rightarrow \mathrm{V}$ 定义如下：

对于 $s \in \mathrm{V}_{\omega}^{<\omega}$, 令 $\mathbf{c}(s)=s$; 对于 $\xi \geqslant \omega$, 以及 $s \in \left(\mathrm{V}_{\xi+1}^{<\omega}-\mathrm{V}_{\xi}^{<\omega}\right)$, 令

$$\mathbf{c}(s)=\{\mathbf{c}(\langle n, y\rangle) \mid n<\operatorname{dom}(s) \wedge y \in s(n)\}.$$

如此定义出来的 I 具有下述特点：

(1) $\mathbf{c}: \mathrm{V}^{<\omega} \rightarrow \mathrm{V}$ 是一个单射, 并且

$$\forall s \in \mathrm{V}^{<\omega}\ (\mathrm{RK}(s) \geqslant \omega \rightarrow \mathrm{RK}(\mathbf{c}(s))=\max \{\mathrm{RK}(s(k)) \mid k<\operatorname{dom}(s)\}).$$

(2) 如果 $\xi \geqslant \omega$ 是一个序数, 那么 $\mathbf{c}\left[\mathrm{V}_{\xi}^{<\omega}\right] \subset \mathrm{V}_{\xi}$.

(3) 对于所有的序数 γ, β, 以及所有的 $z \in \mathrm{V}_{\gamma+\beta}^{<\omega}$, 都有

$$\begin{aligned}&\forall \alpha\left(\omega \leqslant \alpha \leqslant \gamma \rightarrow\left(\operatorname{tp}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}(z) \subseteq \mathrm{V}_{\alpha}\right)\right); \\ &\forall \alpha, \forall \alpha^{*}\left(\omega \leqslant \alpha \leqslant \alpha^{*} \leqslant \gamma \rightarrow \operatorname{tp}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha^{*}}(z) \cap \mathrm{V}_{\alpha}=\operatorname{tp}_{(\gamma, \beta)}^{\alpha}\right).\end{aligned}$$

在引入下面多次使用的一个短语之前, 先让我们回顾一下保持谓词作用的强基数概念：设 A 是一个类, κ 是一个基数, $\eta > \kappa$, 称 κ 是一个**保持 A 作用的 η-强基数**当且仅当存在一个具备下述特点的同质嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$：

(i) $\kappa = \mathrm{Crit}(j) < \eta < j(\kappa)$, 并且 $\mathrm{V}_\eta \subset M$, 即 j 见证 κ 是一个 η-强基数;

(ii) $j(A) \cap \mathrm{V}_\eta = A \cap \mathrm{V}_\eta$ ($j(A)$ 与 A 的**吻合度**为 η).

关于保持谓词作用的强基数有如下有用的特点：

定理 3.50　设 κ 为一个强极限基数. 令 $A \subseteq \mathrm{V}_\kappa$. 设 $\delta < \eta < \kappa$ 是一个保持 A 作用的 η-强基数. 那么在 V_κ 中一定存在一个张子 E 以至于它所诱导出来的同质嵌入映射 i_E 就能够见证 δ 是一个保持 A 作用的 η-强基数.

证明　设 $j : \mathrm{V} \prec M$ 见证 δ 是一个保持 A 作用的 η-强基数. 令 E 为由 j 诱导出来的一个 $(\delta, |\mathrm{V}_{\eta+1}|)$-张子. 那么 $j = k \circ i_E$, 并且

$$\mathrm{V}_\eta^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},E)} = \mathrm{V}_\eta^M,$$

其中, $i_E : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, E)$ 以及 $k : \mathrm{ult}(\mathrm{V}, E) \prec M$. 因此,

$$\begin{aligned} i_E(A) \cap \mathrm{V}_\eta &= k\left(i_E(A) \cap \mathrm{V}_\eta\right) \\ &= k\left(i_E(A)\right) \cap k\left(\mathrm{V}_\eta\right) \\ &= k\left(i_E(A)\right) \cap \mathrm{V}_\eta \\ &= j(A) \cap \mathrm{V}_\eta \\ &= A \cap \mathrm{V}_\eta. \end{aligned}$$

□

定义 3.34　设 β 为一个序数, γ 为一个极限序数, $\delta < \gamma$ 为一个基数, $z \in \mathrm{V}_{\gamma+\beta}^{<\omega}$. 称 "**$\delta$ 保持 z 在 $(\gamma + \beta)$ 上的型**" 当且仅当

$$\forall \eta \left(\delta < \eta < \gamma \rightarrow \delta \text{ 是保持 } \mathrm{tp}_{(\gamma,\beta)}^{\gamma}(z) \text{ 作用的 } \eta\text{-强基数}\right).$$

定理 3.51　设 κ 是一个基数. 那么下述命题对等:

(1) κ 是一个武丁基数;

(2) 对于所有的序数 β, 以及所有的 $z \in \mathrm{V}_{\kappa+\beta}^{<\omega}$, 下述集合 $X(\beta, z)$ 在 κ 中无界:

$$X(\beta, z) = \{\delta < \kappa \mid \delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + \beta) \text{ 上的型}\}.$$

(3) 对于所有的 $z \in \mathrm{V}_{\kappa+1}^{<\omega}$, 下述集合 $X(1, z)$ 非空:

$$X(1, z) = \{\delta < \kappa \mid \delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + 1) \text{ 上的型}\}.$$

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 由定理 1.36 给出. (3) 是 (2) 的特例. 我们仅需要证明 (3) $\Rightarrow$ (1).

再次应用定理 1.36. 设 $f:\kappa\to\kappa$. 那么 $\langle f\rangle\in \mathrm{V}_{\kappa+1}^{<\omega}$. 令 $z=\langle f\rangle$. 设 δ 保持 $\langle f\rangle$ 在 $(\kappa+1)$ 上的型. 令 $\alpha<\kappa$ 满足下述要求:

$$\alpha>\max\{\delta,\sup\{f(\xi)\mid\xi\leqslant\delta\}\}.$$

令 $j:\mathrm{V}\prec M$ 见证 δ 是一个保持 $\mathrm{tp}^{\kappa}_{(\kappa,1)}(\langle f\rangle)$ 作用的 α-强基数. 那么

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{tp}^{\alpha}_{(j(k),1)}\right)^M(\langle j(f)\rangle)&=\left(\mathrm{tp}^{j(\kappa)}_{(j(\kappa),1)}\right)^M(\langle f\rangle)\cap \mathrm{V}_\alpha^M\\&=j\left(\mathrm{tp}^{\kappa}_{(\kappa,1)}(\langle f\rangle)\right)\cap\mathrm{V}_\alpha\\&=\mathrm{tp}^{\kappa}_{(\kappa,1)}(\langle f\rangle)\cap\mathrm{V}_\alpha\\&=\mathrm{tp}^{\kappa}_{(\kappa,1)}(\langle f\rangle).\end{aligned}$$

令 $\xi\leqslant\delta$ 以及 $\gamma=f(\xi)$. 于是, $\{\xi,f(\xi)\}\subset\mathrm{V}_\alpha$. 等式 $\gamma=f(\xi)$ 便由 $\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\kappa,1)}(\langle f\rangle)$ 中的一个元素所表示. 因此, $\mathrm{tp}^{\alpha}_{(j(\kappa),1)}(\langle j(f)\rangle)$ 中的同一个元素表示等式 $(j(f))(\xi)=\gamma$. 于是,

$$(j(f))(\xi)=f(\xi)<\alpha.$$

因此, 对于 $\xi<\delta$, 我们有 $(j(f))(\xi)<\alpha<j(\delta)$. 从而, $f(\xi)<\delta$. 这表明 δ 关于 f 是封闭的. 对于 $\xi=\delta$, 有

$$\mathrm{V}_{(j(f))(\delta)}\subset\mathrm{V}_\alpha\subset M.$$

由此可见 j 见证 κ 相对于函数 f 是一个武丁基数. □

下面的定理揭示保持类型的强基数的富有程度:

定理 3.52 设 κ 是一个强极限基数. 令 $\delta<\kappa$ 为一个基数, β 为一个序数, $z\in\mathrm{V}_{\kappa+\beta}^{<\omega}$. 那么如下命题对等:

(1) δ 保持 z 在 $(\kappa+\beta)$ 上的型;

(2) 对于开区间 (δ,κ) 中的每一个序数 α 而言, 都有 V_κ 中的一个具备下述特点的张子 E 存在:

(a) $\mathrm{Crit}\,(i_E)=\delta$;

(b) E 的强度不小于 α (即 $\mathrm{V}_\alpha\subset\mathrm{ult}(\mathrm{V},E)$);

(c) $\alpha<i_E(\delta)$;

(d) $\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\kappa,\beta)}(z)=\left(\mathrm{tp}^{\alpha}_{(i_E(\kappa),i_E(\beta))}\right)^{\mathrm{ult}(V,E)}(i_E(z))$.

证明 本定理直接相随于定理 3.50. □

推论 3.32 设 κ 是一个不可达基数. 令 $\delta<\kappa$ 为一个基数, β 为一个序数, $z\in\mathrm{V}_{\kappa+\beta}^{<\omega}$. 那么如下命题对等:

(1) δ 保持 z 在 $(\kappa+\beta)$ 上的型;

(2) 对于开区间 (δ,κ) 中的每一个序数 α 而言, 都有 V_κ 中的一个具备下述特点的张子 E 存在:

(a) $\mathrm{Crit}\,(i_E)=\delta$;

(b) E 的强度不小于 α (即 $V_\alpha\subset \mathrm{ult}(V,E)$);

(c) $\alpha<i_E(\delta)$;

(d) $i_E(\kappa)=\kappa$ 以及 $\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\kappa,\beta)}(z)=\left(\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\kappa,i_E(\beta))}\right)^{\mathrm{ult}(V,E)}(i_E(z))$.

证明　因为当 κ 为不可达基数以及 $E\in V_\kappa$ 为张子时, $i_E(\kappa)=\kappa$, 所以推论由定理 3.52 立即得到. □

下面的引理表明有关于型的表达式以言明 $a=\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\gamma,\beta)}(z)$:

引理 3.84　设 $n<\omega$. 存在一个集合论纯语言的彰显自由变元的具备下述功能的表达式 $\mathrm{LeiXing}_n\,(v_1,\cdots,v_{n+4})$: 对于所有满足下述要求的序数 $\alpha,\beta,\gamma,\alpha'$ 以及 β':

$$\omega\leqslant\alpha'<\alpha\leqslant\gamma\wedge\beta'<\beta,$$

对于任意的 $z\in(V_{\gamma+\beta'})^n$, 对于所有的 $a\in V_\alpha$,

$$\begin{aligned}a=&\mathrm{tp}^{\alpha'}_{(\gamma,\beta')}(z)\\ &\leftrightarrow V_{\gamma+\beta}\models \mathrm{LeiXing}_n\,[z+\langle\beta',\alpha,\alpha',\gamma\rangle]\\ &\leftrightarrow \mathrm{LeiXing}_n\,(v_1,\cdots,v_{n+1},c_\alpha,c_{\alpha'},d)\in\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\gamma,\beta)}\,(z+\langle\beta'\rangle)\,.\end{aligned}$$

这样 $\mathrm{tp}^{\alpha'}_{(\gamma,\beta')}$ 就与 $\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\gamma,\beta)}\,(z+\langle\beta'\rangle)$ 中的一个元素等同起来.

证明　(练习.) □

类似于型的表述, 短语保持类型也有相应的表达式:

引理 3.85　设 $n<\omega$. 存在集合论纯语言的彰显自由变元的一个具备下述功能的表达式 $\mathrm{BaoXing}_n\,(v_1,\cdots,v_{n+3})$: 对于所有满足下述要求的参数 $\kappa,\delta,\beta,\beta',z$:

$$\kappa\text{ 是一个强极限基数},\ \delta<\kappa,\ \beta'<\beta,\ z\in(V_{\kappa+\beta'})^n,$$

都有下述对等命题:

$$\begin{aligned}&\delta\text{ 保持 } z \text{ 在 } ((\kappa+\beta'))\text{ 上的型}\\ \leftrightarrow\ & V_{\kappa+\beta}\models \mathrm{BaoXing}_n\,[z+\langle\beta',\delta,\kappa\rangle]\\ \leftrightarrow\ & \mathrm{BaoXing}_n\,(v_1,\cdots,v_{n+1},c_\delta,d)\in\mathrm{tp}^{\delta+1}_{(\kappa,\beta)}\,(z+\langle\beta'\rangle)\,.\end{aligned}$$

证明　所要的表达式基本上由定理 3.52 所提供. 唯一需要细化的部分是条件 (d) 的形式表述. 我们需要将语句

“对于 V_κ 中的 (δ,λ)-张子 E, 一定有 $\begin{pmatrix}\mathrm{tp}^{\alpha}_{(\kappa,\beta')}(z)= \\ \left(\mathrm{tp}^{\alpha}_{(i_E(\kappa),i_E(\beta'))}\right)^{\mathrm{ult}(V,E)}(i_E(z))\end{pmatrix}$”

翻译成扩充语言 $\mathcal{L}_\kappa^{\delta+1}$ 中的带有参数 $\beta', z, \kappa, \alpha, E, \delta, \lambda$ 的语句. 我们所要翻译的语句可以用如下方式对等地表述 (为了简单起见假设 $\beta' > 0$):

对于 $a \in \mathrm{V}_\alpha^{<\omega}$, 对于每一个 $\mathcal{L}_\in$ 中彰显自由变元的表达式 $\varphi(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(z+a)+1}), \mathrm{V}_{\kappa+\beta'} \models \varphi[z + a + \langle\kappa\rangle] \leftrightarrow \mathrm{V}_{i_E(\kappa+\beta')}^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},E)} \models \varphi\left[i_E(z) + a + \langle i_E(\kappa)\rangle\right]$.

上述对等式右端的表达式又对等于下述表达式:

$$\exists b \in [\lambda]^{<\omega}\, \exists f \in \mathrm{V}_{\delta+1} \left(\begin{array}{l} f : [\delta]^{\mathrm{dom}(b)} \to \mathrm{V}_\delta^{\mathrm{dom}(a)} \wedge a = \pi_E\left([\![(b,f)]\!]_E\right) \wedge \\ \left\{x \in [\delta]^{\mathrm{dom}(b)} \mid \mathrm{V}_{\kappa+\beta'} \models \varphi\left[z + f(x) + \langle\kappa\rangle\right]\right\} \in E_b \end{array} \right).$$

这个表达式可以在扩充语言 $\mathcal{L}_\kappa^{\delta+1}$ 中表述出来. □

单步引理

引理 3.86 (单步引理) 设 M 和 N 是 ZFC 的传递类模型. 令 $\kappa \in M \cap N$ 为 V 中的不可达基数, 并且在 M 中为一个武丁基数. 令 δ 和 η 为满足不等式 $\delta \leqslant \eta < \kappa$ 的序数. 令 $\xi < \beta$ 为 M 中的两个序数. 令 β' 为 N 中的一个序数. 令 $\{x, y\} \subset \left(\mathrm{V}_{\kappa+\beta}^M\right)^{<\omega}$ 以及 $x' \in \left(\mathrm{V}_{\kappa+\beta'}^N\right)^{\mathrm{dom}(x)}$. 令 $\varphi(v)$ 为集合论纯语言的一个彰显自由变元的表达式. 假设

(1) $\mathrm{V}_{\delta+1} \cap M = \mathrm{V}_{\delta+1} \cap N$ (它们的吻合度为 $\delta + 1$);

(2) $\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\beta)}^\delta\right)^M (x) = \left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\beta')}^\delta\right)^N (x')$;

(3) 在 M 中, δ 保持 x 在 $(\kappa + \beta)$ 上的型;

(4) $\mathrm{V}_{\kappa+\beta}^M \models \varphi[\xi]$.

那么一定存在具备下述特点的一个有序对 (λ, E): $\lambda < \kappa$, $E \in M$,

(a) $M \models E$ 是一个 (δ, λ)-张子.

(b) 如果 $\prod_E^N(\mathbb{N}, \in)$ 是有秩结构, 那么必有满足下述要求的三元组 (δ^*, ξ^*, y^*):

$$\eta < \delta^* < i_E^N(\delta) < \kappa;\ \xi^* < i_E^N\left(\beta'\right);\ \left\{i_E^N\left(x'\right), y^*\right\} \subset \left(\mathrm{V}_{\kappa+\xi^*}^{\mathrm{ult}(N,E)}\right)^{<\omega}.$$

并且

(1^*) $\mathrm{V}_{\delta^*+1} \cap M = \mathrm{V}_{\delta^*+1} \cap \mathrm{ult}(N, E)$ (它们的吻合度为 $\delta^* + 1$);

(2^*) $\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\xi)}^{\delta^*}\right)^M (x + y) = \left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\xi^*)}^{\delta^*}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} \left(i_E^N\left(x'\right) + y^*\right)$;

(3^*) 在 $\mathrm{ult}(N, E)$ 中, δ^* 保持 $\left(i_E^N\left(x'\right) + y^*\right)$ 在 $(\kappa + \xi^*)$ 上的型;

(4^*) $\mathrm{V}_{\kappa+i_E^N(\beta')}^{\mathrm{ult}(N,E)} \models \varphi\left[\xi^*\right]$.

并且更有甚者, 如果 $\alpha \in \mathrm{Ord}^{\mathrm{ult}(N,E)}$, $z \in \left(\mathrm{V}_{\kappa+\alpha}^{\mathrm{ult}(N,E)}\right)^{<\omega}$ 具备下述特点:

$$\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\alpha)}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} (z) = \left(\mathrm{tp}_{\left(\kappa, i_E^N(\beta')\right)}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} \left(i_E^N\left(x'\right)\right),$$

那么必有一个具备下述特点的有序对 $\left(\hat{\xi},\hat{y}\right)$:

(a*) $\hat{\xi}\in\alpha$, $\hat{y}\in\left(V_{\kappa+\hat{\xi}}^{\mathrm{ult}(N,E)}\right)^{<\omega}$;

(b*) $\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\xi)}^{\delta^*}\right)^M(x+y)=\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\hat{\xi})}^{\delta^*}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)}(z+\hat{y})$;

(c*) 在 $\mathrm{ult}(N,E)$ 中, δ^* 保持 $(z+\hat{y})$ 在 $(\kappa+\hat{\xi})$ 上的型;

(d*) $V_{\kappa+\alpha}^{\mathrm{ult}(N,E)}\models\varphi\left[\hat{\xi}\right]$.

证明　根据定理 3.51, 令 δ^* 满足不等式 $\eta<\delta^*<\kappa$ 以及要求: 在 M 中, δ^* 保持 $x+y$ 在 (ξ) 上的型. 根据引理所给的条件 (3) 以及推论 3.32, 取具备下述特点的 (λ,E):

(a) $\lambda<\kappa$ 以及 $E\in M$.

(b) 在 M 中下列命题成立:

(i) E 是一个强度大于等于 δ^*+1 的 (δ,λ)-张子;

(ii) $i_E(\kappa)=\kappa$;

(iii) $\mathrm{tp}_{(\kappa,\beta)}^{\delta^*+1}(x)=\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,i_E(\beta))}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(V,E)}(i_E(x))$.

假设 $\prod_E^N(N,\in)$ 是有秩的. 由于 κ 在 V 中是不可达基数, 因此必有 $i_E^N(\kappa)=\kappa$.

根据给定条件 (1) 以及吻合度引理 3.74 之 (c), 超幂 $\mathrm{ult}(N,E)$ 与超幂 $\mathrm{ult}(M,E)$ 的吻合度至少为 δ^*+1. 又因为 $\mathrm{ult}(M,E)$ 与 M 的吻合度至少为 δ^*+1, 所以 (1*) 成立.

在选择 ξ^* 和 y^* 之前, 先来证明下述等式:

$$\left(\mathrm{tp}_{\kappa,i_E^N(\beta')}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)}\left(i_E^N\left(x'\right)\right)=\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,\beta)}^{\delta^*+1}\right)^M(x).$$

根据上面的 (b) 之 (iii), 证明下述等式:

$$\left(\mathrm{tp}_{\kappa,i_E^N(\beta')}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)}\left(i_E^N\left(x'\right)\right)=\left(\mathrm{tp}_{\left(\kappa,i_E^M(\beta)\right)}^{\delta^*+1}\right)^{\mathrm{ult}(M,E)}\left(i_E^M(x)\right).$$

令 $\varphi\left(v_1,\cdots,v_{\mathrm{dom}(x)+n+1}\right)$ 为语言 $\mathcal{L}_\in$ 中的彰显自由变元的表达式. 令

$$b=\langle b_1,\cdots,b_n\rangle\in\left(V_{\delta^*+1}^{\mathrm{ult}(M,E)}\right)^n.$$

对于 $1\leqslant k\leqslant n$, 令 (a_k,f_k) 满足下列等式:

$$b_k=\pi_E^M\left(\llbracket(a_k,f_k)\rrbracket_E^M\right).$$

令 $a=\bigcup\{a_k\mid 1\leqslant k\leqslant n\}$. 对于 $1\leqslant k\leqslant n$, 用 $f_k\circ\mathrm{TY}_{a_k}^a$, 我们可以不失一般性地假设 $a_k=a$. 因此, 对于 $1\leqslant k\leqslant n$, 我们就简化地有

$$b_k=\pi_E^M\left(\llbracket(a,f_k)\rrbracket_E^M\right).$$

由于在 M 中 E 的强度在开区间 $(\delta^*, \lambda+1)$ 内, 而 $\lambda+1 < i_E^M(\delta)$, 我们可以假设对于 $1 \leqslant k \leqslant n$, 都有

$$f_k : [\delta]^n \to \mathrm{V}_\delta.$$

根据吻合度引理 3.74 之 (a), 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$, 都有

$$b_k = \pi_E^N \left([\![(a, f_k)]\!]_E^N \right).$$

根据超幂基本定理 (定理 3.44) 以及假设条件 (2), 有

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x)}, c_{b_1}, \cdots, c_{b_n}, d\right) \in \left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\left(\kappa, i_E^N(\beta')\right)}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} \left(i_E^N\left(x'\right)\right) \\
\leftrightarrow &\left\{ z \in [\kappa]^{|a|} \;\middle|\; \varphi\left(\vec{v}, c_{f_1(z)}, \cdots, c_{f_n(z)}, d\right) \in \left(\mathrm{tp}^{\delta}_{(\kappa,\beta')}\right)^N (x') \right\} \in E_a \\
\leftrightarrow &\left\{ z \in [\kappa]^{|a|} \;\middle|\; \varphi\left(\vec{v}, c_{f_1(z)}, \cdots, c_{f_n(z)}, d\right) \in \left(\mathrm{tp}^{\delta}_{(\kappa,\beta')}\right)^M (x) \right\} \in E_a \\
\leftrightarrow &\varphi\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x)}, c_{b_1}, \cdots, c_{b_n}, d\right) \in \left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\left(\kappa, i_E^M(\beta)\right)}\right)^{\mathrm{ult}(M,E)} \left(i_E^M\left(x\right)\right).
\end{aligned}$$

现在我们来选择 ξ^* 以及 y^*. 为此, 令 $A = \left(\mathrm{tp}^{\delta^*}_{(\kappa,\xi)}\right)^M (x+y)$.

令 $\mathrm{LeiXing}_{\mathrm{dom}(x+y)}\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+4}\right)$ 为引理 3.84 所提供的表达式, 令 $\mathrm{BaoXing}_{\mathrm{dom}(x+y)}\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+3}\right)$ 为引理 3.85 所提供的表达式.

令 $\psi\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+1}\right)$ 为扩充语言 $\left(\mathcal{L}_\kappa^{\delta^*+1}\right)^M$ 中的如下定义的表达式:

$$\begin{aligned}
&v_{\mathrm{dom}(x+y)+1} \in \mathrm{Ord} \wedge \\
&\mathrm{LeiXing}_{\mathrm{dom}(x+y)}\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+1}, c_A, c_{\delta^*}, d\right) \wedge \\
&\mathrm{BaoXing}_{\mathrm{dom}(x+y)}\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+1}, c_{\delta^*}, d\right) \wedge \\
&\varphi\left(v_{\mathrm{dom}(x+y)+1}\right).
\end{aligned}$$

有限序列 y 以及序数 ξ 见证如下表达式属于型 $\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{(\kappa,\beta)}\right)^M (x)$:

$$\exists v_{\mathrm{dom}(x)+1} \cdots \exists v_{\mathrm{dom}(x)+\mathrm{dom}(y)+1} \left(\psi\left(v_1, \cdots, v_{\mathrm{dom}(x+y)+1}\right)\right).$$

于是, 这个表达式就属于型 $\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\left(\kappa, i_E^N(\beta')\right)}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} \left(i_E^N\left(x'\right)\right)$. 根据这一命题, 取 y^* 和 ξ^* 来见证这个事实. 从而, $(2^*)\sim(4^*)$ 也就成立.

至于引理的第二部分, 令 α 和 z 如假设所提供, 那么上面的表达式就属于型 $\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{(\kappa,\alpha)}\right)^{\mathrm{ult}(N,E)} (z)$. 故可取得这个事实的证据 $\hat{y}$ 与 $\hat{\xi}$. 所要的结论就成立. □

交错链构造

在完成了关于高度不超过 ω 的迭代树的有秩性问题的分析之后, 我们来构造一些交错链.

回顾一下在自然数集合 $\mathbb{N}$ 上我们引进的 $\ominus$ 运算: 对于两个自然数 m 和 n, 令

$$m \ominus n = \begin{cases} k & \text{如果 } m \geqslant n \wedge m = n + k, \\ 0 & \text{如果 } m < n. \end{cases}$$

应用这个二元运算, 我们可以计算在树 (ω, C) 上任何一个后继节点 $k+1$ 的直接前置节点: $(k+1)_C^- = k \ominus 1$, 其中

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (m\, C\, n \leftrightarrow (m = 0 < n \vee (\exists k \geqslant 1\, (m + 2k = n)))) .$$

为了说明交错链构造的基本思想, 我们先来构造有限长度的交错链.

引理 3.87 设 κ 是一个武丁基数. 设 $n \in \omega$. 那么存在一个 V 上的长度为 $n+1$ 的交错链 $\mathcal{C}$, 并且 $\mathcal{C} \in V_\kappa$.

证明 当 $n = 0$ 时, 没有什么需要证明的.

设 $\gamma < \kappa$ 为一个不可达基数.

设 $n = 1$. 设 $\delta_0 > \gamma$ 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa+1)$ 上的型. 根据定理 3.51, 这样的强基数存在. 此时单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$\begin{aligned} M &= M_0; & N &= M_0; \\ \delta &= \delta_0; & \eta &= \delta_0; \\ \beta &= 1; & \xi &= 0; \\ \beta' &= 1; & x &= \varnothing; \\ y &= \varnothing; & x' &= \varnothing; \end{aligned}$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$\kappa + v$ 是最大的序数". 于是, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 超幂 $\prod_E^{M_0} (M_0, \in)$ 是有秩的. 应用单步引理, 令 δ^*, ξ^*, y^* 为单步引理所提供. 根据单步引理之 (2^*), $y^* = \varnothing$. 由 (4^*) 得知 $\xi^* = 0$. 令 $E_0 = E$, $\delta_1 = \delta^*$, 令 $\pi_{0,1} : \prod_E^{M_0} (M_0, \in) \cong (M_1, \in)$, $j_{0,1} = i_{E_0} : (V, \in) \prec (M_1, \in)$. 这样,

(1^*) M_1 与 M_0 的吻合度至少为 $\delta_1 + 1$;

(2^*) $\mathrm{tp}_{(\kappa,0)}^{\delta_1}(\varnothing) = \mathrm{tp}_{(\kappa,0)}^{\delta_1}(\varnothing)$;

(3^*) δ_1 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa + 0)$ 上的型;

(4^*) $V_{\kappa+1}^{M_1} \models \varphi[0]$.

单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$\begin{aligned} M &= M_1; & N &= M_0; \\ \delta &= \delta_1; & \eta &= \delta_1; \\ \beta &= 1; & \xi &= 0; \\ \beta' &= 1; & x &= \varnothing; \\ y &= \varnothing; & x' &= \varnothing; \end{aligned}$$

以及 $\kappa=\kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$\kappa+v$ 是最大的序数". 于是, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 应用引理 3.79 和定理 3.47, 我们知道 $\prod_{E}^{M_0}(M_0,\in)$ 是有秩的. 令 $E_1=E$, 令 $\pi_{0,2}:\prod_{E_1}^{M_0}(M_0,\in)\cong(M_2,\in)$, $j_{0,2}=i_{E_2}:(\mathrm{V},\in)\prec(M_2,\in)$. 我们就得到了长度为 2 的交错链.

现在设 $n>1$. 我们来构造长度为 $n+1$ 的交错链 $\mathcal{C}_n$. 令 δ_0 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa+n)$ 上的型.

为了简化记号, 将用 E_m 来记交错链构造中使用的张子 $E_m^{\mathcal{C}}$; 用 $(M_m,\in)$ 记树构造中的模型 $\mathcal{M}_m^{\mathcal{C}}$; 以及用 $j_{m,m'}$ 记同质嵌入映射 $j_{m,m'}^{\mathcal{C}}$; 用 $q(E_m)$ 记张子 E_m 在 $(M_m,\in)$ 中的强度; 对于 $m<k<\omega$, 令 $\rho^{\mathcal{C}}(m,k)=\min\{q(E_\ell)\mid m\leqslant\ell<k\}$.

对于 $k<n$, 归纳假设为: $\mathcal{C}_k\in\mathrm{V}_\kappa$ 是一个从 $\mathcal{M}=(\mathrm{V},\in)$ 出发的长为 $k+1$ 的交错链; 存在一个具备下述特点的序数 δ_k:

(i) $\gamma<\delta_k<\kappa$, M_k 与 $M_{k\ominus1}$ 的吻合度至少为 δ_k+1;

(ii) $\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,n-k)}^{\delta_k}\right)^{M_k}(\varnothing)=\left(\mathrm{tp}_{(\kappa,n-k)}^{\delta_k}\right)^{M_{k\ominus1}}(\varnothing)$;

(iii) 在 M_k 中, δ_k 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa+(n-k))$ 上的型.

我们需要将 $\mathcal{C}_k$ 延展到长度为 $k+2$ 的交错链 $\mathcal{C}_{k+1}$.

先假设 $n-k>1$. 由于所涉及的同质嵌入映射 $j_{m,m'}$ 都以 κ 为不动点, κ 在 M_k 中也是一个武丁基数. 此时单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$\begin{aligned} M &= M_k; & N &= M_{k\ominus1}; \\ \delta &= \delta_k; & \eta &= \delta_k; \\ \beta &= n-k; & \xi &= n-k-1; \\ \beta' &= n-k; & x &= \varnothing; \\ y &= \varnothing; & x' &= \varnothing; \end{aligned}$$

以及 $\kappa=\kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$\kappa+v$ 是最大的序数". 于是, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 此时, E 在 M_k 中是一个 (δ_k,λ)-张子.

如果 $k=0$, 那么 $M_{k\ominus 1}=M_0=\mathrm{V}$, 从而超幂 $\prod_E^{M_{k\ominus 1}}(M_{k\ominus 1},\in)=\prod_E^{\mathrm{V}}(\mathrm{V},\in)$ 是有秩的.

如果 $k>0$, 那么 $\prod_E^{M_{k\ominus 1}}(M_{k\ominus 1},\in)=\prod_E^{M_{k-1}}(M_{k-1},\in)$. 根据引理 3.79 以及归纳假设中的 (i), 我们就有

$$\rho^{\mathcal{C}_k}(k-1,k)>\delta_k=\mathrm{Crit}(E).$$

于是, 定理 3.47 蕴涵超幂 $\prod_E^{M_{k-1}}(M_{k-1},\in)$ 是有秩的.

因此, 无论 k 为何值, 超幂 $\prod_E^{M_{k\ominus 1}}(M_{k\ominus 1},\in)$ 是有秩的.

应用单步引理, 令 δ^*,ξ^*,y^* 为单步引理所提供. 根据单步引理之 (2*), $y^*=\varnothing$. 由 (4*) 得知 $\xi^*=n-k-1$. 将交错链 $\mathcal{C}_k$ 以如下方式延长到长度为 $k+2$ 的交错链 $\mathcal{C}_{k+1}$: 置 $E_k=E$, $\delta_{k+1}=\delta^*$. 我们的归纳假设在 $k+1$ 处成立.

现在设 $n=k+1$. 再次如前面那样应用引理 3.79 和定理 3.47, 我们可以以如下方式将交错链 $\mathcal{C}_k$ 延长到长度为 $k+2$ 的交错链 $\mathcal{C}_{k+1}$: 置 E_k 为 M_k 中的见证 δ_k 保持 $\varnothing$ 在 (κ) 上的型. □

我们希望应用单步引理来构造一个长度为 ω 的交错链. 从基数角度看, 上面的构造表明这并非一个直截了当的事情: 因为单步引理中要求参数 ξ 总是严格小于参数 β. 这就形成一个严格递减的趋势. 可是我们在序数范围内不可能无限制地严格递减下去. 这就需要我们寻找一定的 “无差别元” 参数. 下面的引理帮助我们解决这一难题.

引理 3.88　*设 κ 是一个武丁基数. $(T,\langle U_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 是一棵 κ^+-整齐苏斯林树. 那么, 存在具备下列性质的序数四元组 (ν,ξ_0,ξ_1,ρ):*

(1) $\nu<\xi_0<\xi_1<\rho$;

(2) ν,ξ_0,ξ_1,ρ *都是梯度严格大于 κ 的强极限基数*;

(3) $\mathrm{tp}^{\nu}_{(\rho,0)}(\langle\xi_0\rangle)=\mathrm{tp}^{\nu}_{(\rho,0)}(\langle\xi_1\rangle)$;

(4) $T\in\mathrm{V}_\nu$.

证明　令 Z 为所有梯度严格大于 κ 的强极限基数的类. 令 ν 为 Z 中满足要求 $T\in\mathrm{V}_\nu$ 的最小元素. 令 ρ 为 Z 中的第 $|\mathrm{V}_{\nu+1}|^+$ 个元素. 对于 $\xi\in\rho\cap Z$, $\mathrm{tp}^{\nu}_{(\rho,0)}$ 中至多有 $|\mathrm{V}_{\nu+1}|$ 个元素. 因此, 必然在 $(\rho\cap Z-(\nu+1)$ 中有两个 $\xi_0<\xi_1$ 来见证

$$\mathrm{tp}^{\nu}_{(\rho,0)}(\langle\xi_0\rangle)=\mathrm{tp}^{\nu}_{(\rho,0)}(\langle\xi_1\rangle).$$ □

引理 3.89　*设 κ 是一个武丁基数. 设 (ν,ξ_0,ξ_1,ρ) 为引理 3.88 所提供的序数四元组. 那么*

(a) 如果 $E \in \mathrm{V}_\kappa$ 是一个张子, 那么这四元组中的每一个都是 i_E 的一个不动点;

(b) 如果 $z \in \mathrm{V}_\nu^{<\omega}$, $\alpha < \kappa$, 那么 $\mathrm{tp}^\alpha_{(\kappa,\xi_0)}(z) = \mathrm{tp}^\alpha_{(\kappa,\xi_1)}(z)$;

(c) 如果 $z \in \mathrm{V}_\nu^{<\omega}$, $\delta < \kappa$, 那么

$$\delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + \xi_0) \text{ 上的型} \leftrightarrow \delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + \xi_1) \text{ 上的型}.$$

证明 (a) 由引理 3.88 中的 (2) 直接给出.

(b) 设 $n \in \omega$. $z = \langle z_1, \cdots, z_n \rangle \in \mathrm{V}_\nu^n$. 设 $\alpha < \kappa$. 令 $a = \mathrm{tp}^\alpha_{(\kappa,\xi_0)}(z)$. 根据引理 3.84,

$$\mathrm{LeiXing}_n\left(v_1, \cdots, v_{n+1}, c_a, c_\alpha, d\right) \in \mathrm{tp}^\kappa_{(\kappa,\rho)}\left(z + \langle \xi_0 \rangle\right).$$

由于 $\kappa + \rho = \rho$, 根据型算子 $\mathrm{tp}^\eta_{(\beta,\gamma)}$ 的定义, 有

$$\mathrm{LeiXing}_n\left(c_{z_1}, \cdots, c_{z_n}, v_1, c_a, c_\alpha, c_\kappa\right) \in \mathrm{tp}^\nu_{(\rho,0)}\left(\langle \xi_0 \rangle\right).$$

根据引理 3.88 中的 (3), 有

$$\mathrm{LeiXing}_n\left(c_{z_1}, \cdots, c_{z_n}, v_1, c_a, c_\alpha, c_\kappa\right) \in \mathrm{tp}^\nu_{(\rho,0)}\left(\langle \xi_1 \rangle\right).$$

再次应用型算子的定义, 由上式, 得到

$$\mathrm{LeiXing}_n\left(v_1, \cdots, v_{n+1}, c_a, c_\alpha, d\right) \in \mathrm{tp}^\kappa_{(\kappa,\rho)}\left(z + \langle \xi_1 \rangle\right).$$

再根据引理 3.84, 我们就得到 $a = \mathrm{tp}^\alpha_{(\kappa,\xi_1)}(z)$.

(c) 设 $n \in \omega$. $z = \langle z_1, \cdots, z_n \rangle \in \mathrm{V}_\nu^n$. 设 $\delta < \kappa$. 根据引理 3.88 中的 (3)、引理 3.85, 以及等式 $\kappa + \xi_0 = \xi_0$, 我们有下列对等式:

$$\begin{aligned}
&\delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + \xi_0) \text{ 上的型} \\
\leftrightarrow\ & \mathrm{BaoXing}_n\left(v_1, \cdots, v_{n+1}, c_\delta, d\right) \in \mathrm{tp}^{\delta+1}_{(\kappa,\rho)}\left(z + \langle \xi_0 \rangle\right) \\
\leftrightarrow\ & \mathrm{BaoXing}_n\left(c_{z_1}, \cdots, c_{z_n}, v_1, c_\delta, c_\kappa\right) \in \mathrm{tp}^\nu_{(\rho,0)}\left(z + \langle \xi_0 \rangle\right) \\
\leftrightarrow\ & \mathrm{BaoXing}_n\left(c_{z_1}, \cdots, c_{z_n}, v_1, c_\delta, c_\kappa\right) \in \mathrm{tp}^\nu_{(\rho,0)}\left(z + \langle \xi_1 \rangle\right) \\
\leftrightarrow\ & \mathrm{BaoXing}_n\left(v_1, \cdots, v_{n+1}, c_\delta, d\right) \in \mathrm{tp}^{\delta+1}_{(\kappa,\rho)}\left(z + \langle \xi_1 \rangle\right) \\
\leftrightarrow\ & \delta \text{ 保持 } z \text{ 在 } (\kappa + \xi_1) \text{ 上的型}.
\end{aligned}$$

□

现在我们来构造一根长为 ω 的交错链, 并且确保由偶数指标构成的迭代序列的极限模型的没有秩的模型.

引理 3.90 设 κ 是一个武丁基数. 设 $(\nu, \xi_0, \xi_1, \rho)$ 为引理 3.88 所提供的序数四元组. 那么存在一根长为 ω 的从 V 出发的交错链 $\mathcal{C}$, 并且 $\mathcal{C} \in \mathrm{V}_\kappa$ 以及交错链 $\mathcal{C}$ 的树枝 Even 是一根没有有秩极限的树枝.

证明　设 $\gamma < \kappa$ 是一个不可达基数. 设 $\kappa > \delta_0 > \gamma$ 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa + (\xi_0 + 1))$ 上的型. 令 $\beta_0 = \xi_0$. 令 $k < n$ 并且归纳地假设我们已经有一根从 V 出发的长度为 $2k+1$ 的交错链 $\mathcal{C}_{2k}$. 如同引理 3.87 的证明那样, 对于 $m < 2k$, 交错链 $\mathcal{C}_{2k}$ 有张子 $E_m \in V_\kappa$; 对于 $m \leqslant 2k$, 有模型 M_m; 对于 $m\, C\, m' \leqslant 2k$, 有同质嵌入映射 $j_{m,m'}$. 还归纳地假设有满足下列条件的序数 δ_{2k} 和 $\beta_m\,(m \leqslant k)$:

(a) M_{2k} 与 $M_{2k\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_{2k}+1$;

(b) $\left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k}}_{(\kappa,\beta_k)}\right)^{M_{2k}}(\varnothing) = \left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k}}_{(\kappa,\xi_0+1)}\right)^{M_{2k\ominus 1}}(\varnothing)$;

(c) 在 M_{2k} 中, δ_{2k} 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa + (\beta_k + 1))$ 上的型;

(d) $\forall m < k\, \forall m' \leqslant k\ (m < m' \to \beta_{m'} < j_{2m,2m'}(\beta_m))$.

由于所涉及的同质嵌入映射都以 κ 为不动点, κ 在 M_{2k} 中也是一个武丁基数. 此时单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足:

$$
\begin{aligned}
M &= M_{2k}; & N &= M_{2k\ominus 1};\\
\delta &= \delta_{2k}; & \eta &= \delta_{2k};\\
\beta &= \beta_k + 1; & \xi &= \beta_k;\\
\beta' &= \xi_0 + 1; & x &= \varnothing;\\
y &= \varnothing; & x' &= \varnothing;
\end{aligned}
$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$\kappa + v$ 是最大的序数". 于是, 令 λ 和 E 由单步引理提供. 由类似于引理 3.87 的证明可知超幂 $\prod_E^{M_{2k\ominus 1}}(M_{2k\ominus 1})$ 是有秩的. 令 δ^*, ξ^*, y^* 由单步引理提供. 根据单步引理之 (2^*), $y^* = \varnothing$. 由 (4^*) 可知 $\xi^* = \xi_0$. 令 $E_{2k} = E$, 以及令 $\delta_{2k+1} = \delta^*$. 如此将交错链 $\mathcal{C}_{2k}$ 延展成长度为 $2k+2$ 的交错链 $\mathcal{C}_{2k+1}$; 并且我们有

(a) M_{2k} 与 M_{2k+1} 的吻合度至少为 $\delta_{2k+1}+1$;

(b) $\left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k+1}}_{(\kappa,\beta_k)}\right)^{M_{2k}}(\varnothing) = \left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k+1}}_{(\kappa,\xi_0)}\right)^{M_{2k+1}}(\varnothing)$;

(c) 在 M_{2k+1} 中, δ_{2k+1} 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa + (\xi_0))$ 上的型.

由上面的结论 (b) 和 (c), 以及引理 3.89 中的 (b) 和 (c), 我们有下述结论:

(b′) $\left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k+1}}_{(\kappa,\beta_k)}\right)^{M_{2k}}(\varnothing) = \left(\mathrm{tp}^{\delta_{2k+1}}_{(\kappa,\xi_1)}\right)^{M_{2k+1}}(\varnothing)$;

(c′) 在 M_{2k+1} 中, δ_{2k+1} 保持 $\varnothing$ 在 $(\kappa + (\xi_1))$ 上的型.

由于 κ 在 M_{2k+1} 中是一个武丁基数, 此时单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件

在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足：

$$\begin{aligned} M &= M_{2k+1}; \quad & N &= M_{2k}; \\ \delta &= \delta_{2k+1}; & \eta &= \delta_{2k+1}; \\ \beta &= \xi_1; & \xi &= \xi_0 + 1; \\ \beta' &= \beta_k; & x &= \varnothing; \\ y &= \varnothing; & x' &= \varnothing; \end{aligned}$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$v = v$". 于是, 令 λ 和 E 由单步引理提供. 根据定理 3.47, 超幂 $\prod_E^{M_{2k}} (M_{2k}, \in)$ 是有秩的. 令 δ^*, ξ^*, y^* 由单步引理提供. 根据单步引理之 (2^*), $y^* = \varnothing$. 令 $E_{2k+1} = E$, 以及令 $\delta_{2k+2} = \delta^*$. 如此将交错链 $\mathcal{C}_{2k+1}$ 延展成长度为 $2k+3$ 的交错链 $\mathcal{C}_{2k+2}$. 令 $\beta_{k+1} = \xi^*$. 单步引理中的不等式 $\xi^* < i_E^N(\beta')$ 保证了下面的不等式：

$$\beta_{k+1} = \xi^* < i_E^{M_{2k}}(\beta_k) = j_{2k,2k+2}(\beta_k).$$

由此, 再加上关于 k 的归纳假设条件 (d), 我们就得到关于 $k+1$ 的归纳假设条件 (d).

令 $\mathcal{C}$ 为由这些交错链 $\mathcal{C}_k$ 综合而成的长度为 ω 的交错链.

令 $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{Even}}^{\mathcal{C}}$ 为偶数树枝 Even 所确定的正向极限模型. 我们断言此极限模型没有秩. 这一点由归纳构造中的条件 (d) 所保证：

$$\forall m < n < \omega \left(j_{2n,\text{Even}}^{\mathcal{C}}(\beta_n) < j_{2m,\text{Even}}^{\mathcal{C}}(\beta_m) \right).$$

于是, 序列 $\left\langle j_{2n,\text{Even}}^{\mathcal{C}}(\beta_n) \;\middle|\; n < \omega \right\rangle$ 就是极限模型中序数的一个无穷单调递降序列. □

引理 3.91 *每一根交错链都是一棵足够强的迭代树.*

证明 根据定义 3.33, 一棵迭代树 $\mathcal{T} = (\mathcal{M}, T, \langle E_n \mid n < \omega \rangle)$ 是一棵足够强的迭代树当且仅当

$$\forall m < \omega \left(\mu^{\mathcal{T}}(m) < (\text{QiangDu}(E_m))^{\mathcal{M}_m} \right),$$

其中

$$\mu^{\mathcal{T}}(m) = \sup\left\{ \text{Crit}(E_n) \mid (n+1)_T^- \leqslant m < n \right\}.$$

根据推论 3.30 中的 (b), 对于所有满足不等式 $(n+1)_T^- \leqslant m < n$ 的 n 和 m, 都有

$$\text{Crit}(E_n) < (\text{QiangDu}(E_m))^{\mathcal{M}_m}.$$

因此, 如果 $m < \omega$ 具备 "$\left\{ n \;\middle|\; (n+1)_T^- \leqslant m < n \right\}$ 是有限集合" 这个性质, 那么一定有

$$\mu^{\mathcal{T}}(m) < (\text{QiangDu}(E_m))^{\mathcal{M}_m}.$$

而这种有线性条件在交错链中是一个很平凡的要求：对于 $m, n \in \omega$,

$$(m+1)_C^- \leqslant n < m \leftrightarrow m = n+1,$$

其中, C 是 ω 的交错链迭代树偏序. □

应用这个引理以及推论 3.31, 我们有下述推论：

推论 3.33 *设 $\mathcal{T}$ 是一根交错链. 设 b 是 $\mathcal{T}$ 的一根树枝. 如果 $\mathcal{T}$ 在 b 之外是连续无秩的, 那么 b 一定是 $\mathcal{T}$ 的一根有秩树枝.*

证明 根据引理 3.91, 每一棵交错链都是足够强的迭代树; 根据推论 3.31, 我们就得到所要的结论. □

3.3.4 投影集合稳赢性

在这一小节中, 我们来解决投影集合的胜负确定性问题. 这里的工作主要都是马丁 [23] 或者马丁与斯蒂尔 [24]合作的结果.

$\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合稳赢性

现在我们来证明马丁的 $\mathbf{\Pi}_1^1$-稳赢性定理. 这个马丁定理证明的基本思路是利用可测基数上的正规超滤子以及它的乘积超滤子, 利用定理 3.15 所给出的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合的特征 (3), 将一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 赛事 $\mathscr{G}(A)$ 转换成一个关于空间 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \kappa^{\omega}$ 上的闭集 A^* 的赛事 $\mathscr{G}(A^*)$, 并且保证两个赛事之间的输赢紧密相关, 即由此及彼, 可以将赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 上的稳赢策略转化为赛事 $\mathscr{G}(A)$ 上相应的稳赢策略. 能够实现这种转化的资源就是可测基数上的正规超滤子. 马丁的这个确定性证明可以说是早期揭示大基数对实数子集合产生直接深远影响的一个重要例子.

定理 3.53 (Martin) *如果存在一个可测基数, 那么所有的 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合 A 都是稳赢集合.*

证明 设 A 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合. 令映射 $\mathbb{N}^{<\omega} \ni s \mapsto <_s$ 由定理 3.15 中的 (3) 提供, 以及由此诱导出来的映射 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \ni x \mapsto <_x$. 这样, 对于 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$$<_x = \bigcup \{<_{x\restriction_n} \mid n < \omega\},$$

并且 $\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(x \in A \leftrightarrow <_x \text{ 是一个秩序}\right)$.

设 κ 为一个可测基数. 令 U 为 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 递归地定义 $[\kappa]^n (1 \leqslant n < \omega)$ 上的超滤子 U^n 如下：

(i) $U^1 = \left\{\left\{\{\alpha\} \in [\kappa]^1 \mid \alpha \in X\right\} \mid X \in U\right\}$;

23 D. Martin, Measurable cardinals and analytic games, Fund, Math., 1969/70, 66: 287-291.

24 D. A. Martin and J. R. Steel, A proof of projective determinacy, J. Amer. Math. Soc., 1989, 2, no.1: 71-125.

(ii) 对于 $X \subseteq [\kappa]^{n+1}$, 令 $X \in U^{n+1}$ 当且仅当

$$\{\alpha < \kappa \mid \{\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \in [\kappa - (\alpha+1)]^n \mid \{\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n\} \in X\} \in U^n\} \in U.$$

如前所知, 每一个 U^n 都是 $[\kappa]^n$ 上的 κ-完全的非平凡的超滤子.

令 $A^* \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \kappa^\omega$ 为如下确定的子集合：对于 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 以及 $\xi \in \kappa^\omega$, 令

$$(x, \xi) \in A^* \leftrightarrow \forall m \in \omega \forall n \in \omega \ (m <_x n \leftrightarrow \xi_m < \xi_n).$$

我们来定义一个关于 A 的辅助赛事 $\mathscr{G}(A^*)$. 赛局中博弈双方依旧是张三和李四; 具体过程要求如下：

张三	(a_0, ξ_0)		(a_2, ξ_1)		(a_4, ξ_2)		$\cdots$
李四		a_1		a_3		a_5	$\cdots$

其中, $\forall i < \omega \ (a_i \in \omega)$, $\forall j < \omega \ (\xi_j \in \kappa)$. 张三赢得这一局当且仅当

$$(\langle a_i \mid i < \omega \rangle, \langle \xi_j \mid j < \omega \rangle) \in A^*.$$

换句话说, 张三赢得这一局当且仅当他所选择的序数序列 $\langle \xi_j \mid j < \omega \rangle$ 定义了一个从 $(\omega, <_x)$ 到 $(\kappa, <)$ 的序嵌入映射

$$\omega \ni j \mapsto \xi_j \in \kappa.$$

这样, 在赢得一局 (x, ξ) 的前提下, 张三不仅得到 $x \in A$ 并且证明了 $x \in A$ 这个事实. 因此, 如果张三有一个稳赢策略, 那么 $\mathrm{TY}(A^*) \subset A$.

注意 $A^* \subset \mathbb{N}^\omega \times \kappa^\omega$ 是一个闭子集. 因此赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 是一个可以分出输赢的赛事, 就是说或者张三有一个稳赢策略, 或者李四有一个稳赢策略. 这是因为, 如同命题 I.3.10 的证明那样, 如果李四没有一个稳赢策略, 那么张三一定有一个稳赢策略.

断言一 如果张三在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中有一个稳赢策略, 那么张三在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中有一个稳赢策略.

事实上, 设 σ^* 是张三在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中的一个稳赢策略. 那么他只需要按照 σ^* 去应对, 但是不向李四公开 σ^* 所选择的序数. 这样的策略 σ 自然赢得每一局. 具体而言, 令 $\sigma(\varnothing) = (\sigma^*(\varnothing))_0$; 设 $\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k} \rangle$ 是到目前为止的赛局进程, 并且张三一直按照暗中进行的赛局进程

$$\langle (a_0, \xi_0), a_1, (a_2, \xi_1), \cdots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \xi_k) \rangle$$

应用 σ^* 来计算应对. 设 a_{2k+1} 是李四的挑战. 那么就令

$$\sigma(\langle a_0, a_1, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1} \rangle) = (\sigma^*(\langle (a_0, \xi_0), a_1, \cdots, (a_{2k}, \xi_k), a_{2k+1} \rangle))_0.$$

断言二　如果李四在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中有一个稳赢策略, 那么李四在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中有一个稳赢策略.

这是我们应当用到 κ 是一个可测基数的地方.

设 τ^* 是李四在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中的一个稳赢策略. 我们来为李四定义一个在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中的稳赢策略 τ.

令 $n\in\omega$. 令 $p=\langle a_0,a_1,\cdots,a_{2n-1},a_{2n}\rangle\in\mathbb{N}^{<\omega}$. 对 $v\in[\kappa]^{n+1}$, 存在唯一的 $\langle\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n\rangle\in v^{n+1}$ 来满足映射

$$(n+1)\ni j\mapsto\xi_j\in v$$

是线性有序集合 $((n+1),<_p)$ 与线性有序集合 $(v,<)$ 的同构映射. 令

$$q^*(p,v)=\langle(a_0,\xi_0),a_1,(a_2,\xi_1),\cdots,(a_{2n},\xi_n)\rangle.$$

定义

$$\tau(p)=m\leftrightarrow\left\{v\in[\kappa]^{n+1}\mid\tau^*\left(q^*(p,v)\right)=m\right\}\in U^{n+1}.$$

由于 U^{n+1} 是 κ-完全的, $\tau(p)$ 有定义. 令

$$Z_p=\left\{v\in[\kappa]^{n+1}\mid\tau(p)=\tau^*\left(q^*(p,v)\right)\right\}.$$

那么 $Z_p\in U^{n+1}$. 根据 U^{n+1} 的定义, 令 $X_p\in U$ 来见证 $[X_p]^{n+1}\subseteq Z_p$.

令 $X=\bigcap\{X_p\mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\wedge\exists k<\omega\ (\mathrm{dom}(p)=2k+1)\}$. 那么, $X\in U$, 并且, 对于 $n\in\omega$, 以及 $p\in\mathbb{N}^{(n+1)}$, 都有

$$\forall v\in[X]^{n+1}\ \left(\tau(p)=\tau^*\left(q^*(p,v)\right)\right).$$

现在我们来证明 τ 是李四在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中的一个稳赢策略.

设 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 满足 $\forall n<\omega\ (x(2n+1)=\tau(x\restriction_{2n+1}))$. 我们来证明 $x\notin A$. 假设不然. 那么 $x\in A$. 由于 $|X|=\kappa>\aleph_0$, 令映射 $\omega\ni j\mapsto\xi_j\in X$ 将秩序集 $(\omega,<_x)$ 嵌入到 $(X,<)$ 之中. 考虑在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 上的一个赛局:

张三	(a_0,ξ_0)		(a_2,ξ_1)		(a_4,ξ_2)		$\cdots$
李四		a_1		a_3		a_5	$\cdots$

这是在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中合乎李四依照他的稳赢策略 τ^* 应对的一个赛局. 可是, 这一局的比赛结果 $(x,\xi)\in A^*$, 即张三赢得此局. 这就是一个矛盾. □

仔细分析一下 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 胜负确定性定理的证明可以为我们后面的发展提供启示. 首先, 我们来看看可测基数 κ 可以为 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数子集合提供一些什么样的有用资源.

设 κ 是一个可测基数, U 是 κ 上的一个非平凡的 κ-完全的正规超滤子. 递归地定义 $[\kappa]^n(1 \leqslant n < \omega)$ 上的超滤子 U^n 如下:

(i) $U^1 = \big\{\big\{\{\alpha\} \in [\kappa]^1 \mid \alpha \in X\big\} \mid X \in U\big\}$;

(ii) 对于 $X \subseteq [\kappa]^{n+1}$, 令 $X \in U^{n+1}$ 当且仅当

$$\{\alpha < \kappa \mid \{\{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \in [\kappa - (\alpha+1)]^n \mid \{\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n\} \in X\} \in U^n\} \in U.$$

如前所知, 每一个 U^n 都是 $[\kappa]^n$ 上的 κ-完全的非平凡的超滤子.

设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合. 令函数

$$\mathbb{N}^{<\omega} \ni p \mapsto <_p \in \big\{<^n \mid (n, <^n) \text{ 是线性有序集 } \wedge\ n < \omega\big\}$$

为定理 3.15 中的特征 (3) 所提供, 并且对于 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$<_x = \bigcup \{<_{x\restriction_n} \mid n < \omega\}.$$

这样, $\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \big(x \in A \leftrightarrow <_x \text{ 是一个秩序}\big)$.

如下定义 $\omega \times \kappa$ 上的树 $T \subset \mathbb{N}^{<\omega} \times \kappa^{<\omega}$:

$$T = \big\{(p, s)\ \big|\ \mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(s) \wedge s : (\mathrm{dom}(p), <_p) \to (\kappa, <) \text{ 是保序映射}\big\}.$$

那么 $A = p[T]$. 欲证此等式, 设 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 如果 $g \in [T(x)]$, 那么 $g : (\omega, <_x) \to (\kappa, <)$ 是一个保序映射, 从而 $<_x$ 是一个秩序, 因此, $x \in A$; 反之, 如果 $x \in A$, 那么 $<_x$ 是一个秩序, 从而存在从 $(\omega, <_x)$ 到 $(\kappa, <)$ 的保序映射, 从而 $[T(x)]$ 非空, 所以 $x \in p[T]$.

固定 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$. 对于每一个 $v \in [\kappa]^{\mathrm{dom}(p)}$, 存在唯一的一个双射 $s^p_v : \mathrm{dom}(p) \to v$ 来实现 $(p, s^p_v) \in T$. 对于 $X \subseteq \kappa^{\mathrm{dom}(p)}$, 令

$$X \in \pi(p) = U_p \leftrightarrow \Big\{v \in [\kappa]^{\mathrm{dom}(p)} \mid s^p_v \in X\Big\} \in U^{\mathrm{dom}(p)}.$$

这样得到的集合 $\pi[\mathbb{N}^{<\omega}] = \{U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ 具备如下特点:

(1) 对于每一个 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$, U_p 都是 $\kappa^{\mathrm{dom}(p)}$ 上的一个 κ-完全的超滤子;

(2) 令 $T_p = \big\{s \in \kappa^{\mathrm{dom}(p)} \mid (p, s) \in T\big\}$, 那么 $T_p \in U_p$;

(3) 如果 $p, q \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 并且 $\mathrm{dom}(p) < \mathrm{dom}(q)$ 以及 $p = q\restriction_{\mathrm{dom}(p)}$, 那么 U_q 投影到 U_p;

(4) 如果 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 那么 $x \in p[T]$ 当且仅当 $\langle U_{x\restriction_n} \mid n < \omega\rangle$ 具备可数完备性, 即对于任意一个这个序列上的选择函数

$$\langle A_n \in U_{x\restriction_n} \mid n < \omega\rangle,$$

都一定存在一个函数 $f \in \kappa^\omega$ 来见证事实: $\forall n < \omega\ (f\restriction_n \in A_n)$.

前三条由定义直接得到. 我们来验证 (4).

固定 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 以及选择函数 $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$. 固定 $n < \omega$. 令

$$B_n = \left\{ v \in [\kappa]^n \;\middle|\; s_v^{x\restriction_n} \in A_n \right\}.$$

那么, $B_n \in U^n$. 根据乘积超滤子 U^n 的定义, 令 $X_n \in U$ 来见证 $[X_n]^n \subset B_n$. 再令 $X = \bigcap \{X_n \mid n < \omega\}$. 那么 $X \in U$. 从而 $\forall n < \omega\ ([X]^n \in U^n)$. 设 $x \in p[T]$. 从而 $x \in A$. 这样 $<_x$ 是一个秩序. 令 $f : (\omega, <_x) \to (X, <)$ 为一个保序映射. 那么对于 $n < \omega$, $(x \restriction_n, f \restriction_n) \in T$, 并且 $\mathrm{rng}\,(f \restriction_n) \in B_n$, 因此, $f \restriction_n \in A_n$. 反之, 因为对于 $n < \omega$, 都有 $T_{x\restriction_n} \in U_{x\restriction_n}$, 所以可以取一个 $f : \omega \to \kappa$ 满足 $\forall n < \omega\ (f \restriction_n \in T_{x\restriction_n})$, 因此, $f \in [T(x)]$, 即 $x \in p[T]$.

后面我们称这样的性质为 κ-整齐苏斯林性质, 即树 T 是一棵 κ-整齐苏斯林树; A 是一个 κ-整齐苏斯林集合. 用这样的名词, 我们就有下述定理:

定理 3.54 设 κ 是一个可测基数. 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合, 那么一定存在 $\omega \times \kappa$ 上的一棵 κ-整齐苏斯林树 T 以至于 A 是 T 的投影: $A = p[T]$, 从而 A 是一个 κ-整齐苏斯林集合.

整齐苏斯林集合

应用上面分析所给出的启示, 现在对前面所引进的树 (见定义 3.7) 添加一种新的装置以便更深入地探讨可定义实数子集的正则性. 这种装置便是满足一定条件的超滤子系统.

定义 3.35 设 X 是一个非空集合.

(1) 令 $m(X) = \{\mu \mid \mu\text{ 是 } X \text{ 上的一个 } \sigma\text{-完全的超滤子}\}$; 称 μ 是 X 上的一个测度当且仅当 $\mu \in m(X)$; 并且对于 $\mu \in m(X)$, 对于 $A \subset X$, 令 $(\mu(A) = 1 \leftrightarrow A \in \mu)$.

(2) 对于 $\mu \in m(X)$, 令 $j_\mu : \mathrm{V} \to M_\mu$ 为由测度 μ 所诱导的从 V 到 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, \mu)$ 的传递化 M_μ 的嵌入映射.

(3) 设 Y 是一个非空集合, 并且 $X = Y^{<\omega}$. 对于 $\mu \in m(X)$, 令

$$k(\mu) = \min \left\{ i < \omega \;\middle|\; m\left(Y^i\right) = 1 \right\}.$$

对于 $\mu_1, \mu_2 \in m(X)$, 称 μ_2 投影到 μ_1, 记成 $\mu_1 <_{RK} \mu_2$, 当且仅当 $k(\mu_1) < k(\mu_2)$, 并且对于每一个 $A \subset Y^{k(\mu_1)}$, 都有 $\mu_1(A) = 1 \leftrightarrow \mu_2\left(A \uparrow Y^{k(\mu_2)}\right)$, 其中

$$A \uparrow Y^{k(\mu_2)} = \left\{ s \in Y^{k(\mu_2)} \mid s \restriction_{k(\mu_1)} \in A \right\}.$$

对于 $m(X)$ 中的满足 $\mu_1 < \mu_2$ 的两个测度 μ_1 和 μ_2, 令 $j_{\mu_1,\mu_2} : M_{\mu_1} \to M_{\mu_2}$ 为满足下述映射复合等式的典型嵌入映射:

$$j_{\mu_2} = j_{\mu_1,\mu_2} \circ j_{\mu_1}.$$

(4) 设 Y 是一个非空集合, 并且 $X = Y^{<\omega}$.

(a) 称 $\langle \mu_n \mid n < \omega \rangle \in m(X)^\omega$ 为 $m(X)$ 上的一个**塔序列**当且仅当

(i) $\forall n < \omega \ (k(\mu_n) = n)$;

(ii) $\forall m < n < \omega \ (\mu_m < \mu_n)$.

(b) 称 $m(X)$ 中的塔序列 $\langle \mu_n \mid n < \omega \rangle \in m(X)^\omega$ 是**可数完备**的当且仅当对于任意一个这个塔序列上的选择函数

$$\langle A_n \in \mu_n \mid n < \omega \rangle,$$

都一定存在一个函数 $f \in Y^\omega$ 来见证事实: $\forall n < \omega \ (f\restriction_n \in A_n)$.

注意, 上面的一个集合 B 上的超滤子 U_1 投影到另一个集合 A 上的超滤子 U_2 事实上是超滤子之间的一种广义汝丁-柯斯乐偏序[25](定义 2.12): 设 U_1 是 B 上的一个超滤子, U_2 是 A 上的一个超滤子, 称 U_1 投影到 U_2, 或者说, U_1 在汝丁–柯斯乐序下小于 U_2, $U_1 <_{RK} U_2$, 当且仅当存在一个函数 $f : B \to A$ 来见证下述归结关系:

$$\forall X \in U_2 \left(f^{-1}[X] \in U_1\right).$$

在上述 $\mu_1 <_{RK} \mu_2$ 定义中的投影映射为 $s \mapsto s\restriction_{k(\mu_1)}$.

引理 3.92 设 Y 是一个非空集合, 并且 $X = Y^{<\omega}$. 设 $\langle \mu_n \mid n < \omega \rangle \in m(X)^\omega$ 为 $m(X)$ 上的一个塔序列. 那么它是一个可数完备塔序列的充分必要条件是由这个塔序列所确定的模型与嵌入映射系统

$$(\langle M_{\mu_n} \mid n < \omega \rangle, \langle j_{m,n} : M_{\mu_m} \to M_{\mu_n} \mid m < n < \omega \rangle)$$

的正向极限是一个有秩结构.

证明 (练习.) □

下面我们为 $\omega \times \kappa$ 上的树添置一种合适的测度结构, 并以此来引进带有测度结构的树的概念：整齐树以及弱整齐树.

定义 3.36 设 $\kappa > 0$ 为一个序数. 设 T 是一棵 $\omega \times \kappa$ 上的树.

(1) 称 T 为一棵 δ-**整齐**树当且仅当存在一个非空的 $B \subset \omega^{<\omega}$ 以及一个定义在 B 上的具备下述特点的函数

$$\pi : B \to m\left(\kappa^{<\omega}\right),$$

(a) 如果 $s \in \mathrm{dom}(\pi)$, 那么超滤子 $\pi(s)$ 是 δ-完全的, 并且 $\pi(s)(T_s) = 1$;

(b) 对于任意一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x \in p[T]$ 当且仅当

(i) $\{x\restriction_n \mid n < \omega\} \subset \mathrm{dom}(\pi)$;

25 Rudin-Keisler Order.

(ii) 序列 $\langle \pi(x\restriction_n) \mid n<\omega\rangle$ 是 $m(\kappa^{<\omega})$ 上的可数完备的塔序列.

(2) 称 T 为一棵 $<\delta$-**整齐**树当且仅当 $\forall\alpha<\delta$, T 都是 α-整齐的.

(3) 称 T 为一棵**整齐**树当且仅当它在某个序数 δ 上是 δ-整齐的.

由于平凡测度也都是 σ-完全的, 对于任何序数 δ 而言, $\omega\times 1$ 上所有的树都是 δ-整齐的.

定义 3.37 设 $A\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(1) A 是 δ-**整齐苏斯林**集合当且仅当 A 是某棵 δ-整齐树 T 的投影: $A=p[T]$;

(2) A 是 $<\delta$-**整齐苏斯林**集合当且仅当 $\forall\alpha<\delta$, A 都是 α-整齐苏斯林集合;

(3) A 是**整齐苏斯林**集合当且仅当 $\exists\alpha$, A 是一个 α-整齐苏斯林集合.

例 3.13 如果 κ 是一个可测基数, 那么每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数子集都是 κ-整齐苏斯林集合.

整齐树投影集合的稳赢特性

利用整齐树的概念, 我们可以将 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 集合的稳赢特性推广到所有整齐苏斯林实数集合之上.

定理 3.55 设 κ 是一个不可数的正则基数. 设 T 是 $\omega\times\lambda$ 上的一棵 κ-整齐苏斯林树以及 $A=p[T]$. 那么 A 是一个胜负确定的集合.

证明 我们来证明赛事 $\mathscr{G}(A)$ 是胜负确定的赛事.

令 $\{U_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\}$ 为见证 T 是 κ-整齐苏斯林树的测度集合, 并且 $A=p[T]$.

令 $A^*\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\lambda^\omega$ 为如下确定的子集合: 对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 以及 $\xi\in\lambda^\omega$, 令

$$(x,\xi)\in A^*\leftrightarrow\forall m\in\omega\left((x\restriction_m,\xi\restriction_m)\in T\right).$$

也就是说, $A^*=[T]$.

考虑如下赛事 $\mathscr{G}(A^*)$. 赛局中博弈双方依旧是张三和李四; 具体过程要求如下:

张三	(a_0,ξ_0)		(a_2,ξ_1)		(a_4,ξ_2)		$\cdots$
李四		a_1		a_3		a_5	$\cdots$

其中, $\forall i<\omega\ (a_i\in\omega)$, $\forall j<\omega\ (\xi_j\in\lambda)$. 张三赢得这一局当且仅当

$$(\langle a_i \mid i<\omega\rangle,\langle\xi_j \mid j<\omega\rangle)\in A^*.$$

由于 A^* 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\lambda^\omega$ 上的一个闭集, 赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 的一个胜负确定的赛事.

设 σ^* 是张三在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 上的稳赢策略. 令 σ 为同定理 3.53 的证明那样所规定的应对策略, 即张三暗地里使用 σ^* 来模拟赛事 $\mathscr{G}(A)$ 从而计算出所需要的自然数来应对. 具体而言, 令 $\sigma(\varnothing)=(\sigma^*(\varnothing))_0$; 设 $\langle a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{2k-1},a_{2k}\rangle$ 是到目

前为止的赛局进程, 并且张三一直按照暗中进行的赛局进程

$$\langle (a_0, \xi_0), a_1, (a_2, \xi_1), \cdots, a_{2k-1}, (a_{2k}, \xi_k) \rangle$$

应用 σ^* 来计算应对. 设 a_{2k+1} 是李四的挑战. 那么就令

$$\sigma(\langle a_0, a_1, \cdots, a_{2k}, a_{2k+1} \rangle) = (\sigma^*(\langle (a_0, \xi_0), a_1, \cdots, (a_{2k}, \xi_k), a_{2k+1} \rangle))_0.$$

这样确定的 σ 是张三在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中的一个稳赢策略.

现在设 τ^* 是李四在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 上的稳赢策略. 对于 $p \in \mathbb{N}^{2n+1}$ 以及 $s \in \lambda^{n+1}$, 令

$$q^*(p, s) = \langle (p(0), s(0)), p(1), \cdots, (p(2n), s(n)) \rangle.$$

对于 $p \in \mathbb{N}^{2n+1}$, 令

$$\tau(p) = m \leftrightarrow \left\{ s \in T_{p\restriction_{(n+1)}} \mid \tau^*(q^*(p, s)) = m \right\} \in U_{p\restriction_{(n+1)}}.$$

由于 $U_{p\restriction_{(n+1)}}$ 是 κ-完全的, $\kappa > \omega$, 所以 $\tau(p)$ 的定义是毫无歧义的.

我们来验证 τ 是在赛事 $\mathscr{G}(A)$ 中李四的一个稳赢策略. 设 x 是赛事中的一局进程的结果, 并且在其中, 李四总应用 τ 来计算每一步的应对. 欲得一个矛盾, 假设 $x \in A$. 由于 $A = p[T]$, 这就意味着 $[T(x)] \neq \varnothing$. 令 $Z_0 = \{\varnothing\}$; 对于 $n < \omega$, 令

$$Z_{n+1} = \left\{ s \in T_{x\restriction_{(n+1)}} \mid \tau^*\left(q^*(x \restriction_{(2n+1)}, s)\right) = x(2n+1) \right\}.$$

这样, 对于 $n \in \omega$ 都有 $Z_n \in U_{x\restriction_n}$. 根据 κ-整齐树定义的条件 (3), 令 $f : \omega \to \lambda$ 满足要求:

$$\forall n < \omega \ (f \restriction_n \in Z_n).$$

根据 τ 的定义, 赛局结果

$$\langle (x(0), f(0)), x(1), (x(2), f(1)), x(3), \cdots, (x(2n), f(n)), x(2n+1), \cdots \rangle$$

就是在此赛局中李四按照 τ^* 的计算应对出来的结果. 于是 $(x, f) \in A^*$. 可是, τ^* 是李四在赛事 $\mathscr{G}(A^*)$ 中的稳赢策略. 这就是一个矛盾. □

弱整齐树

一个可测基数 κ 可以令每一个 $\mathbf{\Pi}_1^1$ 实数集合都是 κ-整齐集合, 那么一个自然的问题就产生了: $\mathbf{\Sigma}_1^1$ 实数集合以及 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 实数集合是否也都可以在可测基数下成为整齐集合? 这里自然涉及的问题是, 在什么样的大基数下, 整齐集合会关于取补封闭, 会关于投影封闭? 我们先来分析投影问题. 这就自然产生了弱整齐性的概念.

定义 3.38 设 $\kappa > 0$ 为一个序数. 设 T 是一棵 $\omega \times \kappa$ 上的树.

(1) 称 T 为一棵 δ-**弱整齐**树当且仅当存在一个非空的 $B \subset \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$ 以及一个定义在 B 上的具备下述特点的函数

$$\pi : B \to m\left(\kappa^{<\omega}\right).$$

(a) 如果 $(s,t) \in \operatorname{dom}(\pi)$, 那么超滤子 $\pi(s,t)$ 是 δ-完全的, 并且 $\pi(s,t)\,(T_s) = 1$, 其中

$$T_s = \left\{t \in \kappa^{\operatorname{dom}(s)} \mid (s,t) \in T\right\}.$$

(b) 对于任意一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x \in p[T]$ 当且仅当存在一个具备下述特点的 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

(i) $\{(x\restriction_n, y\restriction_n) \mid n < \omega\} \subset \operatorname{dom}(\pi)$;

(ii) 序列 $\langle \pi\left(x\restriction_n, y\restriction_n\right) \mid n < \omega\rangle$ 是 $m\left(\kappa^{<\omega}\right)$ 上的可数完备的塔序列.

(2) 称 T 为一棵 $< \delta$-**弱整齐**树当且仅当 $\forall \alpha < \delta$, T 都是 α-弱整齐的.

(3) 称 T 为一棵**弱整齐**树当且仅当它在某个序数 δ 上是 δ-弱整齐的.

由于平凡测度也都是 σ-完全的, 对于任何序数 δ 而言, $\omega \times \omega$ 上所有的树都是 δ-弱整齐的.

定义 3.39 设 $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(1) A 是 δ-**弱整齐苏斯林**集合当且仅当 A 是某棵 δ-弱整齐树 T 的投影: $A = p[T]$;

(2) A 是 $< \delta$-**弱整齐苏斯林**集合当且仅当 $\forall \alpha < \delta$, A 都是 α-弱整齐苏斯林集合;

(3) A 是**弱整齐苏斯林**集合当且仅当 A 是一个 ω_1-弱整齐苏斯林集合.

[题外话] 整齐苏斯林实数集合的概念可以被理解为实数闭子集的一种一般化, 验证表示树的整齐性的超滤子则保证树的投影集合的胜负确定性; 弱整齐苏斯林集合的概念便可以自然而然地被理解为实数解析子集的一般化.

例 3.14 如果 κ 是一个可测基数, 那么每一个 $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 实数子集都是 κ-弱整齐苏斯林.

引理 3.93 设 T 是一棵 $\omega \times \kappa$ 上的树. T 是 δ-弱整齐的当且仅当存在一个具备下述特点的可数子集 $\sigma \subset m\left(\kappa^{<\omega}\right)$:

(a) $\forall \mu \in \sigma$ (σ 是 δ-完全的);

(b) 对于任意的 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x \in p[T]$ 的充分必要条件是存在具备下述特点的来自 σ 的可数完备塔序列 $\langle \mu_n \mid n < \omega\rangle$:

$$\forall n < \omega \ \left(\mu_n\left(T_{x\restriction_n}\right) = 1\right).$$

证明 (练习.) □

[记号约定] 对于 $(x,y)\in X^\omega\times Y^\omega$, 令

$$\ll x,y\gg=\{\langle (x(k),y(k))\mid k<n\rangle\mid n<\omega\}.$$

注意, $\ll x,y\gg\subset (X\times Y)^{<\omega}$, 从而 $\bigcup\ll x,y\gg$ 是一个从 ω 到 $X\times Y$ 的函数, 因而也就是树 $(X\times Y)^{<\omega}$ 上的一根树枝. 当 $X=Y=\omega$ 时, 这便是将 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 与 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ 等同起来的一种方式. 于是, 我们称 $A\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为整齐苏斯林集合当且仅当 $\{\ll x,y\gg\mid (x,y)\in A\}$ 是整齐苏斯林集合. 类似地, 有 κ-整齐苏斯林集合; 弱整齐苏斯林集合; κ-弱整齐苏斯林集合. 进一步地, 对于 $(p,s)\in X^{<\omega}\times Y^{<\omega}\wedge\mathrm{dom}(p)=\mathrm{dom}(s)$, 令

$$p\odot s=\langle (p(k),s(k))\mid k<\mathrm{dom}(p)=\mathrm{dom}(s)\rangle\in (X\times Y)^{<\omega}.$$

对于 $t\in (X\times Y)^{<\omega}$, 令

$$(t)_0=\langle (t(k))_0\mid k<\mathrm{dom}(t)\rangle\ \wedge\ (t)_1=\langle (t(k))_1\mid k<\mathrm{dom}(t)\rangle,$$

那么 $t=(t)_0\odot(t)_1$. 从而当 $(p,s)\in X^{<\omega}\times Y^{<\omega}\wedge\mathrm{dom}(p)=\mathrm{dom}(s)$ 时,

$$(p,s)=((p\odot s)_0,(p\odot s)_1).$$

在后面, 我们将默认这种自然的转换而不再加以明示. 此外, 我们也令

$$\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}=\left\{p\odot s\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^{<\omega}\mid (p,s)\in\mathbb{N}^{<\omega}\times\mathbb{N}^{<\omega}\wedge\mathrm{dom}(p)=\mathrm{dom}(s)\right\}.$$

以及对于 $(x,y)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$\ll x,y\gg=\{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)\mid n<\omega\}=\{\langle (x(k),y(k))\mid k<n\rangle\mid n<\omega\}.$$

定理 3.56 设 $A\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 设 $\kappa>2^{\aleph_0}$. 下列命题对等:

(1) A 是 κ-弱整齐集合.

(2) 存在一个具备下述特点的集合 $B\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

(a) B 是 κ-整齐集合;

(b) $A=\mathrm{TY}(B)=\left\{x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid\exists y\ ((x,y)\in B)\right\}$.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 设 B 由 (2) 给出. 令 $\tilde{T}$ 是 $(\omega\times\omega)\times\lambda$ 上的一棵 κ-整齐苏斯林树, 以及

$$\left\{\tilde{U}_{p\odot r}\mid p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\}$$

见证 $\tilde{T}$ 是一棵 κ-整齐苏斯林树的超滤子集合. 令 $B^*=\{\ll x,y\gg\mid (x,y)\in B\}$.

令 $T = \left\{p \odot (r \odot s) \mid ((p \odot r) \odot s) \in \tilde{T}\right\}$. 对于 $x \in N^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} x \in A &\leftrightarrow [T(x)] \neq \varnothing \\ &\leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists z \in \lambda^{\omega}\ (\ll x, \ll y, z \gg\gg \in [T]) \\ &\leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists z \in \lambda^{\omega}\ \left(\ll\ll x, y \gg, z \gg \in \left[\tilde{T}\right]\right) \\ &\leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \left(\left[\tilde{T}(\ll x, y \gg)\right] \neq \varnothing\right). \end{aligned}$$

固定 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$ 以及 $r \in \mathbb{N}^{\mathrm{dom}(p)}$. 对于 $Z \subseteq T_p$, 令

$$\tilde{Z} = \left\{s \in \lambda^{\mathrm{dom}(p)} \mid (r \odot s) \in Z\right\}.$$

然后令 $U_{(p,r)} = \left\{Z \subseteq T_p \;\middle|\; \tilde{Z} \in \tilde{U}_{p\odot r}\right\}$.

这样超滤子集合 $\{U_{(p,r)} \mid (p \odot r) \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\}$ 见证 T 是一棵 κ-弱苏斯林树.

(1) $\Rightarrow$ (2). 设 T 是 $\omega \times \lambda$ 上的一棵 κ-弱苏斯林树, 超滤子集合

$$\left\{U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\}$$

见证 T 是 κ-弱苏斯林树, 以及 $A = p[T]$.

令 $(x, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 如果存在一个具备下述特点的序列 $\langle Z_n \mid n < \omega\rangle$

$$\left(\forall n < \omega\ \left(Z_n \in U_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}\right)\right) \wedge (\forall f \in \lambda^{\omega}\, \exists m \in \omega\ (f \restriction_m \notin Z_m)),$$

那么就取这样的一个序列, 并且对 $n < \omega$, 令 $Z_n^{(x,y)} = Z_n$; 其他情形对 $n < \omega$, 令 $Z_n^{(x,y)} = T_{x\restriction_n}$.

对 $p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$Z_{(p,r)} = \bigcap\left\{Z_{\mathrm{dom}(p)}^{(x,y)} \mid (x, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \wedge p \odot r \subset \ll x, y \gg\right\}.$$

那么, $Z_{(p,r)} \in U_{(p,r)}$.

定义 $(\omega \times \omega) \times \lambda$ 上的树 $\tilde{T}$ 如下:

$$\tilde{T} = \left\{(p \odot r) \odot s \;\middle|\; s \in Z_{(p,r)} \wedge p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\}.$$

对于 $p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$\tilde{U}_{p\odot r} = U_{(p,r)} \cap \mathfrak{P}\left(\tilde{T}_{p\odot r}\right).$$

这样, $\tilde{U}_{p\dot{r}}$ 本质上就是 $U_{(p,r)}$, 因而是 κ-完全的超滤子.

集合 $\left\{\tilde{U}_{p\odot r} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\}$ 满足见证 $\tilde{U}$ 是一棵 κ-整齐苏斯林树的前两条要求. 我们需要验证第三条要求.

设 $\ll x,y \gg \in \left[\tilde{T}\right]$. 令 $f \in \left[\tilde{T}(\ll x,y \gg)\right]$. 设

$$\left\{X_n \in \tilde{U}_{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)} \mid n < \omega\right\}.$$

假设没有 $g:\omega \to \lambda$ 来满足 $\forall n < \omega\ (g \restriction_n \in X_n)$. 根据 $\left\langle Z_n^{(x,y)} \;\middle|\; n < \omega\right\rangle$ 的定义, 由此得到没有 $g:\omega \to \lambda$ 来满足 $\forall n < \omega\ \left(g \restriction_n \in Z_n^{(x,y)}\right)$. 对于 $n < \omega$, $Z_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} \subseteq Z_n^{(x,y)}$. 因此, 没有 $g:\omega \to \lambda$ 来满足 $\forall n < \omega\ \left(g \restriction_n \in Z_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}\right)$. 可是,

$$\forall n < \omega \left(Z_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} = \tilde{T}_{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)}\right).$$

由于 $\forall n < \omega\ \left(f \restriction_n \in \tilde{T}_{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)}\right)$, 我们得到一个矛盾.

令 $B = \left\{(x,y) \mid \ll x,y \gg \in \left[\tilde{T}\right]\right\}$.

断言 $A = \mathrm{TY}(B)$.

设 $x \in \mathrm{TY}(B)$. 令 y 满足 $(x,y) \in B$. 令 f 满足 $f \in \left[\tilde{T}(\ll x,y \gg)\right]$. 这样, 对于 $n < \omega$, 我们都有

$$f \restriction_n \in \tilde{T}_{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)} = Z_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} \subseteq Z_n^{(x,y)} \subseteq T_{x\restriction_n}.$$

因此, $f \in [T(x)]$, 从而 $x \in A$.

现在设 $x \in A$. 应用 κ-弱苏斯林树的第三个条件于序列

$$\left\langle Z_{\left(x\restriction_{\mathrm{dom}(r)}, r\right)} \;\middle|\; r \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle.$$

这是一个与序列

$$\left\langle \tilde{T}_{\left(x\restriction_{\mathrm{dom}(r)}\right)\odot r} \;\middle|\; r \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$$

等同的序列. 我们就有一个 $(y,f) \in \mathbb{N}^\omega \times \lambda^\omega$ 来满足

$$\forall n < \omega \left(f \restriction_n \in \tilde{T}_{(x\restriction_n)\odot(y\restriction_n)}\right).$$

于是, $f \in \left[\tilde{T}(\ll x,y \gg)\right]$. 从而, $(x,y) \in B$. □

定理 3.57 设 $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 设 $\delta > 2^{\aleph_0}$. 那么 A 是 δ-弱整齐苏斯林集合的充分必要条件是 A 是某个 δ-整齐苏斯林集合 B 的连续映像.

证明 (练习.) □

弱整齐苏斯林实数集合具有我们所关注的正则性:

定理 3.58 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 κ-弱整齐苏斯林集合, 那么 A 是勒贝格可测的; 具有贝尔特性; 若不可数则必包含一个完备子集.

证明 (练习.) □

在文献 26 中, 武丁证明了下述具有先导意义的定理:

定理 3.59 (Woodin) *如果存在一个超紧基数, 那么 $L(\mathbb{R})$ 中的每一个实数子集都是弱整齐苏斯林集合.*

随着深入分析的发展, 保障上述定理结论成立的大基数假设最终被武丁减弱到优化层次:

定理 3.60 (Woodin) *假设存在无穷多个武丁基数. 令 δ 为它们的上确界. 那么 $L(\mathbb{R})$ 中的每一个实数子集都是 $(<\delta)$-弱整齐苏斯林集合.*

下面我们将上述定理的证明综合到胜负确定性分析之中. 从技术的角度看, 这将是前面引进的荟萃塔力迫构思和迭代树构造综合使用的结果. 在本章的最后, 我们还会看到在无穷多个武丁基数存在的假设下, 前面所引进的广泛贝尔特性、整齐苏斯林特性以及弱整齐苏斯林特性, 事实上归于同一.

整齐苏斯林实数集合补集的树表示

我们应用超滤子之间的投影关系定义了超滤子塔序列从而引进了整齐苏斯林树的概念. 现在需要进一步审视这种投影关系, 从而得到将表示一个实数集合的弱整齐树转化为表示其补集的树的方法.

设 U_1 是集合 B 上的超滤子, U_2 是集合 A 上的超滤子, 函数 $\chi: B \to A$ 是见证 $U_1 <_{RK} U_2$ 的一个投影函数. 那么 χ 自然地诱导出从 V^A 到 V^B 的一个映射 χ^*: 对于 $f \in V^A$, 以及 $b \in B$, 令

$$\chi^*(f)(b) = f(\chi(b)).$$

这样, χ^* 又自然地诱导出从超幂 $\prod_{U_2}(V,\in)$ 到超幂 $\prod_{U_1}(V,\in)$ 的映射 $i_{(U_2,U_1,\chi)}$: 对于 $f \in V^A$,

$$i_{(U_2,U_1,\chi)}(\llbracket f \rrbracket_{U_2}) = \llbracket \chi^*(f) \rrbracket_{U_1},$$

并且 $i_{(U_2,U_1,\chi)}: \prod_{U_2}(V,\in) \prec \prod_{U_1}(V,\in)$ 是一个同质嵌入映射.

设 T 是 $\omega \times \lambda$ 上的一棵 κ-整齐树. 设 $\langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega} \rangle$ 见证 T 是 κ-整齐树的超滤子集合. 对于 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 令 $\pi_p = \pi_{U_p}: \prod_{U_p}(V,\in) \cong (\text{ult}(V,U_p),\in)$ 为传递化同构映射. 对于 $\mathbb{N}^{<\omega}$ 中的 $p \subset q$, 对于 $s \in \lambda^{\text{dom}(q)}$, 令 $\chi_{q,p}(s) = s\restriction_{\text{dom}(p)}$, 即 $\chi_{q,p}$ 为 $U_q <_{RK} U_p$ 的投影函数; 令

$$i_{p,q} = \pi_q \circ i_{(U_p,U_q,\chi_{(q,p)})} \circ \pi_p^{-1}.$$

26 W. H. Woodin, Supercompact cardinals, sets of reals and weakly homogeneous trees, PNAS, 1988, 85: 6587-6591.

对于 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$\left(\mathcal{M}_x; \left\langle i^x_{x\restriction_n} \;\middle|\; n < \omega \right\rangle\right)$$

为共顶同质嵌入系统

$$\left(\left\langle \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, U_{x\restriction_n}) \mid n < \omega \right\rangle; \left\langle i_{(x\restriction_m, x\restriction_n)} \;\middle|\; m \leqslant n < \omega \right\rangle\right)$$

的正向极限, 其中, $i^x_{x\restriction_n} : \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, U_{x\restriction_n}) \prec \mathcal{M}_x$ 为

$$\left\langle i_{(x\restriction_n, x\restriction_{n+k})} \;\middle|\; k < \omega \right\rangle$$

的正向极限同质嵌入映射. 那么

$$\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(x \in p[T] \leftrightarrow \left(\mathcal{M}_x; \left\langle i^x_{x\restriction_n} \;\middle|\; n < \omega \right\rangle\right) \text{是有秩的}\right).$$

定义 3.40 定义在 $\omega \times \mathrm{Ord}$ 上的一棵树 $\prod(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega} \rangle)$ 如下:
对于 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 以及 $t \in \mathrm{Ord}^{\mathrm{dom}(p)}$, 令 $(p, t) \in \prod(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega} \rangle)$ 当且仅当

$$\forall m < \mathrm{dom}(p)\, \forall n < \mathrm{dom}(p) \; \left(m < n \to t(n) < i_{(p\restriction_m, p\restriction_n)}(t(m))\right).$$

定理 3.61 设 T 是 $\omega \times \lambda\, (\lambda \geqslant \omega)$ 上的一棵 κ-整齐树. 设 $\langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega} \rangle$ 见证 T 是 κ-整齐树的超滤子集合. 设 $A = p[T]$. 令 $S = \prod(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega} \rangle)$. 那么

$$\mathbb{R} - A = p[S].$$

事实上, 如果 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^+$, 令

$$S\restriction_\alpha = \{(p, t) \in S \mid \mathrm{rng}(t) \subset \alpha\},$$

那么 $\mathbb{R} - A = p\,[S\restriction_\alpha]$.

证明 设 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 设 $[S(x)] \neq \varnothing$. 令 $f \in [S(x)]$. 对于每一个 $n < \omega$, 有

$$f(n+1) < i_{\left(x\restriction_n, x\restriction_{(n+1)}\right)}(f(n)).$$

这样, 不等式

$$i^x_{x\restriction_{(n+1)}}(f(n+1)) < i^x_{x\restriction_n}(f(n)) = i^x_{x\restriction_{(n+1)}}\left(i_{\left(x\restriction_n, x\restriction_{(n+1)}\right)}(f(n))\right).$$

对于每一个 $n < \omega$ 都成立. 于是, 极限模型 $\mathcal{M}_x$ 中有序数的一个无穷递降链

$$\left\langle i^x_{x\restriction_n}(f(n)) \;\middle|\; n < \omega \right\rangle.$$

也就是说, $\mathcal{M}_x$ 不是有秩的. 因此, $x \notin A$.

现在设 $x \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A)$. 这样, 树 $T(x)$ 是一棵有秩树. 令

$$\rho_x : T(x) \to |T(x)|^+$$

为树 $T(x)$ 上的典型赋秩函数. 对于 $n<\omega$, 令 $f_n : T_{x\restriction_n} \to |T(x)|^+$ 由下式定义: 对于 $s \in T_{x\restriction_n}$, 令

$$f_n(s) = \rho_x(s).$$

对于 $n<\omega$, 令 $t_n = \pi_{x\restriction_n}\left(\llbracket f_n \rrbracket_{U_{x\restriction_n}}\right)$. 对于 $n<\omega$, 因为对于 $s \in T_{x\restriction_{(n+1)}}$, 有

$$f_{n+1}(s) < f_n\left(s\restriction_n\right),$$

所以, $t_{n+1} < i_{\left(x\restriction_n, x\restriction_{(n+1)}\right)}\left(t_n\right)$. 这就表明 $[S(x)] \neq \varnothing$. 事实上, 对于 $n<\omega$,

$$\begin{aligned}
|t_n| &= \left|\left\{\llbracket g \rrbracket_{U_{x\restriction_n}} \;\middle|\; \pi_{x\restriction_n}\left(\llbracket g \rrbracket_{U_{x\restriction_n}}\right) < \pi_{x\restriction_n}\left(\llbracket f_n \rrbracket_{U_{x\restriction_n}}\right)\right\}\right| \\
&\leqslant \left|\left\{g : T_{x\restriction_n} \to \mathrm{Ord} \mid \forall t \in T_{x\restriction_n}\ (g(t) < f_n(t))\right\}\right| \\
&\leqslant |T(x)|^{|T(x)|} \leqslant 2^{|T(x)|},
\end{aligned}$$

因此, $t_n < \left(2^{|\lambda|}\right)^+$. 于是, 序列 $\langle t_n \mid n<\omega\rangle$ 见证不等式

$$[S\restriction_\alpha] \neq \varnothing$$

对于所有的 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^+$ 都成立. □

下面的定理是上述定理 3.61 的自然加强版. 它表明整齐树与上述定义出来的补集的表示树在任何小力迫构思扩张中依旧投影为互补集合.

定理 3.62 设 T 是 $\omega\times\lambda\,(\lambda\geqslant\omega)$ 上的一棵 κ-整齐树. 设 $\langle U_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\rangle$ 见证 T 是 κ-整齐树的超滤子集合. 设 $A = p[T]$. 设 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^+$, 令

$$S = \left\{(p,t) \in \coprod\left(T, \left\langle U_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right) \mid \mathrm{rng}(t) \subset \alpha\right\}.$$

如果 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思并且 $|P|<\kappa$, 那么 $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{R} - p\left[\check{T}\right] = p\left[\check{S}\right]$.

证明 这里用到定理 2.1 中 (d) 的证明思想: 一个可测基数在任意的小力迫构思扩张中仍旧是可测基数. 在那里我们只面对一个同质嵌入映射, 或者一个 κ-完全的超滤子. 这里我们需要面对一个 κ-完全的超滤子群. 但处理办法是一样的.

设 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ 是一个势严格小于 κ 的力迫构思.

固定 $p \in \omega^{<\omega}$. 令 $j_p : \mathrm{V} \prec M_p \cong \mathrm{ult}\,(\mathrm{V}, U_p)$.

令 $\dot{U}_p$ 为超滤子 U_p 在 V 的 $\mathbb{P}$-泛型扩张中生成的超滤子的 $\mathbb{P}$-名字. 即

$$\Vdash \dot{U}_p = \left\{Y \subseteq \check{T}_p \mid \exists X \in \check{U}_p\ (X \subseteq Y)\right\}.$$

应用定理 2.1 中 (d) 的证明思想可知在 V$[G]$ 中, $\dot{U}_p/G$ 是 T_p 上的一个 κ-完全的超滤子. 我们将验证这个事实的工作留作练习.

设 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子. 在 V$[G]$ 中, 令 $U_p^* = \dot{U}_p/G$ 以及令

$$j_p^* : \mathrm{V}[G] \prec M_p^* \cong \mathrm{ult}\left(\mathrm{V}[G], U_p^*\right).$$

对于 $p \subset q \in \omega^{<\omega}$, 令

$$j_{p,q}^* : M_p^* \prec M_q^*$$

为由等式 $j_q^* = j_{p,q}^* \circ j_p^*$ 所确定的同质嵌入映射 (注意 U_q^* 依旧投影到 U_p^*, 就如同 U_q 投影到 U_p 那样). 这样, 我们有下述事实:

(i) 如果 $f : T_p \to \mathrm{V}$ 是 V$[G]$ 中的函数, 那么必有 V 中的函数 $g : T_p \to \mathrm{V}$ 来实现等式:

$$[\![f]\!]_{U_p^*} = [\![g]\!]_{U_p^*};$$

(ii) 如果 $f : T_p \to \mathrm{V}$ 是 V 中函数, 那么 $[\![f]\!]_{U_p^*} = [\![f]\!]_{U_p}$;

(iii) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \left(j_p^*(\alpha) = j_p(\alpha)\right)$.

事实上这些只是定理 2.1 中 (d) 的证明的重述: $j^*\left(\dot{x}/G\right) = \left(j\left(\dot{x}\right)\right)/G$. 我们将独立的详细验证留作练习.

现在我们来证明: 在 V$[G]$ 中, $\mathbb{R} - p\,[T] = p\,[S]$.

断言一 在 V$[G]$ 中, $p\,[T] \cap p\,[S] = \varnothing$.

在 V 中, 定义一棵树 $T \odot S$ 如下:

$$T \odot S = \{(p, s \odot t) \mid (p, s) \in T \wedge (p, t) \in S\}.$$

无论是在 V 中, 还是在 $V[G]$ 中, 都有 $p[T \odot S] = p[T] \cap p[S]$. 因此, $p[T] \cap p[S] = \varnothing$ 当且仅当 $T \odot S$ 是有秩的. 由于 $T \odot S$ 在 V 中有秩, 它在 V$[G]$ 中也就有秩.

断言二 在 V$[G]$ 中, 如果 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} - p[T]$, 那么 $x \in p[S]$.

因为 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} - p[T]$, $T(x)$ 在 V$[G]$ 中就是有秩的. 令 $\rho : T(x) \to |T(x)|^+$ 为 $T(x)$ 的典型赋秩函数: 对于 $s \in T(x)$,

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \neg\left(\exists t \in T(x)\,(s \subset t)\right), \\ \sup\{\rho(t) + 1 \mid t \in T(x) \wedge s \subset t\} & \text{如果 } \exists t \in T(x)\,(s \subset t). \end{cases}$$

对于 $i < \omega$, 令

$$\beta_i = [\![\rho \restriction T_{x \restriction i}]\!]_{U_{x\restriction i}^*}.$$

那么对于 $m < n < \omega$, 有

$$\beta_n < j_{x\restriction m, x\restriction n}^*\left(\beta_m\right).$$

因此, $(x, \langle \beta_n \mid n < \omega\rangle) \in [S]$. 所以, $x \in p[S]$. □

推论 3.34 设 κ 是一个不可数的基数. 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是 κ-整齐苏斯林实数集合, 那么 A 是 $(<\kappa)$-广泛贝尔集合.

证明 直接由定理 3.61 和定理 3.62 综合而得. □

现在我们来探讨弱整齐树的投影集的补集的树表示问题.

设 T 是 $\omega \times \lambda$ 上的一棵 κ-弱整齐树. 设

$$\left\langle U_{(p,s)} \;\middle|\; p \odot s \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega} \right\rangle$$

见证 T 是 κ-弱整齐树的超滤子集合, 即

(1) $\forall p \in \mathbb{N}^{<\omega}\, \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}\ \left(T_p \in U_{(p,s)}\right)$;

(2) $\forall p \odot r \subseteq q \odot s \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\ \left(U_{(q,s)} <_{RK} U_{(p,r)}\ \left(T_q \ni t \mapsto t \restriction_{\mathrm{dom}(p)} \in T_p\right)\right)$;

(3) 设 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\left\langle Z_r \in U_{\left(x\restriction_{\mathrm{dom}(r)}, r\right)} \;\middle|\; r \in \mathbb{N}^{<\omega} \right\rangle$, 那么

$$x \in p[T] \leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists f \in \lambda^{\omega}\, \forall n < \omega \left(f \restriction_n \in Z_{y\restriction_n}\right).$$

对于 $p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$\pi_{(p,r)} = \pi_{U_{(p,r)}} : \prod_{U_{(p,r)}} (\mathrm{V}, \in) \cong \left(\mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, U_{(p,r)}\right), \in\right)$$

为传递化同构映射. 对于 $\mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$ 中的 $p \odot r \subset q \odot t$, 对于 $s \in \lambda^{\mathrm{dom}(q)}$, 令

$$\chi_{q,p}(s) = s \restriction_{\mathrm{dom}(p)},$$

即 $\chi_{q,p}$ 为 $U_{(q,s)} <_{RK} U_{(p,r)}$ 的投影函数; 令

$$i_{((p,r),(q,s))} = \pi_{(q,s)} \circ i_{\left(U_{(p,r)}, U_{(q,s)}, \chi_{(q,p)}\right)} \circ \pi^{-1}_{(p,r)}.$$

对于 $(x, y) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$\left(\mathcal{M}_{(x,y)};\ \left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} \;\middle|\; n < \omega \right\rangle\right)$$

为共顶同质嵌入系统

$$\left(\left\langle \mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, U_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}\right) \;\middle|\; n < \omega \right\rangle; \left\langle i_{((x\restriction_m, y\restriction_m),(x\restriction_n, y\restriction_n))} \;\middle|\; m \leqslant n < \omega \right\rangle\right)$$

的正向极限, 其中, $i^{(x,y)}_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} : \mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, U_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}\right) \prec \mathcal{M}_{(x,y)}$ 为

$$\left\langle i_{((x\restriction_n, y\restriction_n),(x\restriction_{n+k}, y\restriction_{n+k}))} \;\middle|\; k < \omega \right\rangle$$

的正向极限同质嵌入映射. 那么

$$\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(x \in p[T] \leftrightarrow \exists y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \left(\mathcal{M}_{(x,y)};\ \left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n, y\restriction_n)} \;\middle|\; n < \omega \right\rangle\right) \text{是有秩的}\right).$$

令 $\omega \ni m \mapsto r_m \in \omega^{<\omega}$ 为一个具备下述特点的双射:

$$\forall n \in \omega\, \forall k \in \omega \left(r_n \subset r_k \to n \leqslant k\right).$$

定义 3.41 定义在 $\omega \times \text{Ord}$ 上的一棵树 $\prod^{w}\left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$ 如下:

对于 $p \in \mathbb{N}^{<\omega}$, 对于 $t \in \text{Ord}^{\text{dom}(p)}$, 令

$$p \odot t \in \prod^{w}\left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

当且仅当

$$\forall m, n < \text{dom}(p) \left(r_m \subseteq r_n \to t(n) < i_{\left(\left(p\restriction_{\text{dom}(r_m)}, r_m\right), \left(p\restriction_{\text{dom}(r_n)}, r_n\right)\right)}(t(m))\right).$$

定理 3.63 设 T 是 $(\omega \times \omega) \times \lambda\,(\lambda \geqslant \omega)$ 上的一棵 κ-弱整齐树. 设

$$\left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$$

见证 T 是 κ-弱整齐树的超滤子集合. 设 $A = p[T]$. 令

$$S = \prod^{w}\left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right).$$

那么 $\mathbb{R} - A = p[S]$. 事实上, 如果 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^{+}$, 令

$$S\restriction_{\alpha} = \{p \odot t \in S \mid \text{rng}(t) \subset \alpha\},$$

那么 $\mathbb{R} - A = p\left[S\restriction_{\alpha}\right]$.

证明 设 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 并且 $[S(x)] \neq \varnothing$. 令 $f \in [S(x)]$. 令 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 对于 $n < \omega$, 令

$$\ell_n = \min\{k \in \omega \mid r_k = y\restriction_n\}.$$

于是, 对于 $n < \omega$, 有

$$f(\ell_{n+1}) < i_{\left((x\restriction_n, y\restriction_n), \left(x\restriction_{(n+1)}, y\restriction_{(n+1)}\right)\right)}(f(\ell_n)),$$

因此, $i^{(x,y)}_{\left(x\restriction_{(n+1)}, y\restriction_{(n+1)}\right)}(f(\ell_{n+1})) < i^{(x,y)}_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}(f(\ell_n))$. 这样, 序列

$$\left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n, y\restriction_n)}(f(\ell_n)) \;\middle|\; n < \omega\right\rangle$$

就是 $\mathcal{M}_{(x,y)}$ 中的单调递减的序数序列. 从而, 对于每一个 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{(x,y)}$ 都不是有秩结构. 于是, $x \notin A$.

现在设 $x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A\right)$. 于是, 树 $T(x)$ 是有秩树. 令

$$\rho_x : T(x) \to |\lambda|^{+}$$

为典型赋秩函数. 对于 $n<\omega$, 令 $f_n: T_{x\upharpoonright_n} \to |\lambda|^+$ 为下述等式确定的函数：对于 $s \in T_{x\upharpoonright_n}$,

$$f_n(s) = \rho_x(s).$$

对于 $k<\omega$, 令

$$t_k = \pi_{\left(x\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_k)}, r_k\right)}\left(\llbracket f_{\mathrm{dom}(r_k)} \rrbracket_{U_{\left(x\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_k)}, r_k\right)}}\right).$$

那么 $\langle t_k \mid k<\omega\rangle \in [S(x)]$. 欲证此, 设 m 和 n 满足 $r_m \subset r_n$. 因为

$$\forall s \in T_{x\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_n)}}\ \left(f_{\mathrm{dom}(r_n)}(s) < f_{\mathrm{dom}(r_m)}\left(s\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_m)}\right)\right),$$

所以, $t_n < i_{\left(\left(x\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_m)}, r_m\right), \left(x\upharpoonright_{\mathrm{dom}(r_n)}, r_n\right)\right)}(t_m)$.

至于每一 $t_n < \left(2^{|\lambda|}\right)^+$ 的证明其和定理 3.61 的证明中的相应部分完全一样. □

类似地, 下述结论也成立：

定理 3.64 设 T 是 $\omega\times\lambda\,(\lambda\geqslant\omega)$ 上的一棵 κ-弱整齐树. 设 $A=p[T]$. 设

$$\left\langle U_{(p,r)} \mid p\odot r \in \mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$$

见证 T 是 κ-弱整齐树的超滤子集合. 设 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^+$, 令

$$S = \left\{(p,t) \in \coprod^{w}\left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p\odot r \in \mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right) \mid \mathrm{rng}(t) \subset \alpha\right\}.$$

如果 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思并且 $|P|<\kappa$, 那么 $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{R} - p\left[\check{T}\right] = p\left[\check{S}\right]$.

证明 (练习.) □

嵌入规范形式

定义 3.42 设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 称具备下列特点的二元组

$$\left(\left\langle M_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}, \left\langle k_{(s,t)} \mid s\subset t\in\omega^{<\omega}\right\rangle\right\rangle\right)$$

为 A 的一个嵌入规范形式:

(a) $M_0=\mathrm{V}$, 每一个 M_p 都是 ZFC 的一个传递真类模型;

(b) 对于 $s\subset t\in\omega^{<\omega}$, $k_{(s,t)}: M_s \prec M_t$;

(c) 对于 $s\subset t\subset r\in\omega^{<\omega}$, $k_{(s,r)} = k_{(t,r)}\circ k_{(s,t)}$;

(d) 对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x\in A$ 当且仅当共顶系统

$$\left(\left\langle M_{x\upharpoonright_n} \mid n<\omega\right\rangle, \left\langle k_{(x\upharpoonright_m, x\upharpoonright_n)} \mid m<n<\omega\right\rangle\right)$$

的正向极限 $\left(M_x, \left\langle k^x_{x\upharpoonright_n} \mid n<\omega\right\rangle\right)$ 是一个有秩模型.

我们的目标是证明下述定理：

定理 3.65 (Martin-Steel) 设 κ 是一个武丁基数.

$$\left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

是一棵 κ^+-弱整齐苏斯林树. 那么树

$$\coprod^{w} \left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

是一棵 $(< \kappa)$-整齐苏斯林树.

我们会先证明下面的相对简单一些的定理：

定理 3.66 (Martin-Steel) 设 κ 是一个武丁基数. $(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 是一棵 κ^+-整齐苏斯林树. 那么树

$$\coprod \left(T, \left\langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

是一棵 $(< \kappa)$-整齐苏斯林树.

我们希望给树 $\coprod (T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 的投影 $B = \mathbb{R} - p[T]$ 构造一个嵌入规范形式. 为达此目的, 我们对每一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 构造一种特别的长度不会超过 ω 的张子超幂**迭代树**, 称之为**交错链**.

我们的目标是要为一棵 κ^+-整齐苏斯林树的投影集合的补集的树表示添置超滤子系统以令其为 $(< \kappa)$-整齐苏斯林树. 因此, 我们需要有效地控制交错链的构造以至于由实数 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 所确定的交错链 $\mathcal{C}_x$ 上的偶数树枝 Even 的极限模型是无秩的当且仅当 $[T(x)] \neq \varnothing$. 我们怎样才能实现这一目标? 我们应当怎样构造来保证当 $[T(x)] \neq \varnothing$ 时, 偶数树枝一定是无秩树枝? 当 $[T(x)] = \varnothing$ 时, 偶数树枝一定是有秩树枝?

定理 3.66 的证明

定理 3.66 是如下命题：

设 κ 是一个武丁基数. $(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 是一棵 κ^+-整齐苏斯林树. 那么树

$$S = \coprod \left(T, \left\langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

是一棵 $(< \kappa)$-整齐苏斯林树.

下面我们先简要地说明一下证明的基本思路以及关键点.

我们的目标是为每一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 构造一棵交错链 $\mathcal{C}_x$ 以至于它的偶数树枝 Even 是无秩的当且仅当 $[T(x)] \neq \varnothing$.

为了保证当树 $T(x)$ 是有秩树时, Even 是交错链 $\mathcal{C}_x$ 的有秩树枝, 我们在构造过程中将保证 $\mathcal{C}_x$ 在 Even 之外是连续无秩的. 因为是交错链, $\mathcal{C}_x$ 只有两根树枝, 所

以问题对等于保证它的奇数树枝是无秩的. 当 $[T(x)]=\varnothing$ 时, 要保证 Odd 树枝是无秩的, 我们就安排对于所有的 $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 都有 $j_{0,\mathrm{Odd}}^{\mathcal{C}_y}(T(x))$ 是无秩的. 在交错链 $\mathcal{C}_x$ 的第 k 级构造的开始我们会从 $j_{0,2k\ominus1}^{\mathcal{C}_x}(T_{x\restriction_k})$ 中选一个 s_k. 在第 k 级构造期间, 我们会从 $j_{0,2k+1}^{\mathcal{C}_x}(T_{x\restriction_{(k+1)}})$ 中选一个 s_{k+1} 以至于 $j_{2k\ominus1,2k+1}^{\mathcal{C}_x}(s_k)\subset s_{k+1}$. 这个序列

$$\left\langle j_{2k\ominus1,\mathrm{Odd}}^{\mathcal{C}_x}(s_k)\;\middle|\;k<\omega\right\rangle$$

将会见证 $j_{0,\mathrm{Odd}}^{\mathcal{C}_x}(T(x))$ 是无秩的; 进一步地, 这些 s_k 还为我们提供见证 $\mathcal{C}_x$ 是在树枝 Even 之外连续无秩所需要的序数.

我们将利用单步引理来得到这些 s_k. 假设 $\langle U_p\mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\rangle$ 见证 T 是一棵 κ^+-整齐苏斯林树. 对于 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 令 $i_{p,q}:\mathrm{ult}(\mathrm{V},U_p)\prec\mathrm{ult}(\mathrm{V},U_q)$ 为由从 U_q 到 U_p 的自然投影函数所确定的同质嵌入映射. 给定 k, 考虑超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},U_{x\restriction_k})$. 这也就是 $i_{\varnothing,x\restriction_k}(\mathrm{V})$, 其中, 在这个模型中, 树 $i_{\varnothing,x\restriction_k}(T_{x\restriction_k})$ 中有一个典型的节点, 即

$$\mathbf{s}_{x\restriction_k}=\pi_{U_{x\restriction_k}}\left([\![\mathrm{Id}]\!]_{U_{x\restriction_k}}\right).$$

从 $\mathbf{s}_{x\restriction_k}$, 我们得到 $j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing,x\restriction_k}(T_{x\restriction_k}))$ 中的元素 $j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(\mathbf{s}_k)$. 在单步引理的资助下, 我们会递归地安排与某个序数 β_k 一道, 型

$$\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\beta_k+1}^{\delta_{2k}}\right)^{j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing,x\restriction_k}(\mathrm{V}))}\left(\left\langle j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing,x\restriction_k}(T))\right\rangle+j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(\mathbf{s}_k)\right)$$

与型 $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_0+1}^{\delta_{2k}}\right)^{M_{2k\ominus1}}\left(\left\langle j_{0,2k\ominus1}^{\mathcal{C}_x}(T)\right\rangle+s_k\right)$ 相同. 与此同时, 递归地我们将安排在 $j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing,x\restriction_k}(\mathrm{V}))$ 中, δ_{2k} 保持 $\left(\left\langle j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing,x\restriction_k}(T))\right\rangle+j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(\mathbf{s}_k)\right)$ 在 $\kappa+\beta_k+1$ 上的型.

序数 β_k 将会起到见证所需要的极限模型是无秩的作用, 如在引理 3.90 的证明中它们所起的作用那样. 只不过它们为我们提供的是在模型

$$\left(j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing}^{x})\right)\left(\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}\right)=j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing}^{x}(\mathrm{V}))$$

中的序数的无穷单调递降序列. 当 $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}$ 是有秩模型时, 这个序列就表明模型 $j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}(i_{\varnothing}^{x}(\mathrm{V}))$ 是无秩的. 根据绝对性以及 $j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}$ 的同质性, 我们知道 $\mathcal{M}_x=i_{\varnothing}^{x}(\mathrm{V})$ 就是无秩的. 因此, $[T(x)]\neq\varnothing$.

这一组序数 β_m 还将为我们提供证明整齐性所需要的超滤子. 对于 $k<\omega$, 有限序列 $\left\langle j_{2m,2k}^{\mathcal{C}_x}(\beta_m)\;\middle|\;m<k\right\rangle$ 将是 $j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(S_{x\restriction_k})$ 中的元素. 这个序列将为我们确定集合 $j_{0,2k}^{\mathcal{C}_x}(S_{x\restriction_k})$ 上的一个超滤子.

在给出证明之前, 我们需要再次强调一下由引理 3.88 所给出的序数四元组

$$(\nu,\xi_0,\xi_1,\rho).$$

这些将成为定理证明中的全局变量, 都具备引理 3.88 所确定的特殊含义.

证明 设 κ 是一个武丁基数. 设 $\gamma<\kappa$ 是一个不可达基数.

设 $(T,\langle U_p \mid p\in\mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 是一棵 κ^+-整齐苏斯林树. 这样, 我们有下述基本数据:

(a) 对于 $p\in\omega^{<\omega}$, $T_p=\{z\mid \ll p,z\gg\in T\}$, 以及

$$\pi_p:\prod_{U_p}(\mathrm{V},\in)\cong(\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_p)\,,\in)$$

为超幂 $\prod\limits_{U_p}(\mathrm{V},\in)$ 的传递化.

(b) 对于 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$,

$$i_{p,q}=\pi_q\circ i_{(U_p,U_q,\chi_{n,m})}\circ\pi_p^{-1},$$

其中, $\chi_{q,p}:T_q\to T_p$ 由下述等式所确定:

$$\forall z\in T_q\,\left(\chi_{q,p}(z)=z\restriction_{\mathrm{dom}(p)}\right),$$

以及 $i_{(U_p,U_q,\chi_{q,p})}:\prod\limits_{U_p}(\mathrm{V},\in)\prec\prod\limits_{U_q}(\mathrm{V},\in)$ 由下述等式所确定:

$$\forall f\in\mathrm{V}^{T_p}\,\left(i_{(U_p,U_q,\chi_{q,p})}\left([\![f]\!]_{U_p}\right)=[\![\chi^*(f)]\!]_{U_q}\right),$$

其中 $\forall z\in T_q\,\left(\chi^*_{q,p}(f)(z)=f\left(\chi_{q,p}(z)\right)\right)$. 对于 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 有

$$i_{p,q}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_p)\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_q)\,.$$

(c) 对于 $x\in\mathbb{N}^\omega$, $\left(\mathcal{M}_x,\left\langle i^x_{x\restriction_n}\;\middle|\;n<\omega\right\rangle\right)$ 是

$$(\langle\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},U_{x\restriction_n})\mid n<\omega\rangle\,,\langle i_{x\restriction_m,x\restriction_n}\mid m\leqslant n<\omega\rangle)$$

的正向极限.

(d) 对于 $x\in\mathbb{N}^\omega$, $x\in p[T]\leftrightarrow\mathcal{M}_x$ 是有秩的.

对于 $p\in\omega^\omega$, 令 $\mathbf{s}_p=\pi_p\left([\![\mathrm{Id}]\!]_{U_p}\right)$.

对 $p\in\omega^{<\omega}$ 施递归 (注意, $|p|=\mathrm{dom}(p)\in\omega$), 我们来定义四元组 $(\delta_p,\beta_p,\mathcal{C}_p,s_p)$, 其中 δ_p 和 β_p 是序数, 并且 $\delta_p<\kappa$; s_p 是一个长度为 $|p|$ 的序列; $\mathcal{C}_p$ 是 V 上的一个高度为 $2|p|+1$ 的交错链: 对于 $m<2|p|$, 张子为 E^p_m; 对于 $m\leqslant 2|p|$, 模型为 M^p_m; 对于 $m\,C\,n\leqslant 2|p|$, 嵌入映射为 $j^p_{m,n}$; 并且, 如果 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 那么

$$\mathcal{C}_p=\mathcal{C}_q\restriction_{2|p|+1}.$$

[记号约定] 为了简明起见, 我们引进四组简写记号：设 $p \in \omega^{<\omega}$, $q \subset q' \in \omega^{<\omega}$, $m \leqslant |p|$. 令

$$\check{i}^p_{q,q'} = j^p_{0,2|p|}\left(i_{q,q'}\right);$$

$$\check{N}^0_q = \check{i}^p_{\varnothing,q}\left(M^p_{2|p|}\right);$$

$$\check{T}^p_q = j^p_{0,2|p|}\left(i_{\varnothing,p}(T)\right);$$

$$\bar{\beta}^p_m = j^p_{2m,2|p|}\left(\beta_{p\restriction_m}\right).$$

嵌入映射 $\check{i}^p_{q,q'}$ 是嵌入映射 $i_{q,q'}$ 在 $M^p_{2|p|}$ 中的像; 类模型 $\check{N}^0_q$ 是超幂 $\mathrm{ult}\,(V, U_q)$ 在 $M^p_{2|p|}$ 中的像, 也就是

$$\check{N}^0_q = \left(j^p_{0,2|p|} \circ i_{\varnothing,q}\right)(\mathrm{V});$$

树 $\check{T}^p_q$ 是 $i_{\varnothing,q}(T)$ 在 $M^p_{2|p|}$ 中的像, 也就是 T 在 $\check{N}^p_q$ 中的像.

对于 $p = \varnothing$, 令 $\delta_\varnothing$ 保持 $\langle T\rangle$ 在 $(\kappa + \xi_0 + 1)$ 上的型. 令 $\beta_\varnothing = \xi_0$.

设 $p \in \omega^{<\omega}$. 递归定义关于 p 的假设条件为：对于 $m \leqslant |p|$, 四元组

$$\left(\delta_{p\restriction_m}, \beta_{p\restriction_m}, \mathcal{C}_{p\restriction_m}, s_{p\restriction_m}\right)$$

已经有定义, 且都满足上述关于定义四元组的基本要求; 同时, 下列条件 (令 $k = |p|$) 也已经具备：

(i) M^p_{2k} 与 $M^p_{2k\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_p + 1$;

(ii) $\left(\mathrm{tp}^{\delta_p}_{\kappa,\beta_p+1}\right)^{\check{N}^p_p}\left(\left\langle \check{T}^p_p\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}_p\right)\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta_p}_{\kappa,\xi_0+1}\right)^{M^p_{2k\ominus 1}}\left(\left\langle j^p_{0,2k\ominus 1}(T)\right\rangle + s_p\right)$;

(iii) 在 $\check{N}^p_p$ 中, δ_p 保持 $\left(\left\langle \check{T}^p_p\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}_p\right)\right)$ 在 $(\kappa + \beta_p + 1)$ 上的型;

(iv) 如果 $m < m' \leqslant k$, 那么 $\bar{\beta}^p_{m'} < \check{i}^p_{p\restriction_m, p\restriction_{m'}}\left(\bar{\beta}^p_m\right)$;

(v) $s_p \in j^p_{0,2k\ominus 1}\left(T_p\right)$, 并且, 对于所有的 $m \leqslant k$, 都有

$$j^p_{2m\ominus 1,2k\ominus 1}\left(s_{p\restriction_m}\right) \subset s_p;$$

(vi) $\forall m < k\ \left(\gamma < \delta_{p\restriction_m} = \mathrm{Crit}\left(E^p_{2m}\right) < \mathrm{Crit}\left(E^p_{2m+1}\right) < \delta_{p\restriction_{(m+1)}}\right)$.

注　条件 (i) 以及不等式 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{\varnothing,p}\right) \geqslant \mathrm{Crit}\left(i_{\varnothing,p}\right) > \kappa$ 保证模型 $\check{N}^p_p$ 与模型 $M^p_{2k\ominus 1}$ 的吻合度至少是 $\delta_p + 1$; 条件 (i)∼(iii) 是为了满足应用单步引理 (引理 3.86) 的需求; 条件 (iv) 将会确保在 $[T(x)] = \varnothing$ 时, 极限模型 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ 是无秩模型, 从而将允许我们利用这些 β_p 去定义见证整齐苏斯林特性所需要的超滤子; 条件 (vi) 则保证 V_γ 是交错链上的所有的同质嵌入映射的不动点.

设 $q \in \omega^{|p|+1}$ 并且 $p \subset q$. 令 $k = |p|$.

根据条件 (i) 以及 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{\varnothing,q}\right) > \kappa$, 我们知道 $\check{N}^p_q$ 与 $M^p_{2k\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_p + 1$.

注意到

$$\check{N}_q^p = \check{i}_{\varnothing,q}^p\left(M_{2k}^p\right) = \check{i}_{p,q}^p\left(\check{i}_{\varnothing,p}^p\left(M_{2k}^p\right)\right) = \check{i}_{p,q}^p\left(\check{N}_p^p\right)$$

和

$$\begin{aligned}\check{T}_q^p &= j_{0,2k}^p\left(i_{\varnothing,q}(T)\right)\\ &= j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\left(i_{\varnothing,p}(T)\right)\right)\\ &= \left(j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\right)\right)\left(j_{0,2k}^p\left(i_{\varnothing,p}(T)\right)\right)\\ &= \check{i}_{p,q}^p\left(\check{T}_p^p\right),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\left(\mathbf{s}_p\right)\right) &= \left(j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\right)\right)\left(j_{0,2k}^p\left(\mathbf{s}_p\right)\right)\\ &= \check{i}_{p,q}^p\left(j_{0,2k}^p\left(\mathbf{s}_p\right)\right).\end{aligned}$$

上述事实以及 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}_{p,q}^p\right) > \kappa$ 一起蕴涵下述等式:

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\beta_p+1}^{\delta_p}\right)^{\check{N}_p^p}\left(\langle\check{T}_p^p\rangle + j_{0,2k}^p\left(\mathbf{s}_p\right)\right)\\ =\ &\check{i}_{p,q}^p\left(\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\beta_p+1}^{\delta_p}\right)^{\check{N}_p^p}\left(\langle\check{T}_p^p\rangle + j_{0,2k}^p\left(\mathbf{s}_p\right)\right)\right)\\ =\ &\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\check{i}_{p,q}^p(\beta_p+1)}^{\delta_p}\right)^{\check{N}_q^p}\left(\langle\check{T}_q^p\rangle + j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\left(\mathbf{s}_p\right)\right)\right).\end{aligned}$$

于是, 根据 (ii), 上述等式中的最后一项便与型 $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_0+1}^{\delta_p}\right)^{M_{2k\ominus 1}^p}\left(\left\langle j_{0,2k\ominus 1}^p(T)\right\rangle + s_p\right)$ 相等.

由条件 (iii), 类似的分析表明在模型 $\check{N}_q^p$ 中,

$$\delta_p \text{ 保持 } \left(\langle\check{T}_q^p\rangle + j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\left(\mathbf{s}_p\right)\right)\right) \text{在} \kappa + \left(\check{i}_{p,q}^p\left(\beta_p+1\right)\right) \text{上的型}.$$

因为 κ 是 $j_{0,2k}^p$ 以及 $\check{i}_{\varnothing,q}^p$ 的不动点, 所以在 $\check{N}_q^p$ 中 k 也是一个武丁基数.

此时单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$\begin{aligned}M &= \check{N}_q^p; & N &= M_{2k\ominus 1}^p;\\ \delta &= \delta_p; & \eta &= \delta_p;\\ \beta &= \check{i}_{p,q}^p\left(\beta_p\right) + 1; & \xi &= \check{i}_{p,q}^p\left(\beta_p\right);\\ \beta' &= \xi_0 + 1; & x &= \langle\check{T}_q^p\rangle + j_{0,2k}^p\left(i_{p,q}\left(\mathbf{s}_p\right)\right);\\ y &= \left\langle j_{0,2k}^p\left(\mathbf{s}_q\right)(k)\right\rangle; & x' &= \left\langle j_{0,2k\ominus 1}^p(T)\right\rangle + s_p;\end{aligned}$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 “$\kappa + v$ 是最大的序数”.

于是, 以上述参数替换的方式应用引理 3.86, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 因为 λ, E, δ_p 都是 $\check{i}^p_{\varnothing,q}$ 的不动点, 所以 E 是 M^p_{2k} 中的 (δ_p, λ)-张子. 根据定理 3.47, 超幂 $\prod_E^{M^p_{2k\ominus 1}} \left(M^p_{2k\ominus 1}, \in\right)$ 是有秩的. 令 δ^*, ξ^*, y^* 由单步引理 (引理 3.86) 所提供. 由单步引理中的结论 (4^*), $\xi^* = \xi_0$. 置 $E^q_{2k} = E$. 这样将 $\mathcal{C}_p$ 延展至 $\mathcal{C}_q\restriction_{(2k+2)}$. 令 $\delta'_q = \delta^*$. 置 $s_q = \left(j^q_{2k\ominus 1,2k+1}(s_p)\right) + y^*$.

由于我们的构造是递归的, 迭代树 $\mathcal{C}_q$ 是 $\mathcal{C}_p$ 的合适的延展, 两棵迭代树之间自然会有等同的部分. 在接下来的分析中, 当下述等式合乎延展状态时, 我们将直接使用而不加额外说明: $M^q_n = M^p_n$; $E^q_n = E^p_n$; $j^q_{m,n} = j^p_{m,n}$.

根据嵌入映射 $j^q_{0,2k}$ 的同质性以及 s_r 的定义, 我们有下述等式:

$$\begin{aligned}
x + y &= \left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}\left(i_{p,q}(\mathbf{s}_p)\right) + \left\langle j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_q)(k) \right\rangle \\
&= \left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}\left(i_{p,q}(\mathbf{s}_p) + \langle (\mathbf{s}_q)(k) \rangle\right) \\
&= \left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}_q\restriction_k + \langle (\mathbf{s}_q)(k) \rangle\right) \\
&= \left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_q).
\end{aligned}$$

由于 $j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_q)$ 是树 $\check{i}^p_{\varnothing,q}(T) = \check{T}^p_q$ 中的一个元素, 单步引理中的结论 (2^*) 蕴涵

$$s_q \in j^q_{0,2k+1}(T_q).$$

因此, 关于 q 的条件 (v) 中的第一个要求得以满足. 由于 $j^q_{2k\ominus 1,2k+1}(s_p) \subseteq s_q$, 关于 q 的条件 (v) 中的第二个要求在 $m = k$ 时, 也得到满足.

这样我们有下述结论:

(a) M^q_{2k+1} 与 $\check{N}^p_q$ 的吻合度为 $\delta' + 1$;

(b) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_0}\right)^{M^q_{2k+1}} \left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T) \right\rangle + s_q\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\check{i}^p_{p,q}(\beta_p)}\right)^{\check{N}^p_q} \left(\left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_q)\right)$;

(c) 在 M^q_{2k+1} 中, δ' 保持 $\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T) \right\rangle + s_q\right)$ 在 $(\kappa + \xi_0)$ 上的型.

由 (a) 以及不等式 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{\varnothing,q}\right) > \delta'_q$, 就有 M^q_{2k+1} 与 M^q_{2k} 的吻合度至少为 $\delta'_q + 1$.

由 (b) 和 (c), 外加关于我们的固定参数的基本性质的引理 3.89 中的 (b) 和 (c), 我们就得到下面的两个结论:

(b1) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_1}\right)^{M^q_{2k+1}} \left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T) \right\rangle + s_q\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\check{i}^p_{p,q}(\beta_p)}\right)^{\check{N}^p_q} \left(\left\langle \check{T}^p_q \right\rangle + j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_q)\right)$;

(c1) 在 M^q_{2k+1} 中, δ' 保持 $\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T) \right\rangle + s_q\right)$ 在 $(\kappa + \xi_1)$ 上的型.

令 $f : j^p_{0,2k}(T_p) \to \mathrm{Ord}$ 为 M^p_{2k} 中的一个满足下述等式的函数:

$$\beta_p = \pi^{M^p_{2k}}_{j^p_{0,2k}(U_p)}\left(\llbracket f \rrbracket^{M^p_{2k}}_{j^p_{0,2k}(U_p)}\right).$$

换句话说, 令 f 满足等式 $\beta_p = \left(\check{i}^p_{\varnothing,p}(f)\right)\left(j^p_{0,2k}(\mathbf{s}_p)\right)$.

根据 (b1) 以及不等式 Crit $\left(\check{i}^{p}_{\varnothing,q}\right) > \delta'_q$, 令 $X \in j^p_{0,2k}(U_q)$ 具备下述特点：对于任意的 $t \in X$ 都有

(b2) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_1}\right)^{M^q_{2k+1}}\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,f(t\restriction_k)}\right)^{M^p_{2k}}\left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t\right).$

任取一个 $t \in X$. 由于 κ 在 M^q_{2k+1} 中还是武丁基数, 单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$\begin{aligned} M &= M^q_{2k+1}; & N &= M^p_{2k};\\ \delta &= \delta'_q; & \eta &= \delta'_q;\\ \beta &= \xi_1; & \xi &= \xi_0 + 1;\\ \beta' &= f(t\restriction k); & x &= \left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q;\\ y &= \varnothing; & x' &= \left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t; \end{aligned}$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$v = v$ ".

于是, 以上述参数替换的方式应用引理 3.86, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 根据定理 3.47, 超幂 $\prod\limits_{E}^{M^p_{2k}}(M^p_{2k}, \in)$ 是有秩的. 令 δ^*, ξ^*, y^* 由单步引理 (引理 3.86) 所提供 (我们将不会使用 ξ^* 和 y^*).

对于所有的 $u \in X$, 下述等式成立：

$$\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,f(u\restriction_k)}\right)^{M^p_{2k}}\left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + u\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,f(t\restriction_k)}\right)^{M^p_{2k}}\left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t\right).$$

嵌入映射 $i^{M^p_{2k}}_E$ 的同质性告诉我们：对于所有的 $u \in i^{M^p_{2k}}_E(X)$, 下述等式成立：

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{tp}^{i^{M^p_{2k}}_E(\delta')}_{\kappa,\left(i^{M^p_{2k}}_E(f)\right)(u\restriction_k)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k},E\right)}\left(\left\langle i^{M^p_{2k}}_E\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u\right)\\ =&\left(\mathrm{tp}^{i^{M^p_{2k}}_E(\delta')}_{\kappa,\left(i^{M^p_{2k}}_E(f)\right)\left(\left(i^{M^p_{2k}}_E(t)\right)\restriction k\right)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k},E\right)}\left(\left\langle i^{M^p_{2k}}_E\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + i^{M^p_{2k}}_E(t)\right). \end{aligned}$$

由于 $\delta^* < i^{M^p_{2k}}_E(\delta')$, 我们得到：对于所有的 $u \in i^{M^p_{2k}}_E(X)$, 下述等式成立：

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\kappa,\left(i^{M^p_{2k}}_E(f)\right)(u\restriction k)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k},E\right)}\left(\left\langle i^{M^p_{2k}}_E\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u\right)\\ =&\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\kappa,\left(i^{M^p_{2k}}_E(f)\right)\left(\left(i^{M^p_{2k}}_E(t)\right)\restriction k\right)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k},E\right)}\left(\left\langle i^{M^p_{2k}}_E\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + i^{M^p_{2k}}_E(t)\right). \end{aligned}$$

对于每一个 $u \in i^{M^p_{2k}}_E(X)$, 以 $z = \left\langle i^{M^p_{2k}}_E\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u$ 和 $\alpha = \left(i^{M^p_{2k}}_E(f)\right)(u\restriction k)$ 为参数应用单步引理的最后部分. 如果 $\hat{\xi}$ 与 $\hat{y}$ 是应用单步引理所得到的结果, 那么

引理中的 (b*) 就蕴涵 $\hat{y}=\varnothing$ 以及 $\hat{\xi}$ 是一个后继序数. 这样, 我们定义 $g(u)$ 为见证引理结论中的 (b*) 和 (c*) 成立的满足等式 $\hat{\xi}=\mu+1$ 以及 $\hat{y}=\varnothing$ 的最小序数 μ.

这样, 上面所定义的函数 $g :\in i_E^{M_{2k}^p}(X)\to \mathrm{Ord}$, 并且 $g\in \mathrm{ult}\,(M_{2k}^p, E)$.

于是, 我们置 $E_{2k+1}^q=E$ 就完成对于交错链迭代树 $\mathcal{C}_q$ 的定义:

$$M_{2k+2}^q=\mathrm{ult}\,(M_{2k}^p, E)\,,\quad j_{2k,2k+2}^q=i_E^{M_{2k}^p}.$$

单步引理中的结论 (1*) 就给出关于 q 的条件 (i).

令 $\delta_q=\delta^*$. 单步引理中的结论 (b*) 和 (c*) 给出下述结论:

对于 $u\in j_{2k,2k+2}^q(X)$, 都有

(b*) $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,g(u)+1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+2}^q}\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q(T)\right\rangle+u\right)$

$=\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_0+1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+1}^q}\left(\left\langle j_{0,2k+1}^q(T)\right\rangle+s_q\right)$;

(c*) 在 M_{2k+2}^q 中, δ_q 保持 $\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q(T)\right\rangle+u\right)$ 在 $(\kappa+g(u)+1)$ 上的型.

因为 $j_{2k,2k+2}^q(X)\in j_{0,2k+2}^q\,(U_q)$, 所以我们可以如下定义 β_q:

$$\beta_q=\pi_{j_{0,2k+2}^q(U_q)}^{M_{2k+2}^q}\left(\llbracket g\rrbracket_{j_{0,2k+2}^q(U_q)}^{M_{2k+2}^q}\right).$$

在 M_{2k+2}^q 中应用超幂基本定理, 应用下述等式:

$$j_{0,2k+2}^q\,(\mathbf{s}_q)=\pi_{j_{0,2k+2}^q(U_q)}^{M_{2k+2}^q}\left(\llbracket \mathrm{Id}\rrbracket_{j_{0,2k+2}^q(U_q)}^{M_{2k+2}^q}\right),$$

我们就看到上面的 (b*) 和 (c*) 蕴涵下列事实:

(ii*) $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\beta_q+1}^{\delta_q}\right)^{\check{N}_q^q}\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q\,(i_{\varnothing,q}(T))\right\rangle+j_{0,2k+2}^q\,(\mathbf{s}_q)\right)$

$=\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+1}^q}\left(\left\langle j_{0,2k+1}^q(T)\right\rangle+s_q\right)$;

(iii*) 在 $\check{N}_q^q$ 中, δ_q 保持 $\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q\,(i_{\varnothing,q}(T))\right\rangle+j_{0,2k+2}^q\,(\mathbf{s}_q)\right)$ 在 $(\kappa+\beta_q+1)$ 上的型.

这两个结论 (ii*) 和 (iii*) 正好关于 q 的递归假设条件 (ii) 和 (iii).

单步引理中的不等式 $\hat{\xi}<\alpha$ 就给出下述命题:

$$\forall u\in j_{0,2k+2}^q(X)\ \left(g(u)+1<\left(j_{2k,2k+2}^q(f)\right)(u\restriction k)\right).$$

根据这个命题, 有

$$\beta_q+1<\check{i}_{p,q}^q\left(j_{2k,2k+2}^q\,(\beta_p)\right).$$

因为 $\bar{\beta}^q_{k+1} = \beta_q$ 以及 $\bar{\beta}^q_k = j^q_{2k,2k+2}(\beta_p)$, 所以关于 q 的条件 (iv) 在 $m = k$ 和 $m' = k+1$ 时成立. 为验证关于 q 的条件 (iv) 在 $m < m' \leqslant k$ 时也成立, 注意下列等式:

$$j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_m\right) = \bar{\beta}^q_m \wedge j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_{m'}\right) = \bar{\beta}^q_{m'} \wedge j^q_{2k,2k+2}\left(\check{i}^p_{p\restriction m,p\restriction m'}\right) = \check{i}^q_{q\restriction m,q\restriction m'}.$$

根据这些事实, 关于 p 的条件 (iv), 以及映射 $j^q_{2k,2k+2}$ 的同质性, 我们有下述不等式:

$$\bar{\beta}^q_{m'} = j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_{m'}\right) < j^q_{2k,2k+2}\left(\check{i}^p_{p\restriction m,p\restriction m'}\left(\bar{\beta}^p_m\right)\right) = \check{i}^q_{q\restriction m,q\restriction m'}\left(\bar{\beta}^q_m\right).$$

又因为

$$\bar{\beta}^q_{k+1} < \check{i}^q_{q\restriction k,q\restriction(k+1)}\left(\bar{\beta}^q_k\right) < \check{i}^q_{q\restriction k,q\restriction(k+1)}\left(\check{i}^q_{q\restriction m,q\restriction k}\left(\bar{\beta}^q_m\right)\right) = \check{i}^q_{q\restriction m,q\restriction(k+1)}\left(\bar{\beta}^q_m\right),$$

关于 q 的条件 (iv) 在 $m < k$ 以及 $m' = k+1$ 时也成立.

我们已经验证了关于 q 的条件 (v) 中的第一个要求以及当 $m = k$ 时的第二个要求. 第二个要求中的其他情形由关于 p 的相应结论以及关于 q 的 $m = k$ 的结论联合给出.

因为单步引理确保 $\eta < \delta^*$, 我们就有不等式 $\delta_p < \delta'_q < \delta_q$. 现在 $\mathrm{Crit}\left(E^q_{2k}\right) = \delta_p$ 以及 $\mathrm{Crit}\left(E^q_{2k+1}\right) = \delta'_q$. 由于关于 p 的条件 (vi) 成立, 这些就给出关于 q 的条件 (vi).

这就完成了我们的构造以及验证了所需要的性质.

这样, 对于每一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 都有唯一的一棵交错链迭代树 $\mathcal{C}_x$ 来满足要求: 对于每一个 $n < \omega$, $\mathcal{C}$ 相应的限制就是 $\mathcal{C}_{x\restriction n}$.

依据这些交错链, 我们现在来证明系统

$$\left(\left\langle M^p_{2|p|} \;\middle|\; p \in \omega^{<\omega}\right\rangle, \left\langle j^p_{m,2|p|} \;\middle|\; p \in \omega^{<\omega} \wedge m < |p|\right\rangle\right)$$

给出 $\prod(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$ 的投影的嵌入规范形式 (定义 3.42).

令 $S = \prod(T, \langle U_p \mid p \in \mathbb{N}^{<\omega}\rangle)$.

设 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 令 $\mathcal{C}_x$ 为满足下述要求的高度为 ω 的交错链: 对于每一个 $n < \omega$, $\mathcal{C}$ 相应的限制就是 $\mathcal{C}_{x\restriction n}$.

断言一 $[S(x)] \neq \varnothing$ 当且仅当 $\tilde{M}^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ 是有秩的.

先假设 $[S(x)] \neq \varnothing$.

根据定理 3.61, $[T(x)] = \varnothing$, 也就是说, $T(x)$ 是一棵有秩的树. 令

$$\|\;\| : T(x) \to |T(x)|^+$$

为 $T(x)$ 的典型赋秩函数: 对于 $t \in T(x)$,

$$\|t\| = \begin{cases} 0 & 若\ \neg(\exists s \in T(x)\ (t \subset s)), \\ \sup\{\|s\|+1 \mid s \in T(x) \wedge t \subset s\} & 若\ \exists s \in T(x)\ (t \subset s). \end{cases}$$

对于 $k < \omega$, 令

$$\zeta_{2k} = j^{\mathcal{C}_x}_{0,2k}\left(\|s_\varnothing\|^{T(x)}\right);$$
$$\zeta_{2k+1} = \left\|s_{x\restriction(k+1)}\right\|^{j^{\mathcal{C}_x}_{0,2k+1}(T(x))}.$$

根据我们构造过程中的条件 (v), 有：对于 $m < n < \omega$,

$$\begin{aligned} j^{\mathcal{C}_x}_{2m\ominus1,2n\ominus1}(\zeta_{2m\ominus1}) &= \left\|j^{\mathcal{C}_x}_{2m\ominus1,2n\ominus1}(s_{x\restriction m})\right\|^{j^{\mathcal{C}_x}_{0,2n\ominus1}(T(x))} \\ &> \|s_{x\restriction n}\|^{j^{\mathcal{C}_x}_{0,2n\ominus1}(T(x))} \\ &= \zeta_{2n\ominus1}. \end{aligned}$$

那么, 序列 $\langle \zeta_n \mid n < \omega\rangle$ 就见证交错链 $\mathcal{C}_x$ 在树枝 Even 之外是连续无秩的. 根据推论 3.33, 树枝 Even 是 $\mathcal{C}_x$ 的一根有秩树枝. 从而极限模型 $\tilde{M}^{\mathcal{C}_x}_{\text{Even}}$ 是有秩的.

现在假设极限模型 $\tilde{M}^{\mathcal{C}_x}_{\text{Even}}$ 是有秩的.

对于 $m \in \omega$ 以及 $p \in \omega^{<\omega}$, 如果 $p \subset x$, $q \subset q' \in \omega^{<\omega}$, 令

$$\bar{\beta}^x_m = j^{\mathcal{C}_x}_{0,\text{Even}}(\beta_{x\restriction m});$$
$$\check{i}^x_{q,q'} = j^{\mathcal{C}_x}_{0,\text{Even}}(i_{q,q'});$$
$$\check{i}^x_p = j^{\mathcal{C}_x}_{0,\text{Even}}\left(i^x_p\right).$$

根据我们构造过程中的条件 (iv), 有：对于 $m < m' \leqslant k < \omega$,

$$\bar{\beta}^{x\restriction k}_{m'} < \check{i}^{x\restriction k}_{x\restriction m, x\restriction m'}\left(\bar{\beta}^{x\restriction k}_m\right).$$

根据 $j^{\mathcal{C}_x}_{2k,\text{Even}}$ 的同质性, 对上述不等式的两端应用这个嵌入映射, 有

$$\bar{\beta}^x_{m'} < \check{i}^x_{x\restriction m, x\restriction m'}\left(\bar{\beta}^x_m\right).$$

根据 $\check{i}^x_{x\restriction m'}$ 的同质性, 对上述不等式的两端应用这个嵌入映射, 有

$$\check{i}^x_{x\restriction m'}\left(\bar{\beta}^x_{m'}\right) < \check{i}^x_{x\restriction m}\left(\bar{\beta}^x_m\right).$$

这样序列 $\langle \check{i}^x_{x\restriction m}(\bar{\beta}^x_m) \mid m < \omega\rangle$ 是模型 $j^{\mathcal{C}_x}_{0,\text{Even}}\left(\tilde{M}_x\right)$ 的序数的一个无穷单调递降序列. 从而模型 $j^{\mathcal{C}_x}_{0,\text{Even}}\left(\tilde{M}_x\right)$ 是一个无秩的模型. 因此, $\tilde{M}_x$ 也就是一个无秩的模型. 这就意味着 $[T(x)] = \varnothing$. 于是, $[S(x)] \neq \varnothing$.

因此断言一得证.

令 $\alpha \geqslant \sup\{\beta_p+1 \mid p\in\omega^{<\omega}\}$.

对于 $p\in\omega^{<\omega}$, 令

$$W_p=\left\{X\subseteq (S\upharpoonright\alpha)_p \;\middle|\; \left\langle \bar\beta^p_m \;\middle|\; m<|p|\right\rangle \in j^p_{0,2|p|}(X)\right\}.$$

断言二 超滤子系统 $\langle W_p \mid p\in\omega^{<\omega}\rangle$ 见证树 $S\upharpoonright\alpha$ 是 γ-整齐的.

断言二的证明将由下面的一系列命题的证明组成.

(1) 每一个 W_p 都是 $(S\upharpoonright\alpha)_p$ 上的 γ-完全的超滤子. 令 $p\in\omega^{<\omega}$.

先证 $(S\upharpoonright\alpha)_p\in W_p$. 也就是要证明下述命题:

(i) $\forall m<|p| \left(\bar\beta^p_m< j^p_{0,2|p|}(\alpha)\right)$;

(ii) $\left\langle \bar\beta^p_m \;\middle|\; m<|p|\right\rangle\in j^p_{0,2|p|}\left(S_p\right)$.

关于 (i), 令 $m<|p|$. 那么 $\bar\beta^p_m=j^p_{2m,2|p|}\left(\beta_{p\upharpoonright m}\right)<j^p_{2m,2|p|}(\alpha)\leqslant j^p_{0,2|p|}(\alpha)$.

关于 (ii), 根据树 S 的定义, 我们必须证明：对于 $m<m'<|p|$, 都有

$$\bar\beta^p_{m'}<\left(j^p_{0,2|p|}\left(i_{p\upharpoonright m,p\upharpoonright m'}\right)\right)\left(\bar\beta^p_m\right).$$

而这个不等式由我们的交错链构造过程中的条件 (iv) 所保证. 所以 (ii) 成立.

这样, $(S\upharpoonright\alpha)_p\in W_p$. 从而 W_p 是 $(S\upharpoonright\alpha)_p$ 的一个超滤子.

根据我们交错链构造过程中的条件 (vi), 有 $\gamma\leqslant \mathrm{Crit}\left(j^p_{0,2|p|}\right)$. 所以 W_p 是 γ-完全的.

(2) 如果 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 那么 $\forall X\in W_p\ (\{t\in S_p \mid (t\upharpoonright|p|)\in X\}\in W_q)$.

设 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$. 令 $X\in W_p$. 那么

$$\begin{aligned}
&\{t\in S_p \mid (t\upharpoonright|p|)\in X\}\in W_q\\
\leftrightarrow&\left\langle \bar\beta^q_m \;\middle|\; m<|p|\right\rangle\in j^q_{0,2|q|}(X)\\
\leftrightarrow&\left\langle j^q_{2|p|,2|q|}\left(\bar\beta^p_m\right) \;\middle|\; m<|p|\right\rangle\in j^q_{2|p|,2|q|}\left(j^q_{0,2|p|}(X)\right)\\
\leftrightarrow&\left\langle \bar\beta^p_m \;\middle|\; m<|p|\right\rangle\in j^p_{0,2|p|}(X)=j^q_{0,2|p|}(X)\\
\leftrightarrow&\, X\in W_p.
\end{aligned}$$

对于 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 令 $i^\dagger_{p,q}:\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},W_p)\prec\mathrm{ult}\,(\mathrm{V},W_q)$ 为典型嵌入映射.

对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $\left(\mathcal{M}^\dagger_x,\left\langle i^{\dagger x}_{x\upharpoonright n} \;\middle|\; n<\omega\right\rangle\right)$ 为有顶系统

$$\left(\left\langle \mathrm{ult}\,(\mathrm{V},W_{x\upharpoonright n})\mid n<\omega, \left\langle i^\dagger_{x\upharpoonright m,x\upharpoonright n} \;\middle|\; m<n<\omega\right\rangle\right\rangle\right)$$

的正向极限.

(3) 对于 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x\in p[S]$ 当且仅当 $\mathcal{M}^\dagger_x$ 是有秩的.

固定 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 设 $x\in p[S]$. 根据断言一, 我们知道此时 $\tilde M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ 是有秩的. 我们需证明 $\mathcal{M}^\dagger_x$ 是有秩的. 为此, 只需证明 $\mathcal{M}^\dagger_x$ 可以同质地嵌入到 $\tilde M^{\mathcal{C}_x}_{\mathrm{Even}}$ 中.

对于 $n<\omega$, 以及 $\pi_{W_{x\restriction n}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction n}}\right)$, 令

$$k_n\left(\pi_{W_{x\restriction n}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction n}}\right)\right)=\left(j_{0,2n}^{\mathcal{C}_x}(f)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_m^{x\restriction n}\mid m<n\right\rangle\right).$$

第一, 我们验证 k_n 的定义毫无歧义. 设 $\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction n}}=\llbracket g\rrbracket_{W_{x\restriction n}}$. 那么

$$\{t\in S_{x\restriction n}\mid f(t)=g(t)\}\in W_{x\restriction n},$$

根据 $W_{x\restriction n}$ 的定义, 有

$$\left(j_{0,2n}^{\mathcal{C}_x}(f)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_m^{x\restriction n}\mid m<n\right\rangle\right)=\left(j_{0,2n}^{\mathcal{C}_x}(g)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_m^{x\restriction n}\mid m<n\right\rangle\right).$$

于是, $k_n\left(\pi_{W_{x\restriction n}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction n}}\right)\right)=k_n\left(\pi_{W_{x\restriction n}}\left(\llbracket g\rrbracket_{W_{x\restriction n}}\right)\right)$.

第二, 用相似的分析可证 $k_n:\mathrm{ult}(\mathrm{V},W_{x\restriction n}\prec M_{2n}^{\mathcal{C}_x}$.

第三, 如果 $m\leqslant n<\omega$, 并且 $\pi_{W_{x\restriction m}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction m}}\right)\in\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},W_{x\restriction m}\right)$, 那么

$$\begin{aligned}
&j_{2m,2n}^{\mathcal{C}_x}\left(k_m\left(\pi_{W_{x\restriction m}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction m}}\right)\right)\right)\\
&=\left(j_{2m,2n}^{\mathcal{C}_x}\left(j_{0,2m}^{\mathcal{C}_x}(f)\right)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_{m'}^{x\restriction m}\;\middle|\; m'<m\right\rangle\right)\\
&=\left(j_{0,2n}^{\mathcal{C}_x}(f)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_{m'}^{x\restriction m}\;\middle|\; m'<m\right\rangle\right)\\
&=\left(j_{0,2n}^{\mathcal{C}_x}(f)\right)\left(\left\langle \bar{\beta}_{m'}^{x\restriction n}\;\middle|\; m'<n\right\rangle\restriction_m\right)\\
&=k_n\left(i_{x\restriction m,x\restriction n}^{\dagger}\left(\pi_{W_{x\restriction m}}\left(\llbracket f\rrbracket_{W_{x\restriction m}}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

因此, $j_{2m,2n}^{\mathcal{C}_x}\circ k_m=k_n\circ i_{x\restriction m,x\restriction n}^{\dagger}$.

第四, 以如下方式定义 $k:\mathcal{M}_x^{\dagger}\prec\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}$:

$$\forall n<\omega\,\forall y\in\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},W_{x\restriction n}\right)\left(k\left(j_{x\restriction n}^{\dagger x}(y)\right)=j_{n,\mathrm{Even}}^{\mathcal{C}_x}\left(k_n(y)\right)\right).$$

那么 k 的定义毫无歧义, 并且是一个同质嵌入映射. □

这就完成了定理 3.66 的证明.

定理 3.65 的证明

现在我们回过头来证明定理 3.65.

定理 3.65 是如下命题: 设 κ 是一个武丁基数. $\left(T,\left\langle U_{(p,r)}\mid p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$ 是一棵 κ^{+}-弱整齐苏斯林树. 那么树

$$\coprod^{w}\left(T,\left\langle U_{(p,r)}\mid p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$$

是一棵 $(<\kappa)$-整齐苏斯林树.

我们先来描述一下我们的证明思路：设 κ 是一个武丁基数. 设 T 是 $\omega\times\lambda$ 上的一棵 κ^+-弱整齐苏斯林树. 设

$$\left\langle U_{(p,s)} \;\middle|\; p\odot s\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$$

见证 T 是 κ^+-弱整齐苏斯林树的超滤子集合. 即

(1) $\forall p\in\mathbb{N}^{<\omega}\,\forall s\in\mathbb{N}^{<\omega}\ \left(T_p\in U_{(p,s)}\right)$.

(2) $\forall p\odot r\subseteq q\odot s\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\ \left(U_{(q,s)}<_{RK}U_{(p,r)}\ \left(T_q\ni t\mapsto t\restriction_{\mathrm{dom}(p)}\in T_p\right)\right)$.

(3) 设 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\left\langle Z_r\in U_{\left(x\restriction_{\mathrm{dom}(r)},r\right)} \;\middle|\; r\in\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$. 那么

$$x\in p[T]\leftrightarrow\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,\exists f\in\lambda^{\omega}\,\forall n<\omega\ \left(f\restriction_n\in Z_{y\restriction_n}\right).$$

对于 $p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$\pi_{(p,r)}=\pi_{U_{(p,r)}}:\prod_{U_{(p,r)}}(\mathrm{V},\in)\cong\left(\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},U_{(p,r)}\right),\in\right)$$

为传递化同构映射. 对于 $\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}$ 中的 $p\odot r\subset q\odot t$, 对于 $s\in\lambda^{\mathrm{dom}(q)}$, 令

$$\chi_{q,p}(s)=s\restriction_{\mathrm{dom}(p)},$$

即 $\chi_{q,p}$ 为 $U_{(q,s)}<_{RK}U_{(p,r)}$ 的投影函数; 令

$$i_{((p,r),(q,s))}=\pi_{(q,s)}\circ i_{\left(U_{(p,r)},U_{(q,s)},\chi_{(q,p)}\right)}\circ\pi_{(p,r)}^{-1}.$$

对于 $(x,y)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$\left(\mathcal{M}_{(x,y)};\left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n,y\restriction_n)} \;\middle|\; n<\omega\right\rangle\right)$$

为共顶同质嵌入系统

$$\left(\left\langle\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},U_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}\right) \;\middle|\; n<\omega\right\rangle;\left\langle i_{((x\restriction_m,y\restriction_m),(x\restriction_n,y\restriction_n))} \;\middle|\; m\leqslant n<\omega\right\rangle\right)$$

的正向极限, 其中, $i^{(x,y)}_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},U_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}\right)\prec\mathcal{M}_{(x,y)}$ 为

$$\left\langle i_{((x\restriction_n,y\restriction_n),(x\restriction_{n+k},y\restriction_{n+k}))} \;\middle|\; k<\omega\right\rangle$$

的正向极限同质嵌入映射. 那么

$$\forall x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \left(x\in p[T]\leftrightarrow\exists y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ \left(\mathcal{M}_{(x,y)};\left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n,y\restriction_n)} \;\middle|\; n<\omega\right\rangle\right)\text{ 是有秩的}\right).$$

令 $\omega\ni m\mapsto r_m\in\omega^{<\omega}$ 为一个具备下述特点的双射：

$$\forall n\in\omega\,\forall k\in\omega\ (r_n\subset r_k\to n\leqslant k).$$

令 $T^\dagger = \prod^w \left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$(关于此树的定义, 见第 453 页中的定义 3.41) .

为了证明定理 3.65, 我们会对每一个 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 构造一棵高度为 ω 的足够强的迭代树 $\mathcal{S}_x$. 这棵迭代树 $\mathcal{S}_x$ 的所有的树枝集合为 $\{\text{Even}\} \cup \{b_y \mid y \in \omega^\omega\}$, 其中 Even 还是自然数集合的偶数子集, 对于 $y \in \omega^\omega$,

$$b_y = \{2k \ominus 1 \mid k \in \omega \wedge r_k \subseteq y\}.$$

我们构造过程中的基本目标是保证 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}_x}_{\text{Even}}$ 是有秩的当且仅当 $[T(x)] = \varnothing$.

为保证在 $[T(x)] = \varnothing$ 时 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}_x}_{\text{Even}}$ 是有秩的, 我们将安排条件 $[T(x)] = \varnothing$ 蕴涵迭代树 $\mathcal{S}_x$ 在树枝 Even 之外是连续无秩的. 为达此目的, 我们会以一种很连续的方式确保对于 $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 树 $j^{\mathcal{S}_x}_{0,b_y}(T(x))$ 是无秩的. 这将依靠类似于定理 3.66 证明中的序列 $\langle s_p \mid p \in \omega^{<\omega}\rangle$ 来发挥作用. 每一个 $s_{x\upharpoonright_k}$ 会属于 $j^{\mathcal{S}_x}_{0,2k\ominus1}\left(T_{x\upharpoonright_{|r_k|}}\right)$ 以及对于 $r_k \subset r_{k'}$, 有 $j^{\mathcal{S}_x}_{2k\ominus1,2k'\ominus1}(s_{x\upharpoonright_k}) \subset s_{x\upharpoonright_{k'}}$. 欲得到这样一组 s_p, 我们将从 $i_{(\varnothing,\varnothing),(q,r)}(T_q)$ 中选择一个 $\mathbf{s}_{q,r}$, 类似于定理 3.66 证明中的 $\mathbf{s}_r$. 从这些 $\mathbf{s}_{q,r}$ 中, 我们得到 $\left(j^{\mathcal{S}_x}_{0,2k}\left(i_{(\varnothing,\varnothing),\left(p\upharpoonright_{|r_k|},r_k\right)}\left(T_{x\upharpoonright_{|r_k|}}\right)\right)\right)$ 中的元素 $j^{\mathcal{S}_x}_{0,2k}\left(\mathbf{s}_{p\upharpoonright_{|r_k|},r_k}\right)$; 由这些元素, 利用单步引理, 我们就能够得到所需要的 s_p.

为保证当 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}_x}_{\text{Even}}$ 有秩时, $[T(x)] = \varnothing$, 我们会让序数序列 $\langle \beta_p \mid p \in \omega^{<\omega}\rangle$ 发挥作用. 对于每一个 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 序列 $\langle \beta_{x\upharpoonright_k} \mid r_k \subset y\rangle$ 将会给出模型 $j^{\mathcal{S}_x}_{0,\text{Even}}\left(i^{x,y}_{(\varnothing,\varnothing)}(\mathrm{V})\right)$ 中的序数的无穷单调递降序列. 当 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}_x}_{\text{Even}}$ 有秩时, 这就表明对于所有的 $y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{x,y}$ 都是无秩的. 因此, $[T(x)] = \varnothing$.

同时, 这组序数的有限序列也会为我们提供定义所需要的超滤子, 正如我们在定理 3.66 的证明中所做的那样.

让我们再次强调一下由引理 3.88 所给出的序数四元组

$$(\nu, \xi_0, \xi_1, \rho).$$

这些将成为定理证明中的全局变量, 都具备引理 3.88 所确定的特殊含义.

证明 设 κ 是武丁基数. 设 $\gamma < \kappa$ 是一个不可达基数.

设 T 是 $\omega \times \lambda$ 上的一棵 κ^+-弱整齐苏斯林树. 设

$$\left\langle U_{(p,s)} \mid p \odot s \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle$$

见证 T 是 κ^+-弱整齐苏斯林树的超滤子集合. 对于 $p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$i_{((p,r),(q,s))} = \pi_{(q,s)} \circ i_{\left(U_{(p,r)},U_{(q,s)},\chi_{(q,p)}\right)} \circ \pi^{-1}_{(p,r)}.$$

对于 $(x,y)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令

$$\left(\mathcal{M}_{(x,y)};\left\langle i^{(x,y)}_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}\;\middle|\;n<\omega\right\rangle\right)$$

为共顶同质嵌入系统

$$\left(\left\langle \mathrm{ult}\left(\mathrm{V},U_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}\right)\;\middle|\;n<\omega\right\rangle;\left\langle i_{((x\restriction_m,y\restriction_m),(x\restriction_n,y\restriction_n))}\;\middle|\;m\leqslant n<\omega\right\rangle\right)$$

的正向极限, 其中, $i^{(x,y)}_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}:\mathrm{ult}\left(\mathrm{V},U_{(x\restriction_n,y\restriction_n)}\right)\prec\mathcal{M}_{(x,y)}$ 为

$$\left\langle i_{((x\restriction_n,y\restriction_n),(x\restriction_{n+k},y\restriction_{n+k}))}\;\middle|\;k<\omega\right\rangle$$

的正向极限同质嵌入映射. 令 $\omega\ni m\mapsto r_m\in\omega^{<\omega}$ 为一个具备下述特点的双射:

$$\forall n\in\omega\,\forall k\in\omega\;(r_n\subset r_k\to n\leqslant k)\,.$$

令 $T^\dagger=\prod^{w}\left(T,\left\langle U_{(p,r)}\;\middle|\;p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}\right\rangle\right)$. 对于 $p\odot r\in\mathbb{N}^{<\omega}\otimes\mathbb{N}^{<\omega}$, 令

$$\mathbf{s}_{p,r}=\pi_{U_{p,r}}\left([\![\mathrm{Id}]\!]_{U_{p,r}}\right).$$

如下定义 ω 上的迭代树偏序 S:

(i) $\forall n<\omega\;(0\,S\,n+1)$;

(ii) $\forall m\in\omega\,\forall n\in\omega\;(m<n\to 2m\,S\,2n)$;

(iii) $\forall m\in\omega\,\forall n\in\omega\;(r_{m+1}\subset r_{n+1}\to(2m+1)\,S\,(2n+1))$;

(iv) 对于任意的 $m,n\in\omega$, 如果 $m\,S\,n$, 那么或者 $m=0<n$, 或者 $m<n$ 并且 m,n 同为偶数, 或者 m,n 同为奇数, 并且 $r_{\frac{(m-1)}{2}+1}\subset r_{\frac{(n-1)}{2}+1}$.

这样定义的 S 是我们即将开始构造的迭代树 $\mathcal{S}$ 的树偏序. 由定义可知 S 的树枝的集合为

$$\{\mathrm{Even}\}\cup\left\{b_y\mid y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\},$$

其中, 对于 $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $b_y=\langle 2k\ominus 1\mid k\in\omega\wedge r_k\subset y\rangle$.

我们将对 $p\in\omega^{<\omega}$ 实施递归来定义四元组 $(\delta_p,\beta_p,\mathcal{S}_p,s_p)$. δ_p 和 β_p 都是序数, 并且 $\delta_p<\kappa$; s_p 是一个长度为 $\mathrm{dom}\left(r_{|p|}\right)=\left|r_{|p|}\right|$ 的序列; $\mathcal{S}_p$ 是一棵 V 上的高度为 $2|p|+1$ 的迭代树. 它的树偏序是 S 限制在 $2|p|+1$ 上的结果; 它的张子是 $E^p_m\,(m<2|p|)$; 它的模型是 $M^p_m\,(m\leqslant 2|p|)$; 它的同质嵌入映射是 $j^p_{m,n}\,(m\,S\,n\leqslant 2|p|)$. 我们的构造过程是 "连续" 的, 即对于 $p\subset q\in\omega^{<\omega}$, 必有

$$\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_q\restriction_{(2|p|+1)}.$$

[记号约定] 为了简化记号, 我们引进如下记号约定：设 $p \in \omega^{<\omega}$ 和 $q \in \omega^{<\omega}$. 设 $m < n \leqslant |q|$ 满足 $r_m \subset r_n$. 定义

$$\begin{aligned}
i_{q;m,n} &= i_{(q\restriction_{|r_m|}, r_m),(q\restriction_{|r_n|}, r_n)};\\
\check{i}^p_{q;m,n} &= j^p_{0,2|p|}\left(i_{q;m,n}\right);\\
\check{N}^p_{q,m} &= \check{i}^p_{q;0,m}\left(M^p_{2|p|}\right);\\
\check{T}^p_{q,m} &= j^p_{0,2|p|}\left(i_{q;0,m}(T)\right);\\
\bar{\beta}^q_m &= j^q_{2m,2|q|}\left(\beta_{q\restriction_m}\right);\\
\mathbf{s}^q_m &= \mathbf{s}_{q\restriction_{|r_m|}, r_m}.
\end{aligned}$$

嵌入映射 $\check{i}^p_{q;m,n}$ 是嵌入映射 $i_{q;m,n}$ 在模型 $M^p_{2|p|}$ 中的像.

类模型 $\check{N}^p_{q,m}$ 是超幂 $\mathrm{ult}\left(\mathrm{V}, U_{q\restriction_{|r_m|}, r_m}\right)$ 在 $M^p_{2|p|}$ 中的像, 也就是

$$\check{N}^p_{q,m} = j^p_{0,2|p|}\left(i_{q;0,m}(\mathrm{V})\right).$$

树 $\check{T}^0_{q,m}$ 是树 $i_{q;0,m}(T)$ 在 $M^p_{2|p|}$ 中的像, 也就是树 T 在 $\check{N}^p_{q,m}$ 中的像.

对于 $p = \varnothing$, $s_\varnothing = \varnothing$, 因为 $r_0 = \varnothing$. 因此, 我们只需定义 $\delta_\varnothing$ 以及 $\beta_\varnothing$. 令 $\delta_\varnothing > \gamma$ 保持 $\langle T\rangle$ 在 $(\kappa + \xi_0)$ 上的型, 并且令 $\beta_\varnothing = \xi_0$.

设 $p \in \omega^{<\omega}$. 令 $k = |p| = \mathrm{dom}(p)$. 关于 p 的递归假设为：对于 $p' \subseteq p$, 四元组

$$\left(\delta_{p'}, \beta_{p'}, \mathcal{S}_{p'}, s_{p'}\right)$$

已经有定义, 合乎上面的基本要求, 并且下述条件得到满足：

(i) 对于 $m \leqslant k$, 都有 M^p_{2k} 与 $M^p_{2m\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_{p\restriction_m} + 1$;

(ii) 对于 $m \leqslant k$, 都有

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction_m}}_{\kappa, \bar{\beta}^p_m + 1}\right)^{\check{N}^p_{p,m}}\left(\left\langle \check{T}^p_{p,m}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_m\right)\right)\\
=&\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p,m}}_{\kappa,\xi_0+1}\right)^{M^p_{2m\ominus 1}}\left(\left\langle j^p_{0,2m\ominus 1}(T)\right\rangle + s_{p\restriction_m}\right);
\end{aligned}$$

(iii) 对于$m \leqslant k$, 都有在$\check{N}^p_{p\restriction_m}$ 中, $\delta_{p\restriction_m}$ 保持 $\left(\left\langle \check{T}^p_{p,m}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_m\right)\right)$ 在 $\left(\kappa + \bar{\beta}^p_m + 1\right)$ 上的型;

(iv) 如果 $m < m' \leqslant k$, 并且 $r_m \subset r_{m'}$, 那么 $\bar{\beta}^p_{m'} < \check{i}^p_{p;m,m'}\left(\bar{\beta}^p_m\right)$;

(v) 对于 $m \leqslant k$, 都有 $s_{p\restriction_m} \in j^p_{0,2m\ominus 1}\left(T_{p\restriction_{|r_m|}}\right)$, 并且

$$r_m \subseteq r_k \to j^p_{2m\ominus 1, 2k\ominus 1}\left(s_{p\restriction_m}\right) \subset s_p;$$

(vi) 对于 $m < k$, 都有 $\left(\begin{array}{l}\gamma < \delta_{p\restriction_m} < \mathrm{Crit}\left(E^p_{2m+1}\right) < \delta_{p\restriction_{(m+1)}} \wedge\\ \delta_{p\restriction_m} = \mathrm{Crit}\left(E^p_{2\bar{m}}\right) \wedge \left(2\bar{m} \ominus 1 = (2m+1)^-_S\right)\end{array}\right)$.

注意, 上述条件对于 $p = \varnothing$ 都成立. 也就是说, 我们的递归过程初始化是成功的.

[注释] 递归构造的假设条件与定理 3.66 的证明中的假设条件类同, 只是整体性更强一些, 综合性更强一些. 整个构造可以看成同时完成连续统个交错链的构造的过程：对于每一个 $y \in \mathbb{N}^N$, 树枝 b_y 与 Even 就组成一棵交错链. 条件 (vi) 不仅具备以前构造中的功能, 而且还将保证这样的综合构造彼此之间不会有冲突以及我们构造出来的迭代树是一棵足够强的迭代树 (见第 417 页的定义 3.33).

现在令 $q \in \omega^{<\omega}$ 满足 $p \subset q$ 以及 $|q| = k+1 = |p|+1$. 我们开始启动关于 q 的递归构造过程, 并验证所坚持的递归假设条件关于 q 都得到满足.

令 $n = \max\{\ell \leqslant k \mid r_\ell \subseteq r_{k+1}\}$. 令 $e = |r_n| = \mathrm{dom}\,(r_n)$. 根据我们关于映射

$$\omega \ni i \mapsto r_i \in \omega^{<\omega}$$

的基本规定, 有 $|r_{n+1}| = e+1$.

根据条件 (i) 以及不等式 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{q;0,k+1}\right) > \kappa$, 我们有模型 $\check{N}^p_{q,k+1}$ 与模型 $M^p_{2n\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_{p\restriction_n} + 1$.

注意到下述系列等式：

$$\begin{aligned}\check{N}^p_{q,k+1} &= \check{i}^p_{q;0,k+1}\left(M^p_{2k}\right)\\ &= \check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\check{i}^p_{q;0,n}\left(M^p_{2k}\right)\right)\\ &= \check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\check{N}^p_{q,n}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{T}^q_{q,k+1} &= j^p_{0,2k}\left(\check{i}^p_{q;0,k+1}(T)\right)\\ &= j^p_{0,2k}\left(\check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\check{i}^p_{q;0,n}(T)\right)\right)\\ &= \left(j^p_{0,2k}\left(\check{i}^p_{q;n,k+1}\right)\right)\left(j^p_{0,2k}\left(\check{i}^p_{q;0,n}(T)\right)\right)\\ &= \check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\check{T}^p_{p,n}\right);\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}j^p_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right) &= \left(j^p_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\right)\right)\left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)\\ &= \check{i}^p_{q;n,k+1}\left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right).\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{q;n,k+1}\right) > \kappa$, 我们就得到

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction_n}}_{\kappa,\bar{\beta}^p_n+1}\right)^{\check{N}^p_{p,n}}\left(\left\langle\check{T}^p_{p,n}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)\\ =\ & \check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction_n}}_{\kappa,\bar{\beta}^p_n+1}\right)^{\check{N}^p_{p,n}}\left(\left\langle\check{T}^p_{p,n}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)\right)\\ =\ & \left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction_n}}_{\kappa,\check{i}^p_{q;n,k+1}(\bar{\beta}^p_n)+1}\right)^{\check{N}^p_{q,k+1}}\left(\left\langle\check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)\right).\end{aligned}$$

因此, 由条件 (ii), 上述最后一项就等同于型 $\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction n}}_{\kappa,\xi_0+1}\right)^{M^p_{2n\ominus1}}\left(\left\langle j^p_{0,2n\ominus1}(T)\right\rangle+s_{p\restriction n}\right)$.

由条件 (iii), 类似的分析表明在 $\check{N}^p_{q,k+1}$ 中,

$$\delta_{p\restriction n}\text{ 保持 }\left(\left\langle\check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle+j^p_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)\right)\text{ 在 }\left(\kappa+\check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\bar{\beta}^p_n\right)+1\right)\text{ 上的型.}$$

由于 κ 是嵌入映射 $j^p_{0,2k}$ 和 $\check{i}^p_{q;0,k+1}$ 的不动点, κ 在 $\check{N}^p_{q,k+1}$ 中还是一个武丁基数. 单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足:

$$\begin{aligned}
M&=\check{N}^p_{q,k+1}; & N&=M^p_{2n\ominus1};\\
\delta&=\delta_{p\restriction n}; & \eta&=\delta_p;\\
\beta&=\check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\bar{\beta}^p_n\right)+1; & \xi&=\check{i}^p_{q;n,k+1}\left(\bar{\beta}^p_n\right);\\
\beta'&=\xi_0+1; & x&=\left\langle\check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle+j^q_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right);\\
y&=\left\langle\left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)\right)(e)\right\rangle; & x'&=\left\langle j^p_{0,2n\ominus1}(T)\right\rangle+s_{p\restriction n};
\end{aligned}$$

以及 $\kappa=\kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 "$\kappa+v$ 是最大的序数".

于是, 以上述参数替换的方式应用引理 3.86, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 因为 λ,E 以及 δ_p 都是 $\check{i}^p_{q;0,k+1}$ 的不动点, 所以在 M^p_{2k} 中, E 是一个 $(\delta_{p\restriction n},\lambda)$-张子. 根据定理 3.47, 超幂 $\prod_E^{M^p_{2n\ominus1}}\left(M^p_{2n\ominus1},\in\right)$ 是有秩的. 令 δ^*,ξ^*,y^* 由单步引理 (引理 3.86) 所提供. 根据单步引理中的结论 (4^*), $\xi^*=\xi_0$. 置 $E^q_{2k}=E$. 如此将迭代树 $\mathcal{S}_p$ 延展到一根将会成为 $\mathcal{S}_q\restriction(2k+2)$ 的交错链. 令 $\delta'_q=\delta^*$, 并且令

$$s_q=\left(j^q_{2n\ominus1,2k+1}\left(s_p\right)\right)+y^*.$$

注意, 很多环境下, 我们都有下述系列等式:

$$M^q_m=M^p_m,\ E^q_m=E^p_m,\ j^q_{m,m'}=j^p_{m,m'},\ i^q_{m,m'}=i^p_{m,m'},$$

因此, 在接下来的论证中, 当环境合适时, 我们往往直接应用这些等式而不赘言.

现在我们有

$$x+y=\left\langle\check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle+j^q_{0,2k}\left(i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)+\left\langle\left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)\right)(e)\right\rangle.$$

观察到下述等式:

$$\begin{aligned}
i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}^p_n\right)&=i_{q;n,k+1}\left(\mathbf{s}_{p\restriction e,r_n}\right)\\
&=\mathbf{s}_{q\restriction(e+1),r_{k+1}\restriction e}\\
&=\mathbf{s}^q_{k+1}\restriction e.
\end{aligned}$$

这样,

$$x + y = \left\langle \check{T}^p_{q,k+1} \right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1} \restriction e\right) + \left\langle \left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)\right)(e) \right\rangle.$$

应用 $j^p_{0,2k}$ 的同质性, 我们最终得到下面的等式:

$$x + y = \left\langle \check{T}^p_{q,k+1} \right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right).$$

现在 $\mathbf{s}^q_{k+1} = \mathbf{s}_{q\restriction(e+1),r_{k+1}} \in i^q_{0,k+1}\left(T_{q\restriction(e+1)}\right)$. 于是, $j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)$ 是树

$$j^p_{0,2k}\left(i^q_{0,k+1}\left(T_{q\restriction(e+1)}\right)\right)$$

中的一个元素. 单步引理中的结论 (2^*) 蕴涵 $s_q \in j^q_{0,2k+1}\left(T_{q\restriction(e+1)}\right)$. 因此, 关于 q 的条件 (v) 中的第一个要求得以满足. 由于 $j^q_{2k\ominus1,2k+1}\left(s_{q\restriction n}\right) \subseteq s_q$, 关于 q 的条件 (v) 中的第二个要求在 $m = n$ 时也得到满足.

这样我们有下述结论:

(a) M^q_{2k+1} 与 $\check{N}^p_{q,k+1}$ 的吻合度为 $\delta' + 1$;

(b) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_0}\right)^{M^q_{2k+1}}\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right)$

$$= \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\check{i}^p_{q;n,k+1}(\bar{\beta}^p_n)}\right)^{\check{N}^p_{q,k+1}}\left(\left\langle \check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)\right);$$

(c) 在 M^q_{2k+1} 中, δ' 保持 $\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right)$ 在 $(\kappa + \xi_0)$ 上的型.

由 (b) 和 (c), 外加关于我们的固定参数的基本性质的引理 3.89 中的 (b) 和 (c), 就得到下面的两个结论:

(b1) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_1}\right)^{M^q_{2k+1}}\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right)$

$$= \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\check{i}^p_{q;n,k+1}(\bar{\beta}^p_n)}\right)^{\check{N}^p_{q,k+1}}\left(\left\langle \check{T}^p_{q,k+1}\right\rangle + j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_{k+1}\right)\right);$$

(c1) 在 M^q_{2k+1} 中, δ' 保持 $\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right)$ 在 $(\kappa + \xi_1)$ 上的型.

令 $f : j^p_{0,2k}\left(T_{p\restriction e}\right) \to \mathrm{Ord}$ 为 M^p_{2k} 中的一个满足下述等式的函数:

$$\bar{\beta}^p_n = \pi^{M^p_{2k}}_{j^p_{0,2k}(U_{p\restriction e,r_n})}\left(\llbracket f \rrbracket^{M^p_{2k}}_{j^p_{0,2k}(U_{p\restriction e,r_n})}\right).$$

换句话说, 令 f 满足等式 $\bar{\beta}^p_n = \left(\check{i}^p_{p;0,n}(f)\right)\left(j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^p_n\right)\right)$.

根据 (b1) 以及不等式 $\mathrm{Crit}\left(\check{i}^p_{q;0,k+1}\right) > \delta'_q$, 令 $X \in j^p_{0,2k}\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)$ 具备下述特点: 对于任意的 $t \in X$ 都有

(b2) $\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,\xi_1}\right)^{M^q_{2k+1}}\left(\left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa,f(t\restriction_e)}\right)^{M^p_{2k}}\left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t\right)$.

任取一个 $t \in X$. 由于 κ 在 M^q_{2k+1} 中还是武丁基数, 单步引理 (引理 3.86) 中的假设条件在对各个参数进行如下解释性替换之后得以满足

$$
\begin{aligned}
M &= M^q_{2k+1}; & N &= M^p_{2k};\\
\delta &= \delta'_q; & \eta &= \delta'_q;\\
\beta &= \xi_1; & \xi &= \xi_0 + 1;\\
\beta' &= f\,(t \restriction e)\,; & x &= \left\langle j^q_{0,2k+1}(T)\right\rangle + s_q;\\
y &= \varnothing; & x' &= \left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t;
\end{aligned}
$$

以及 $\kappa = \kappa$ 和 $\varphi(v)$ 为表达式 “$v = v$ ”.

于是, 以上述参数替换的方式应用引理 3.86, 令 λ 和 E 由单步引理所提供. 根据定理 3.47, 超幂 $\prod_E^{M^p_{2k}} (M^p_{2k}, \in)$ 是有秩的. 令 δ^*, ξ^*, y^* 由单步引理 (引理 3.86) 所提供 (我们将不会使用 ξ^* 和 y^*).

对于所有的 $u \in X$, 下述等式成立:

$$
\left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa, f(u\restriction_e)}\right)^{M^p_{2k}} \left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + u\right) = \left(\mathrm{tp}^{\delta'}_{\kappa, f(t\restriction_e)}\right)^{M^p_{2k}} \left(\left\langle j^p_{0,2k}(T)\right\rangle + t\right).
$$

嵌入映射 $i_E^{M^p_{2k}}$ 的同质性告诉我们: 对于所有的 $u \in i_E^{M^p_{2k}}(X)$, 下述等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{tp}^{i_E^{M^p_{2k}}(\delta')}_{\kappa, \left(i_E^{M^p_{2k}}(f)\right)(u\restriction_e)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k}, E\right)} \left(\left\langle i_E^{M^p_{2k}}\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u\right)\\
={}&\left(\mathrm{tp}^{i_E^{M^p_{2k}}(\delta')}_{\kappa, \left(i_E^{M^p_{2k}}(f)\right)\left(\left(i_E^{M^p_{2k}}(t)\right)\restriction e\right)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k}, E\right)} \left(\left\langle i_E^{M^p_{2k}}\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + i_E^{M^p_{2k}}(t)\right).
\end{aligned}
$$

由于 $\delta^* < i_E^{M^p_{2k}}(\delta')$, 我们得到: 对于所有的 $u \in i_E^{M^p_{2k}}(X)$, 下述等式成立:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\kappa, \left(i_E^{M^p_{2k}}(f)\right)(u\restriction e)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k}, E\right)} \left(\left\langle i_E^{M^p_{2k}}\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u\right)\\
={}&\left(\mathrm{tp}^{\delta^*+1}_{\kappa, \left(i_E^{M^p_{2k}}(f)\right)\left(\left(i_E^{M^p_{2k}}(t)\right)\restriction e\right)}\right)^{\mathrm{ult}\left(M^p_{2k}, E\right)} \left(\left\langle i_E^{M^p_{2k}}\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + i_E^{M^p_{2k}}(t)\right).
\end{aligned}
$$

对于任意 $u \in i_E^{M^p_{2k}}(X)$, 以 $z = \left\langle i_E^{M^p_{2k}}\left(j^p_{0,2k}(T)\right)\right\rangle + u$ 和 $\alpha = \left(i_E^{M^p_{2k}}(f)\right)(u \restriction e)$ 为参数应用单步引理的最后部分. 如果 $\hat{\xi}$ 与 $\hat{y}$ 是应用单步引理所得到的结果, 那么引理中的 (b*) 就蕴涵 $\hat{y} = \varnothing$ 以及 $\hat{\xi}$ 是一个后继序数. 这样, 我们定义 $g(u)$ 为见证引理结论中的 (b*) 和 (c*) 成立的满足等式 $\hat{\xi} = \mu + 1$ 以及 $\hat{y} = \varnothing$ 的最小序数 μ.

这样, 上面所定义的函数 $g :\in i_E^{M_{2k}^p}(X) \to \mathrm{Ord}$, 并且 $g \in \mathrm{ult}\,(M_{2k}^p, E)$.

于是, 我们置 $E_{2k+1}^q = E$ 就完成对于迭代树 $\mathcal{S}_q$ 的定义:

$$M_{2k+2}^q = \mathrm{ult}\,(M_{2k}^p, E)\,, \quad j_{2k,2k+2}^q = i_E^{M_{2k}^p}.$$

单步引理中的结论 (1*) 就给出在 $k+1$ 情形下关于 q 的条件 (i).

令 $\delta_q = \delta^*$. 单步引理中的结论 (b*) 和 (c*) 给出下述结论:

对于 $u \in j_{2k,2k+2}^q(X)$, 都有

(b*) $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,g(u)+1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+2}^q} \left(\left\langle j_{0,2k+2}^q(T)\right\rangle + u\right)$

$= \left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_0+1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+1}^q} \left(\left\langle j_{0,2k+1}^q(T)\right\rangle + s_q\right);$

(c*) 在 M_{2k+2}^q 中, δ_q 保持 $\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q(T)\right\rangle + u\right)$ 在 $(\kappa + g(u) + 1)$ 上的型.

因为 $j_{2k,2k+2}^q(X) \in j_{0,2k+2}^q\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)$, 所以我们可以如下定义 β_q:

$$\beta_q = \pi^{M_{2k+2}^q}_{j_{0,2k+2}^q\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)}\left(\llbracket g\rrbracket^{M_{2k+2}^q}_{j_{0,2k+2}^q\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)}\right).$$

在 M_{2k+2}^q 中应用超幂基本定理, 应用下述等式:

$$\mathbf{s}_{k+1}^q = \pi^{M_{2k+2}^q}_{j_{0,2k+2}^q\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)}\left(\llbracket \mathrm{Id}\rrbracket^{M_{2k+2}^q}_{j_{0,2k+2}^q\left(U_{q\restriction(e+1),r_{k+1}}\right)}\right),$$

我们就看到上面的 (b*) 和 (c*) 就蕴涵下列事实:

(ii*) $\left(\mathrm{tp}_{\kappa,\beta_q+1}^{\delta_q}\right)^{\check{N}_{q,k+1}^q} \left(\left\langle j_{0,2k+2}^q\left(i_{0,k+1}^q(T)\right)\right\rangle + j_{0,2k+2}^q\left(\mathbf{s}_q\right)\right)$

$= \left(\mathrm{tp}_{\kappa,\xi_0+1}^{\delta_q}\right)^{M_{2k+1}^q} \left(\left\langle j_{0,2k+1}^q(T)\right\rangle + s_q\right);$

(iii*) 在 $\check{N}_{q,k+1}^q$ 中, δ_q 保持 $\left(\left\langle j_{0,2k+2}^q\left(i_{\varnothing,q}(T)\right)\right\rangle + j_{0,2k+2}^q\left(\mathbf{s}_q\right)\right)$ 在 $(\kappa + \beta_q + 1)$ 上的型.

这两个结论 (ii*) 和 (iii*) 正好就是关于 q 在 $k+1$ 情形下的递归假设条件 (ii) 和 (iii).

现在让我们来验证关于 q 的递归假设条件.

欲验证条件 (i)~(iii). 令 $m \leqslant k+1$ 为任意的.

我们已经验证了当 $m = k+1$ 时, (i) 由单步引理中的结论 (1*) 给出. 现假设 $m \leqslant k$. 根据关于 p 的条件 (vi), 我们有 $\delta_{q\restriction m} \leqslant \delta_p$. 因为单步引理给出 $\eta < \delta^*$, 我们也就有

$$\delta_p < \delta' < \delta_q.$$

由关于 p 的条件 (i), M^q_{2k} 与 $M^q_{2m\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_{p\restriction m}+1$. 因为 M^q_{2k+1} 与 M^q_{2k} 的吻合度至少为 δ'_q+1, 所以 M^q_{2k+1} 与 $M^q_{2m\ominus 1}$ 的吻合度至少为 $\delta_{p\restriction m}+1$. 因为 M^q_{2k+2} 与 M^q_{2k+1} 的吻合度至少为 δ_q+1, 所以 M^q_{2k+2} 与 $M^q_{2m\ominus 1}$ 的吻合度至少为

$$\delta_{p\restriction m}+1=\delta_{q\restriction m}+1.$$

我们已经验证了当 $m=k+1$ 时关于 q 的条件 (ii) 和 (iii). 现在设 $m\leqslant k$. 依据不等式 $\mathrm{Crit}\left(j^q_{2k,2(k+1)}\right)=\delta'>\delta_{q\restriction m}$ 以及我们的定义, 有下述系列等式:

(1) $j^q_{2k,2(k+1)}\left(\delta_{q\restriction m}\right)=\delta_{q\restriction m}$;

(2) $j^q_{2k,2(k+1)}\left(\bar{\beta}^p_m\right)=\bar{\beta}^q_m$;

(3) $j^q_{2k,2(k+1)}\left(\check{N}^p_{p,m}\right)=\check{N}^q_{q,m}$;

(4) $j^q_{2k,2(k+1)}\left(\check{T}^p_{p,m}\right)=\check{T}^q_{q,m}$.

不等式 $\mathrm{Crit}\left(j^q_{2k,2(k+1)}\right)=\delta'>\delta_{q\restriction m}$ 还蕴涵型

$$\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction m}}_{\kappa,\bar{\beta}^p_m+1}\right)^{\check{N}^p_{p,m}}\left(\left\langle\check{T}^p_{p,m}\right\rangle+j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_m\right)\right)$$

是嵌入映射 $j^q_{2k,2(k+1)}$ 的不动点. 根据上面的等式 (1)~(4), 我们又有

$$\begin{aligned}&j^q_{2k,2k+2}\left(\left(\mathrm{tp}^{\delta_{p\restriction m}}_{\kappa,\bar{\beta}^p_m+1}\right)^{\check{N}^p_{p,m}}\left(\left\langle\check{T}^p_{p,m}\right\rangle+j^p_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_m\right)\right)\right)\\=&\left(\mathrm{tp}^{\delta_{q\restriction m}}_{\kappa,\bar{\beta}^q_m+1}\right)^{\check{N}^q_{q,m}}\left(\left\langle\check{T}^q_{q,m}\right\rangle+j^q_{0,2k}\left(\mathbf{s}^q_m\right)\right).\end{aligned}$$

因此, 关于 q 的条件 (ii) 就由关于 p 的条件 (ii) 得到. 相似地, 关于 q 在 $m\leqslant k$ 的情形下的条件 (iii) 也由关于 p 的条件 (iii) 得到.

单步引理中的不等式 $\hat{\xi}<\alpha$ 就给出下述命题:

$$\forall u\in j^q_{0,2k+2}(X)\ \left(g(u)+1<\left(j^q_{2k,2k+2}(f)\right)(u\restriction k)\right).$$

根据这个命题, 有

$$\beta_q+1<\check{i}^q_{q;n,k+1}\left(j^q_{2k,2k+2}\left(\beta_p\right)\right).$$

因为 $\bar{\beta}^q_{k+1}=\beta_q$ 以及 $\bar{\beta}^q_n=j^q_{2k,2k+2}\left(\beta_p\right)$, 所以关于 q 的条件 (iv) 在 $m=n$ 的情形下成立. 为验证关于 q 的条件 (iv) 在 $m<m'\leqslant k\wedge r_m\subset r_{m'}$ 情形下也成立, 注意下列等式:

$$j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_m\right)=\bar{\beta}^q_m\ \wedge\ j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_{m'}\right)=\bar{\beta}^q_{m'}\ \wedge\ j^q_{2k,2k+2}\left(\check{i}^p_{p;m,m'}\right)=\check{i}^q_{q;m,m'}.$$

根据这些事实, 关于 p 的条件 (iv), 以及映射 $j^q_{2k,2k+2}$ 的同质性, 我们有下述不等式:

$$\bar{\beta}^q_{m'}=j^q_{2k,2k+2}\left(\bar{\beta}^p_{m'}\right)<j^q_{2k,2k+2}\left(\check{i}^p_{p;m,m'}\left(\bar{\beta}^p_m\right)\right)=\check{i}^q_{q;m,m'}\left(\bar{\beta}^q_m\right).$$

剩下关于 q 的条件 (iv) 的情形为 $m \neq n \wedge m' = n+1$. 假设 $m \leqslant k$, $m \neq n$ 以及 $r_m \subset r_{k+1}$. 由 n 的定义, 必定有 $m < n$ 并且 $r_m \subset r_n$. 于是,

$$\bar{\beta}^q_{k+1} < \check{i}^q_{q;n,k+1}\left(\bar{\beta}^q_k\right) < \check{i}^q_{q;n,k+1}\left(\check{i}^q_{q;m,n}\left(\bar{\beta}^q_m\right)\right) = \check{i}^q_{q;m,k+1}\left(\bar{\beta}^q_m\right).$$

关于 q 的条件 (iv) 在 $m \neq n$ 以及 $m' = n+1$ 时也成立.

我们已经验证了关于 q 的条件 (v) 中的第一个要求以及当 $m = k$ 时的第二个要求. 第二个要求中的其他情形由关于 p 的相应结论以及关于 q 的 $m = k$ 的结论联合给出.

我们已经得到不等式 $\delta_p < \delta'_q < \delta_q$. 由于 $2n \ominus 1 = (2k+1)^-_S$, $\operatorname{Crit}\left(E^q_{2k}\right) = \delta_{q\restriction n}$ 以及 $\operatorname{Crit}\left(E^q_{2k+1}\right) = \delta'_q$, 又由于关于 p 的条件 (vi) 成立和 $\gamma < \delta_\varnothing$, 这些就给出关于 q 的条件 (vi).

这就完成了我们的构造以及验证了所需要的性质.

现在来论证我们构造的系统

$$\left(\left\langle M^p_{2|p} \;\middle|\; p \in \omega^{<\omega}\right\rangle, \left\langle j^p_{m,2|p|} \;\middle|\; p \in \omega^{<\omega} \wedge m < |p|\right\rangle\right)$$

给出树 $T^\dagger$ 的投影集合一种嵌入规范形式.

对于 $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, 令 $\mathcal{S}_x$ 为一棵由 x 所确定的高为 ω 的迭代树: 对于 $n < \omega$, $\mathcal{S}_x$ 在 $2n+1$ 上的限制就是 $\mathcal{S}_{x\restriction n}$.

断言一 $\mathcal{S}_x$ 是一棵足够强的迭代树.

引理 3.91 证明的第一部分表明如果对于每一个 $n < \omega$, 集合

$$\left\{\operatorname{Crit}\left(E^{\mathcal{S}_x}_m\right) \mid (m+1)^-_S \leqslant n < m\right\}$$

是有限的, 那么 $\mathcal{S}_x$ 就是一棵足够强的迭代树.

我们构造中的条件 (vi) 蕴涵着对于任意的自然数 m 和 m' 都有

$$(m+1)^-_S = (m'+1)^-_S \to \operatorname{rit}\left(E^{\mathcal{S}_x}_m\right) = \operatorname{Crit}\left(E^{\mathcal{S}_x}_{m'}\right).$$

设 $n < \omega$. 注意关系 $(m+1)^-_S = (m'+1)^-_S$ 是 ω 上的一个等价关系, 如果以 $(m+1)^-_S$ 为 m 所在的等价类的指标, 那么指标 $(m+1)^-_S \leqslant n$ 的等价类个数必然有限. 所以, 集合

$$\left\{\operatorname{Crit}\left(E^{\mathcal{S}_x}_m\right) \mid (m+1)^-_S \leqslant n < m\right\}$$

是有限的.

断言一得证.

断言二 $[T^\dagger(x)] \neq \varnothing$ 当且仅当 $\tilde{\mathcal{M}}^{\mathcal{S}_x}_{\text{Even}}$ 是有秩的.

先假设 $\left[T^{\dagger}(x)\right] \neq \varnothing$. 根据定理 3.63, $[T(x)]=\varnothing$. 也就是说, $T(x)$ 是一棵有秩树. 对于 $k<\omega$, 令

$$\zeta_{2k}=j_{0,2k}^{\mathcal{S}_x}\left(\|s_{\varnothing}\|^{T(x)}\right);$$
$$\zeta_{2k+1}=\left\|s_{x\upharpoonright(k+1)}\right\|^{j_{0,2k+1}^{\mathcal{S}_x}(T(x))}.$$

应用条件 (v), 我们得到：对于任意不相等的自然数 m 和 n, 如果 $r_m \subset r_n$, 那么

$$\begin{aligned} j_{2m\ominus 1,2n\ominus 1}^{\mathcal{S}_x}\left(\zeta_{2m\ominus 1}\right) &= \left\|j_{2m\ominus 1,2n\ominus 1}^{\mathcal{S}_x} s_{x\upharpoonright m}\right\|^{j_{0,2n\ominus 1}^{\mathcal{S}_x}(T(x))}. \\ &> \left\|s_{x\upharpoonright n}\right\|^{j_{0,2n\ominus 1}^{\mathcal{S}_x}(T(x))} \\ &= \zeta_{2n\ominus 1}. \end{aligned}$$

这样, 序列 $\langle\zeta_n \mid n<\omega\rangle$ 见证 $\mathcal{S}_x$ 在其偶数树枝 Even 之外是连续无秩的迭代树. 根据断言一, $\mathcal{S}_x$ 又是足够强的. 根据推论 3.31, 树枝 Even 是一根有秩树枝. 因此, $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}$ 是有秩的.

现在设 $\tilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}$ 是有秩的. 对于自然数 $m \leqslant m'$, 令

$$\bar{\beta}_m^x=j_{2m,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}\left(\beta_{x\upharpoonright m}\right);$$
$$\check{i}_{m,m'}^x=j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}\left(i_{x\upharpoonright n;m,n}\right);$$
$$\check{i}_m^x=j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}\left(i_{(x\upharpoonright|r_m|,r_m)}^x\right).$$

设 $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 对于 $n<\omega$, 令 $m_n=\min\{\ell \mid y\upharpoonright n=r_\ell\}$. 令 $n<n'<\omega$. 设 $k<\omega$ 满足不等式 $m_{n'}\leqslant k$. 根据条件 (iv), 有

$$\bar{\beta}_{m_{n'}}^{x\upharpoonright k}<\check{i}_{x\upharpoonright k;m_n,m_{n'}}^{x\upharpoonright k}\left(\bar{\beta}_{m_n}^{x\upharpoonright k}\right).$$

将同质嵌入映射 $j_{2k,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}$ 应用到上述不等式的左右两端, 我们发现下述不等式：

$$\bar{\beta}_{m_{n'}}^x<\check{i}_{m_n,m_{n'}}^x\left(\bar{\beta}_{m_n}^x\right).$$

再将同质嵌入映射 $\check{i}_{m_{n'}}^x$ 应用到上述不等式的左右两端, 我们得到

$$\check{i}_{m_{n'}}^x\left(\bar{\beta}_{m_{n'}}^x\right)<\check{i}_{m_n}^x\left(\bar{\beta}_{m_n}^x\right).$$

因此, 序列 $lFen\check{i}_{m_n}^x\left(\bar{\beta}_{m_n}^x\right)n<\omega$ 是模型 $j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}\left(\mathcal{M}_{x,y}\right)$ 的序数的无穷单调递降序列. 因此, 模型 $j_{0,\mathrm{Even}}^{\mathcal{S}_x}\left(\mathcal{M}_{x,y}\right)$ 是无秩的. 根据有秩特性的绝对性, $\mathcal{M}_{x,y}$ 便是无秩模型. 由于 $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是任意的, 所以 $[T(x)]=\varnothing$. 因此, $\left[T^{\dagger}(x)\right]\neq\varnothing$.

断言二得证.

为完成定理的证明, 令

$$\alpha>\sup\left\{\beta_p+1 \mid p\in\omega^{<\omega}\right\}.$$

对于 $p \in \omega^{<\omega}$, 令

$$W_p = \left\{ X \subseteq \left(T^\dagger \upharpoonright \alpha\right)_p \;\middle|\; \left\langle \bar\beta_m^p \mid m < |p| \right\rangle \in j_{0,2|p|}^p(X) \right\}.$$

断言三 $\langle W_p \mid p \in \omega^{<\omega} \rangle$ 见证树 $T^\dagger \upharpoonright \alpha$ 是 γ-整齐苏斯林树.

我们将断言三的证明分成几个小命题的证明.

(1) 对于 $p \in \omega^{<\omega}$, W_p 都是 $\left(T^\dagger \upharpoonright \alpha\right)_p$ 上的一个 γ-完全的超滤子.

令 $p \in \omega^{<\omega}$. 我们来证明:

(i) $\forall m < |p| \left(\bar\beta_m^p < j_{0,2|p|}^p(\alpha)\right)$;

(ii) $\left\langle \bar\beta_m^p \mid m < |p| \right\rangle \in j_{0,2|p|}^p\left(\left(T^\dagger \upharpoonright \alpha\right)_p\right)$.

关于 (i), 令 $m < |p|$. 那么

$$\bar\beta_m^p = j_{2m,2|p|}^p\left(\beta_{p\upharpoonright m}\right) < j_{2m,2|p|}^p(\alpha) \leqslant j_{0.2|p|}^p(\alpha).$$

关于 (ii), 根据 $T^\dagger$ 的定义, 我们需要证明: 对于任意两个自然数 m 和 m', 如果 $m < m' < |p|$, 那么

$$\bar\beta_{m'}^p < \left(j_{0,2|p|}^p\left(i_{(p\upharpoonright|r_m|,r_m),(p\upharpoonright|r_{m'}|,r_{m'})}\right)\right)\left(\bar\beta_m^p\right),$$

也就是

$$\bar\beta_{m'}^p < \left(j_{0,2|p|}^p\left(i_{p;m,m'}\right)\right)\left(\bar\beta_m^p\right).$$

而这个不等式直接由我们构造过程中坚持的条件 (iv) 得到.

由于 $\left(T^\dagger \upharpoonright \alpha\right)_p \in W_p$, 所以 W_p 是 $\left(T^\dagger \upharpoonright \alpha\right)_p$ 上的一个超滤子. 根据条件 (vi), $\gamma \leqslant \mathrm{Crit}\left(j_{0,2|p|}^p\right)$, 所以 W_p 是 γ-完全的.

命题 (1) 得证.

其他的论证与定理 3.66 的证明中相应部分的论证完全一样. 因此, 我们在此省略详细陈述. □

推论 3.35 (Martin-Steel) 设 κ 是一个武丁基数以及 $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 如果 A 是 κ^+-弱整齐苏斯林, 那么 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} - A$ 是 $<\kappa$-整齐苏斯林集合.

定理 3.67 (Steel-Woodin) 设 $\langle \kappa_i \mid i \leqslant n \rangle$ 是无穷基数的严格单调递增的序列. 设对每一个 $i < n$, κ_i 是一个武丁基数, 并且 κ_n 是一个可测基数. 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 Π_{n+1}^1 实数集合, 那么 A 是 $<\kappa_0$-整齐苏斯林实数集合.

证明 应用对于 $m \leqslant n$ 的归纳法, 我们来证明每一个 Π_{m+1}^1 实数集合都是 $(<\kappa_{n-m})$-整齐苏斯林实数集合.

根据定理 3.54, 每一个 Π_1^1 实数集合都是 κ_n-整齐苏斯林集合, 从而自然是 $(<\kappa_n)$-整齐苏斯林实数集合. 所以, 当 $m = 0$ 时, 结论成立.

设 $m<n$, 并且结论对于 m 已经成立. 设 $A\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 Π^1_{m+2} 实数集合. 令 $B\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为一个 Π^1_{m+1} 实数集合来实现等式 $A=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-\mathrm{TY}(B)$. 令

$$B^*=\{\ll x,y\gg\mid(x,y)\in B\}.$$

那么 $B^*\subseteq[\omega^{<\omega}\otimes\omega^{<\omega}$, 并且 B^* 是 $\underset{m+1}{\overset{1}{\Pi}}$. 因为 $\kappa_{n-m+1}<\kappa_{n-m}$, 我们有 B^* 是 $\left(\kappa_{n-(m+1)}\right)^+$-整齐苏斯林实数集合. 因此, B 就是 $\left(\kappa_{n-(m+1)}\right)^+$-整齐苏斯林实数集合. 根据定理 3.56, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-A$ 是一个 $\left(\kappa_{n-(m+1)}\right)^+$-弱整齐苏斯林实数集合. 因为 $\kappa_{n-(m+1)}$ 是一个武丁基数, 根据推论 3.35, A 是一个 $\left(<\kappa_{n-(m+1)}\right)$-苏斯林实数集合. □

定理 3.68 (Martin-Steel) (1) 设 $n<\omega$. 如果存在 n 个彼此不相同的武丁基数以及一个大于它们的可测基数, 那么每一个 Π^1_{n+1} 实数子集都是胜负确定的集合.

(2) 如果存在无穷多个不相同的武丁基数, 那么每一个投影实数子集都是胜负确定的集合.

证明 (1) 设 A 是一个 Π^1_{n+1} 实数子集合. 设 $\langle\kappa_i\mid i\leqslant n\rangle$ 是一个严格单增的具备下述特点的基数序列：前 n 个基数是武丁基数, 最后的一个是可测基数. 根据定理 3.67, A 是 $(<\kappa_0)$-整齐苏斯林实数集合. 根据定理 3.55, A 是一个胜负确定的集合.

(2) 由 (1) 直接得到, 因为存在无穷多个武丁基数. 比如 $\{\kappa_m\mid m<\omega\}$ 是严格单调递增的武丁基数的序列, 那么任意有限个武丁基数之上必有一个严格大于它们中最大者的可测基数. □

3.3.5 $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$

在解决了投影集合的胜负确定性之后, 我们来解决内模型 $L(\mathbb{R})$ 中实数子集的胜负确定性问题. 这里的工作主要是马丁、斯蒂尔和武丁的工作. 有些是合作的产物, 有些则来自独自的思考. 这里可以说是胜负确定问题求解的最高潮, 也是大基数资源、力迫论方法、荟萃塔泛型超幂方法、迭代树方法以及广泛贝尔特性、弱苏斯林特性以及苏斯林特性的有机综合的舞台. 这也就自然而然地成为这本《导引》的结尾篇章.

泛型正确性

设 κ 是一个基数, a 是一个集合. 设 $\varphi(v_1,v_2)$ 是一个集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 设 $(X,\in)$ 为同一律的一个非空可数模型. 称 X 关于 $\langle\varphi,a\rangle$ 是 $(<\kappa)$-**泛型正确的**当且仅当 $\{a,\kappa\}\subset X$, 并且对于每一个 $\mathbb{P}\in M_X\cap V_{\pi_X(\kappa)}$, 对于每一个集合 g, 如果 g 是 M_X 上的 $\mathbb{P}$ 泛型超滤子, 那么

$$\forall y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\cap M_X[g]\ \left(M_X[g]\models\varphi\left[y,\pi_X(a)\right]\leftrightarrow V\models\varphi[y,a]\right),$$

其中, $\pi_X : (X, \in) \cong (M_X, \in)$ 是传递化映射.

引理 3.94 设 κ 是一个基数, $\lambda > \kappa$ 是一个序数, $a \in \mathrm{V}_\lambda$. 设 $\varphi(v_1, v_2)$ 是一个集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 令

$$\tilde{S} = \{X \prec \mathrm{V}_\lambda \mid |X| = \aleph_0 \wedge X \text{ 关于 } \langle \varphi, a \rangle \text{ 是 } (<\kappa)\text{-泛型正确的}\}.$$

如果 $\tilde{S} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$, 那么实数集合 $\left\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \varphi(x, a)\right\}$ 是 $(<\kappa)$-广泛贝尔集合. 事实上, 如果 $\tilde{S} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$, 那么一定存在具备下述特点的两棵树 T 和 U: 对于任意的力迫构思 $\mathbb{P} \in \mathscr{H}_\kappa$, 如果 G 是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子, 那么

(a) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} \mid \mathrm{V}[G] \models \varphi[x, a]\right\} = (p[T])^{\mathrm{V}[G]}$;

(b) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} \mid \mathrm{V}[G] \not\models \varphi[x, a]\right\} = (p[U])^{\mathrm{V}[G]}$.

证明 设 $\tilde{S} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$. 令 $f : \mathrm{V}_\lambda^{<\omega} \to \mathrm{V}_\lambda$ 为一个函数来见证如下事实:

$$\forall X \in \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda) \left(f\left[X^{<\omega}\right] \subset X \to X \in \tilde{S}\right).$$

令 $h : \omega \to \omega^{<\omega}$ 为一个具备下述特点的满射:

$$\forall m \in \omega \; (\mathrm{rng}(h(m)) \subset m + 1).$$

我们先来定义所需要的树 T 和树 U.

以如下方式定义树 T: T 中的每一个节点都是具备下述特点的有序对 $(p, (r, s))$: $(\varnothing, (\varnothing, \varnothing)) \in T$, 或者

(0) $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(r) = \mathrm{dom}(s) = k \in \omega \wedge k > 0$;

(1) $p \in \omega^k$;

(2) $r \in \mathrm{V}_\lambda^k$;

(3) $r(0)$ 是 $\mathscr{H}_\kappa$ 中的一个偏序集 $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$;

(4) $s \in P^k$, $\mathrm{rng}(s)$ 在 $r(0)$ 中有一个公共下界;

(5) 如果 $2m + 2 < k$, 那么 $r(2m + 2) = f\left(\langle r((h(m))(i)) \mid i \in \mathrm{dom}(h(m))\rangle\right)$;

(6) 如果 $2m+2 < k$, 并且 $r(m)$ 是 $r(0)$ 的一个稠密子集, 那么 $s(2m+2) \in r(m)$;

(7) 如果 $2m + 3 < k$, 那么 $r(2m + 3) = s(m)$;

(8) 如果 $2m + 3 < k$, 那么 $s(2m + 3) \Vdash r(1)(\check{m}) = \check{p}(\check{m})$;

(9) 如果 $k > 1$, 那么 $r(1)$ 是一个 $r(0)$-名字, 并且 $s(0) \Vdash r(1) : \check{\omega} \to \check{\omega}$;

(10) 如果 $k > 1$, 那么 $s(1) \Vdash \varphi[r(1), \check{a}]$.

树 U 的定义除了最后一条不一样、其余的同 T 的定义; 最后一条用 $\neg\varphi[r(1), \check{a}]$ 替换 $\varphi[r(1), \check{a}]$ 而得.

接下来验证上面定义的树 T 和树 U 满足我们的需求.

断言一 树 T 和树 U 在 V 中的投影互补. 事实上,

(a) $\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ (x \in p[T] \to \varphi[x, a])$;

(b) $\forall x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\ (x \in p[U] \to \neg\varphi[x, a])$.

我们证明 (a), (b) 的证明类似. 设 $x \in p[T]$. 令 $(\tilde{r}, \tilde{s})$ 为一个证据. 依据这个证据, 我们得到一个可数的 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, $\{a, \kappa\} \subset X$, X 对 f 封闭; 一个偏序集 $(P, \leqslant) \in X \cap \mathscr{H}_\kappa$; 一个 X 上的 $(P \cap X)$-泛型超滤子 g; 一个 $\mathbb{P}$-名字 τ 以至于下述事实成立:

(i) $\exists s \in g\ (s \Vdash \tau : \check{\omega} \to \check{\omega})$;

(ii) $\forall n < \omega\, \exists s_n \in g\ (s_n \Vdash \tau\,(\check{n}) = \check{x}\,(\check{n}))$;

(iii) $\exists t \in g\ (t \Vdash \varphi\,[\tau, \check{a}])$.

由于 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, g 中的条件在 X 中力迫同样的语句. 令 $\pi_X : (X, \in) \cong (M_X, \in)$ 为 X 的传递化. 令 $\tilde{g} = \pi_X[g]$. 那么 $\tilde{g}$ 是 M_X 上的 $\pi_X(\mathbb{P})$-泛型超滤子, 并且

$$M_X\,[\tilde{g}] \models \varphi\,[x, \pi_X(a)]\,.$$

因为 X 关于 $\langle \varphi, a\rangle$ 是 $(< \kappa)$-泛型正确的, 所以, $\varphi[x, a]$ 成立.

现在设 $\mathbb{P} \in \mathscr{H}_\kappa$. 令 G 为 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子.

断言二 树 T 和树 U 在 $\mathrm{V}[G]$ 中的投影互补. 事实上,

(c) $\forall x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]}\ \left(\mathrm{V}[G] \models \varphi[x, a] \to \mathrm{V}[G] \models x \in (p[T])^{\mathrm{V}[G]}\right)$;

(d) $\forall x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]}\ \left(\mathrm{V}[G] \models \neg\varphi[x, a] \to \mathrm{V}[G] \models x \in (p[U])^{\mathrm{V}[G]}\right)$;

(e) $(p[T])^{\mathrm{V}[G]} \cap (p[U])^{\mathrm{V}[G]} = \varnothing$.

我们证明 (c), (d) 的证明类似. 设 $x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]}$, 并且 $\mathrm{V}[G] \models \varphi[x, a]$. 令 τ 为一个 $\mathbb{P}$-名字以至于 $\tau/G = x$. 令 $p \in G$ 满足 $p \Vdash \tau : \check{\omega} \to \check{\omega}$. 令 $q \in G$ 满足 $q \Vdash \varphi\,[\tau, \check{a}]$. 设 $\{\mathbb{P}, p, q, \tau, a, \kappa\} \subset X \prec \mathrm{V}_\lambda$ 可数, $X \in \mathrm{V}$, 并且关于 f 封闭. 令 $\tilde{r} : \omega \to X$ 以及 $\tilde{s} : \omega \to G \cap X$ 为具备下述特点的满射:

(i) $\tilde{r}(0) = \mathbb{P}$; $\tilde{r}(1) = \tau$; $\tilde{s}(0) = p$; $\tilde{s}(1) = q$;

(ii) 对于每一个 $k \in \omega$, 序对 $(x\restriction_{k+1}, (\tilde{r}\restriction_{k+1}, \tilde{s}\restriction_{k+1}))$ 遵守树 T 的定义中的其余各项条件.

这样的 $(\tilde{r}, \tilde{s})$ 可以依据 T 的定义条件递归地获得. 于是 $(x, (\tilde{r}, \tilde{s}))$ 是树 T 在 $\mathrm{V}[G]$ 中的一个树枝, 并且 $(\tilde{r}, \tilde{s})$ 见证 $x \in p[T]$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中成立.

为证明 (e), 令

$$S = \{(p, (r, s), (u, t)) \mid (p, (r, s)) \in T \wedge (p, (u, t)) \in U\}\,.$$

根据断言一, S 在 V 中是一棵有秩的树. 因此, 它在 $\mathrm{V}[G]$ 中也有秩. 依此可见在 $\mathrm{V}[G]$ 中 (e) 成立. □

现在我们来寻找一个充分条件以保证上述引理 3.94 中的集合 $\tilde{S}$ 具备所要的性质：$\tilde{S} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$.

设 ρ 是一个极限序数, a 是一个集合, φ 是一个表达式. 称 $\mathbb{Q}_{<\rho}$ 是 $\langle\varphi, a\rangle$-**正确的**当且仅当对于每一个 G, 如果 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\rho}$-泛型超滤子, 那么

(a) $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} \subset \mathrm{rng}\,(\pi_G)$;

(b) $\forall x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} \left(\mathrm{V}[G] \models \varphi[x, a] \leftrightarrow \prod_G (\mathrm{V}, \in) \models \varphi\left[\pi_G^{-1}(x), i'_G(a)\right]\right)$.

注意, 当泛型超幂有秩时, 条件 (a) 对等于 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} = \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)}$; 条件 (b) 对等于

$$\forall x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]} \left(\mathrm{V}[G] \models \varphi[x, a] \leftrightarrow \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G) \models \varphi\left[x, i_G(a)\right]\right).$$

在我们后面的应用中, 泛型超幂都是有秩的.

根据定理 3.37, 我们立刻得到下述引理：

引理 3.95 设 κ 是一个武丁基数. 设 $\varphi(v_1, v_2)$ 是集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 设 $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$ 是 $\left\langle\varphi^{L(\mathbb{R})}, a\right\rangle$-正确的.

下面的引理给出我们所寻求的充分条件：

引理 3.96 设 κ_1 是一个武丁基数, $\kappa > \kappa_1$ 是可测基数. 设 $a \in \mathrm{V}_{\kappa_1}$. 设 $\varphi(v_1, v_2)$ 是集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 设 n 是一个比 φ 中莱维复杂性至少大 10 的自然数. 设 $\lambda > \kappa$ 满足 $\mathrm{V}_\lambda \prec_{\Sigma_n} \mathrm{V}$. 令

$$\tilde{S} = \{X \prec \mathrm{V}_\lambda \mid |X| = \aleph_0 \wedge X \text{ 关于 } \langle\varphi, a\rangle \text{ 是 } (<\kappa)\text{- 泛型正确的}\}.$$

那么 $\tilde{S} \in \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$.

证明 假设不然, 即假设 $\tilde{S} \notin \mathcal{F}^{\clubsuit}_{\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda)}$. 那么 $T_0 = \mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_\lambda) - \tilde{S}$ 是荟萃子集. 设 $X \in T_0$ 并且 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, $\{a, \kappa\} \subset X$. 令 $\mathbb{P} \in M_X \cap \mathrm{V}_{\pi_X(\kappa)}$ 为一个反例. 于是 $\pi_X^{-1}(\mathbb{P}) \in X$. 令 δ 为满足要求 $\pi_X^{-1}(\mathbb{P}) \in \mathrm{V}_\gamma$ 的最小的序数 γ. 那么 $\delta \in X$. 于是,

$$\exists \delta \in X \left(X \text{ 关于 } \langle\varphi, a\rangle \text{ 不是 } (<\delta)\text{- 泛型正确的}\right).$$

根据正规性, 令 $\delta < \kappa$, $T(\delta) \subset T_0$ 为一个荟萃子集, 并且对于 $X \in T(\delta)$, 必有 $X \prec \mathrm{V}_\lambda$, $\{a, \kappa\} \subset X$ 以及 X 关于 $\langle\varphi, a\rangle$ 不是 $(<\delta)$- 泛型正确的.

依此, 我们可以固定一个这样的强极限基数 δ, 并且 $a \in \mathrm{V}_\delta$.

令 $Y \prec \mathrm{V}_\lambda$ 满足 $|Y| < \kappa$, $\mathrm{V}_{\delta+1} \subset Y$. 令 M_Y 为 Y 的传递化. 那么 $\mathrm{V}_{\delta+1} \subset M_Y$, 并且传递化映射 π_Y 在 $\mathrm{V}_{\delta+1}$ 上是恒等映射. 令

$$T = \left\{X \prec M_Y \mid |X| = \aleph_0 \wedge X \text{ 关于 } \langle\varphi, a\rangle \text{ 不是 } (<\delta)\text{- 泛型正确的}\right\}.$$

注意, 除去一个非荟萃子集的例外, 几乎每一个 $X \in T(\delta)$ 都满足 $X \cap Y \prec X$. 对于这样的 X, 任何见证 X 关于 $\langle\varphi, a\rangle$ 不是 $(<\delta)$-泛型正确的证据也直接给出 $X \cap Y$

关于 $\langle\varphi, a\rangle$ 不是 $(<\delta)$-泛型正确的证据, 从而也就给出 $\pi_Y[X\cap Y]$ 关于 $\langle\varphi, a\rangle$ 不是 $(<\delta)$-泛型正确的证据. 因此, T 与 $\pi_Y\left[T(\delta)\downarrow Y\right]$ 的差别是一个非荟萃集合. 于是 T 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(M_Y)$ 上是一个荟萃集合.

令 T^* 为下述集合:

$$\left\{X\in\mathfrak{P}_{\aleph_1}\left(\mathrm{V}_{\kappa_1+1}\right)\;\middle|\;\left(\begin{array}{l}(X\cap\bigcup T)\in T\wedge\\ \forall W\in X\ \left((W\text{ 在 }\mathbb{Q}_{<\kappa_1}\text{ 准稠密})\to X\text{ 起底 }W\right)\end{array}\right)\right\}.$$

那么根据定理 3.39, T^* 在 $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\mathrm{V}_{\kappa_1+1})$ 上是荟萃集. 因此 $T^*\in\mathbb{Q}_{<\kappa}$. 令 $G_1\ni T^*$ 为 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子. 令 $G=\mathbb{Q}_{<\kappa_1}\cap G_1$. 根据推论 3.26, G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa_1}$-泛型超滤子. 注意, $T\in G$. 因此,

$$[\![\mathrm{Id}_T]\!]_G\in_G i'_G(T).$$

这样,

$$\prod_G(\mathrm{V},\in)\models[\![\mathrm{Id}_T]\!]_G\text{ 关于 }i'_G(\langle\varphi,a\rangle)\text{ 不是 }(<i'_G(\delta))\text{-正确的.}$$

根据推论 3.25,

$$i'_G\restriction_{\bigcup T}:\left(\bigcup T,\in\right)\cong\left([\![\mathrm{Id}_T]\!]_G,\in_G\right).$$

因为 $\bigcup T=M_Y$, 所以在 $\mathrm{V}_\delta^{M_Y}$ 中有一个力迫构思 $\mathbb{P}$ 以及有一个在 $\mathrm{rng}\,(\pi_G)$ 中的 g 和一个在 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{M_Y[g]}$ 中的实数 x 来见证事实: g 是 M_Y 上的, 因此也是 V 上的, $\mathbb{P}$-泛型超滤子, 并且

$$M_Y[g]\models\varphi[x,a]\leftrightarrow\prod_G(\mathrm{V},\in)\not\models\varphi\left[\pi_G^{-1}(x),i'_G(a)\right].$$

为了确定起见, 不妨设 $M_Y[g]\models\varphi[x,a]$. 令 τ 为一个 $\mathbb{P}$-名字以至于在 $M_Y[g]$ 中以及在 $\mathrm{V}[g]$ 中都有 $\tau/g=x$. 令 $p\in P$ 来见证事实:

$$M_Y\models p\Vdash\varphi(\tau,\check{a}).$$

由于 $Y\prec\mathrm{V}_\lambda\prec_{\Sigma_n}\mathrm{V}$, 有

$$\mathrm{V}\models p\Vdash\varphi(\tau,\check{a}).$$

从而, $\mathrm{V}[g]\models\varphi[x,a]$.

根据引理 3.70, $\langle\varphi, a\rangle$ 是 $(<\kappa_1)$-泛型扩张不变的. 由于 $g\in\mathrm{V}[G]$, $\langle\varphi, a\rangle$ 是 $(<\kappa_1)$-泛型扩张不变的, 所以

$$\mathrm{V}[G]\models\varphi[x,a].$$

根据引理 3.95, $\mathbb{Q}_{<\kappa_1}$ 是 $\langle\varphi, a\rangle$-正确的. 因此,

$$\prod_G (\mathrm{V}, \in) \models \varphi\left(\pi_G^{-1}(x), i'_G(a)\right).$$

这就是一个矛盾. □

综合上面的引理, 我们有下述定理:

定理 3.69 设 $\{\kappa_n \mid n < \omega\}$ 为武丁基数的一个严格单调递增的序列. 令

$$\kappa = \bigcup \{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

设存在一个大于 κ 的可测基数. 令 $\psi(v_1, v_2)$ 为集合论纯语言的彰显自由变元的表达式. 令 φ 为 $\psi^{L(\mathbb{R})}$. 设 $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么集合 $\left\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \varphi(x, a)\right\}$ 是一个 $(<\kappa)$-广泛贝尔集合. 事实上, 存在两棵树 T 和 T^* 来见证下述事实: 对于任何力迫构思 $\mathbb{P} \in \mathrm{V}_\kappa$, 对于任意 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子 H, 都有

(i) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H]} \mid \mathrm{V}[H] \models \varphi[x, a]\right\} = (p[T])^{\mathrm{V}[H]}$;

(ii) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H]} \mid \mathrm{V}[H] \not\models \varphi[x, a]\right\} = (p\,[T^*])^{\mathrm{V}[H]}$.

证明 根据引理 3.94 以及引理 3.96, 对于每一个 $n < \omega$, 我们都有两棵具备下述性质的树 T_n 和 T_n^*: 对于任何力迫构思 $\mathbb{P} \in \mathrm{V}_{\kappa_n}$, 对于任意 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型超滤子 H, 都有

(i) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H]} \mid \mathrm{V}[H] \models \varphi[x, a]\right\} = (p[T])^{\mathrm{V}[H]}$;

(ii) $\left\{x \in \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[H]} \mid \mathrm{V}[H] \not\models \varphi[x, a]\right\} = (p\,[T^*])^{\mathrm{V}[H]}$.

现在我们以如下方式将这些树分别综合起来以得到两个树 T 和 T^*. 对于 $m < \omega$, $t : m \to \mathrm{V}$, 对于 $n < \omega$, 以下述等式定义 $t_n : m \to \mathrm{V}$:

$$\forall k < m\ (t_n(k) = (n, t(k))).$$

令

$$T = \{\langle p, t_n\rangle \mid n \in \omega \ \wedge\ \langle p, t\rangle \in T_n\},$$

以及

$$T^* = \{\langle p, t_n\rangle \mid n \in \omega \ \wedge\ \langle p, t\rangle \in T_n^*\}.$$

在 V 中, 下述等式成立:

$$\left\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \varphi(x, a)\right\} = p[T];$$
$$\left\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \neg\varphi(x, a)\right\} = p\,[T^*].$$

再应用引理 3.94 证明中的论证方式可知 $p[T]$ 和 $p[T^*]$ 在 V 的任何力迫构思 $\pi P \in V_\kappa$ 的泛型扩张中都不相交. 因此, 这两棵树具备定理结论的性质. □

下面来证明如果 κ 是一个武丁基数, 那么每一个 κ-广泛贝尔子集都一定是 $(<\kappa)$-弱整齐实数集合. 为此, 我们先来证明两个引理.

引理 3.97　设 κ 是一个基数. 设 $\mathbb{P}$ 是一个势不超过 κ 的力迫构思, 并且

$$\forall p \in P \left(p \Vdash 2^{\aleph_0} \leqslant \check{\kappa}\right).$$

设 T 是一棵在某个 $\omega \times Y$ 上的树. 那么 T 一定有一棵具备下述特点的子树 $\tilde{T}$:

(a) $\left|\tilde{T}\right| \leqslant \kappa$;

(b) 对于 V 上的任意一个 $\mathbb{P}$-泛型超滤子 G, 都有

$$V[G] \models p\left[\tilde{T}\right] = p[T].$$

证明　令 τ 为一个具备下述特点的 $\mathbb{P}$-名字: 对于任意的条件 $p \in P$, 都有

$$p \Vdash \tau : \check{\kappa} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ 是一个满射}.$$

令 σ 为一个具备下述特点的 $\mathbb{P}$-名字: 对于每一个条件 $p \in P$, 对于每一个 $\alpha < \kappa$, 都有

$$p \Vdash \left(\tau(\check{\alpha}) \in p\left[\check{T}\right] \to (\tau(\check{\alpha}), \sigma(\check{\alpha})) \in \left[\check{T}\right]\right).$$

令

$$X = \{y \in Y \mid \exists p \in P \, \exists n \in \omega \, \exists \alpha < \kappa \, (p \Vdash ((\sigma(\check{\alpha}))(\check{n}) = y))\}.$$

令

$$\tilde{T} = \{\langle s, t\rangle \in T \mid \operatorname{rng}(t) \subset X\}.$$

那么此树 $\tilde{T}$ 就具备所要求的特性. □

引理 3.98　设 κ 是一个武丁基数. 设 Y 和 Y^* 是两个集合, 并且 T 和 T^* 分别是 $\omega \times Y$ 和 $\omega \times Y^*$ 上的两棵树. 假设

(1) $p[T] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} - p[T^*]$.

(2) 对于 V 上的任意一个 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子 G, 都有

$$V[G] \models p[T] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} - p[T^*].$$

那么, 对于每一个 $\gamma < \kappa$, 都存在一个非空的 $B \subset \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$ 以及一个定义在 B 上的具备下述特点的函数

$$\pi : B \to m\left(Y^{<\omega}\right).$$

(a) 如果 $(s,t)\in\mathrm{dom}(\pi)$, 那么超滤子 $\pi(s,t)$ 是 γ-完全的, 并且 $\pi(s,t)(T_s)=1$, 其中

$$T_s=\left\{t\in Y^{\mathrm{dom}(s)}\mid (s,t)\in T\right\}.$$

(b) 对于任意一个 $x\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x\in p[T]$ 当且仅当存在一个具备下述特点的 $y\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

(i) $\{(x\restriction_n,y\restriction_n)\mid n<\omega\}\subset\mathrm{dom}(\pi)$;

(ii) 序列 $\langle\pi(x\restriction_n,y\restriction_n)\mid n<\omega\rangle$ 是 $m(Y^{<\omega})$ 上的可数完备的塔序列.

证明 设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{V}[G]}=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)}$; 而 $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)}$ 中的每一个元素都由一个在 V_κ 中的函数 f 所确定 $(=\pi_G([\![f]\!]_G))$. 所以, 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\left|\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)}\right|\leqslant\kappa$. 因此, $\mathrm{V}[G]\models 2^{\aleph_0}\leqslant\kappa$. 这个结论对于 V 上的任意一个 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子都成立. 于是,

$$\forall p\in\mathbb{Q}_{<\kappa}\ \left(2^{\aleph_0}\leqslant\check{\kappa}\right).$$

根据上面的引理 3.97, 我们不失一般性地可以假设 T 和 T^* 都是 $\omega\times\kappa$ 上的树.

设 G 是 V 上的 $\mathbb{Q}_{<\kappa}$-泛型超滤子. 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, 令 $i_G:\mathrm{V}\to\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)\cong\prod_G(\mathrm{V},\in)$ 为由 G 所确定的泛型嵌入映射. 根据给定条件 (1) 和 (2), 我们有下述事实:

(1) $\mathrm{ult}(V,G)\models p\left[i_G(T)\right]=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-p\left[i_G\left(T^*\right)\right]$;

(2) $\mathrm{V}[G]\models p\left[i_G(T)\right]=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}-p\left[i_G\left(T^*\right)\right]$;

(3) $\mathrm{V}[G]\models p[T]\subseteq p\left[i_G(T)\right]$;

(4) $\mathrm{V}[G]\models p\left[T^*\right]\subseteq p\left[i_G\left(T^*\right)\right]$;

(5) $\mathrm{V}[G]\models p[T]=p\left[i_G(T)\right]$;

(6) $\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)\models p[T]=p\left[i_G(T)\right]$.

根据 i_G 的同质性, (1) 成立; 因为 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$ 在 $\mathrm{V}[G]$ 中关于可数序列是封闭的, (2) 由 (1) 得到; 如果 $(x,h)\in[T]$, 那么

$$(x,\langle i_G(h(n))\mid n<\omega\rangle)\in\left[i_G(T)\right],$$

因此, (3) 成立; 同样的理由给出 (4); (5) 是给定条件之 (2) 和前面的结论 (2)~(4) 的推论; (6) 由 (5) 得到.

设 $\gamma<\kappa$. 因为 κ 是一个武丁基数, 令 δ 满足下述要求: $\gamma\leqslant\delta<\kappa$, 对于每一个 $\eta<\kappa$, δ 都是相对于 T 而言的 η-强基数. 令

$$W=\left\{U\ \middle|\ \exists t\in\omega^{<\omega}\ \left(U\text{ 是 }T(t)\cap\delta^{\mathrm{dom}(t)}\text{ 上的 }\delta\text{- 完全的超滤子}\right)\right\},$$

其中, $T(t)=\left\{s\in\kappa^{\mathrm{dom}(t)}\mid (s,t)\in T\right\}$. 我们来证明在泛型超幂 $\mathrm{ult}(\mathrm{V},G)$ 中, W 在 i_G 下的像集 (一个可数集合)

$$i_G[W]=\{i_G(U)\mid U\in W\}$$

是见证树 $i_G(T)$ 为一棵 $i_G(\gamma)$-弱整齐树的超滤子集合.

在 $\mathrm{ult}(V,G)$ 中, 令 $x \in p\,[i_G(T)]$. 根据上面的 (6), $x \in p[T]$ 在 $\mathrm{ult}(V,G)$ 中成立. 令 $f:\omega\to\kappa$ 来见证这个事实.

令 $\eta<\kappa$ 满足 $\mathrm{rng}(f)\subset\eta$. 令 $j:V\to M$ 来见证 δ 是相对于 T 而言的 η-强基数.

固定 $m<\omega$, 令

$$U_m=\{X\subset T\,(x\restriction_m)\cap\delta^m\mid f\restriction_m\in j(X)\}\,.$$

因为 $(x\restriction_m, f\restriction_m)\in T$ 以及 $f:\omega\to\eta$, 有 $(x\restriction_m, f\restriction_m)\in j(T)$. 依据这一事实以及 $\eta<j(\delta)$, 有 $T\,(x\restriction_m)\cap\delta^m\in U_m$. 因此, U_m 是 $T\,(x\restriction_m)\cap\delta^m$ 上的一个 δ-完全的超滤子.

这个序列 $\langle U_m\mid m<\omega\rangle$ 还具备下述性质:

(a) 对于 $m<k<\omega$, U_k 依照映射 $T\,(x\restriction_k)\ni s\mapsto s\restriction_m\in T\,(x\restriction_m)$ 投影到 U_m;

(b) 如果 $\langle X_m\mid m<\omega\rangle$ 是满足 $\forall m<\omega\ (X_m\in U_m)$ 的序列, 那么 $\exists h:\omega\to\kappa$ 来实现

$$\forall k<\omega\ (h\restriction_k\in X_k)\,.$$

(a) 成立是因为 $f\restriction_m=(f\restriction_k)\restriction_m$. 欲证 (b) 成立, 对于给定的序列 $\langle X_m\mid m\rangle<\omega$, 考虑 $\langle j\,(X_m)\mid m<\omega\rangle$. 在 M 中, f 满足 $\forall m<\omega\ (f\restriction_m\in j\,(X_m))$. 根据 j 的同质特性, 在 V 中 $\exists h:\omega\to\kappa$ 来实现

$$\forall k<\omega\ (h\restriction_k\in X_k)\,.$$

在 $V[G]$ 中, 对于每一个 $m<\omega$, 令 $W_m=i_G\,(U_m)$, 那么 $W_m\in i_G[W]$.

我们断言在 $\mathrm{ult}(V,G)$ 中, 序列 $\langle W_m\mid m<\omega\rangle$ 相对于树 $i_G(T)$ 也具有同样的性质:

(c) 对于 $m<k<\omega$, W_k 依照映射 $i_G(T)\,(x\restriction_k)\ni s\mapsto s\restriction_m\in i_G(T)\,(x\restriction_m)$ 投影到 W_m;

(d) 如果 $\langle X_m\mid m<\omega\rangle$ 是满足 $\forall m<\omega\ (X_m\in W_m)$ 的序列, 那么 $\exists h:\omega\to\kappa$ 来实现

$$\forall k<\omega\ (h\restriction_k\in X_k)\,.$$

(c) 由 i_G 的同质性和上述 (a) 即得. 欲证 (d), 设 $\langle X_m\mid m<\omega\rangle\in\mathrm{ult}(V,G)$ 满足要求 $\forall m<\omega\ (X_m\in W_m)$. 首先我们有

$$\forall m<\omega\ (i_G(f)\restriction_m\in(i_G(j))\,(X_m))\,.$$

根据有秩特性相对于传递类的不变性, 在 $i_G(M)$ 中存在 h 来见证

$$\forall k < \omega \ (h \restriction_k \in (i_G(j))(X_k)).$$

根据 $i_G(j)$ 的同质特性, 我们就得到 (d). □

定理 3.70 设 κ 是一个武丁基数. 如果 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是一个 κ-广泛贝尔集合, 那么对于任意的 $\gamma < \kappa$ 而言, A 都是一个 γ-弱整齐实数集合.

证明 这由引理 3.98 直接得到. □

根据上述定理, 我们现在可以得出如下结论: 当我们有无穷多个武丁基数存在时, 前面所引进的三种树表示事实上具有同等功能.

定理 3.71 (Woodin) 设 $\{\kappa_n \mid n < \omega\}$ 是严格递增的武丁基数的序列. 令

$$\kappa_\omega = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. 那么如下命题对等:

(1) A 是 $(< \kappa_\omega)$-弱整齐苏斯林集合;

(2) A 是 $(< \kappa_\omega)$-整齐苏斯林集合;

(3) A 是 $(< \kappa_\omega)$-广泛贝尔集合.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由推论 3.35 给出: 设 A 是 $(< \kappa_\omega)$-弱整齐苏斯林集合. 那么对于每一个 $n < \omega$, A 都是 κ_n^+-弱整齐苏斯林集合; 根据推论 3.35, A 是 $(< \kappa_n)$-整齐苏斯林集合. 所以, 对于 $\gamma < \kappa_\omega$, A 是 γ-整齐苏斯林集合.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 由推论 3.34 直接给出: 因为 A 是 $(< \kappa_\omega)$-整齐苏斯林集合, 所以对于每一个 $n < \omega$, A 都是 κ_n-整齐苏斯林集合. 因此, 由推论 3.34, A 是 $(< \kappa_n)$-广泛贝尔集合. 由此得知, A 是 $(< \kappa_\omega)$-广泛贝尔集合.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 由定理 3.70 给出: 因为 A 是 $(< \kappa_\omega)$-广泛贝尔集合, 所以对于每一个 $n < \omega$, A 是 κ_n-广泛贝尔集合, 从而根据定理 3.70, A 是 $(< \kappa_n)$-弱整齐苏斯林实数集合. 于是, A 是 $(< \kappa_\omega)$-弱整齐苏斯林实数集合. □

定理 3.72 (Woodin) 如果在论域中存在任意大的武丁基数, A 是任意一个实数子集, 那么如下命题等价:

(1) A 是 ∞-弱整齐苏斯林集合;

(2) A 是 ∞-整齐苏斯林集合;

(3) A 是一个广泛贝尔集合.

证明 由定义以及定理 3.71 直接得到. □

下面综合应用上面的定理来解决 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集的胜负确定性问题. 首先, 我们有下述确定性定理.

定理 3.73 (Martin-Steel) 设 κ 是一个不可数基数. 设 $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 是 κ-广泛贝尔集合. 如果存在两个不大于 κ 的武丁基数, 那么 A 是一个胜负确定的集合.

证明 设 $\kappa_0 < \kappa_1 \leqslant \kappa$ 是两个武丁基数. 根据定理 3.70, A 是 κ_0^+-弱整齐苏斯林集合. 根据定理 3.65, A 是 $(<\kappa_0)$-整齐苏斯林集合. 设 $\gamma < \kappa_0$ 是一个可测基数. 那么 A 是 γ-整齐苏斯林集合. 根据定理 3.55, A 是胜负确定的集合. □

接下来, 我们证明 $L(\mathbb{R})$ 中的每一个实数子集都是胜负确定的.

定理 3.74 (Martin-Steel) 设 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ 是严格单调递增的武丁基数的序列. 设 κ 是严格大于每一个武丁基数 κ_n 的可测基数. 如果 $A \in L(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 的一个子集合, 那么 A 是胜负确定的集合. 从而

$$L(\mathbb{R}) \models \forall A \subseteq \mathbb{R}\ (A\ 是胜负确定的集合).$$

证明 假设存在并非胜负确定的一个 $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$. 因为 $L(\mathbb{R})$ 中的每一个元素都是以一个序数和一个实数为参数可定义的, 所以我们可以对这样的非胜负确定的 $L(\mathbb{R})$ 中的实数子集所用到的序数极小化. 这样极小化之后, 我们得到一个以某个实数 $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 可定义的非胜负确定的实数集合 A. 设 $\varphi(v_1, v_2)$ 为 A 的以 a 为参数的定义式, 即

$$A = \left\{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid L(\mathbb{R}) \models \varphi[x.a]\right\}.$$

根据定理 3.69, A 是 $(<\kappa_\omega)$-广泛贝尔集合, 其中

$$\kappa_\omega = \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}.$$

因此, A 是 κ_5-广泛贝尔集合. 根据定理 3.73, A 是确定的. 这就是一个矛盾. □

3.4 练　　习

练习 3.1 若 $\preceq$ 是 A 上的一个准秩序, 令

$$\forall a, b \in A\, (a \equiv b \leftrightarrow (a \preceq b\ \wedge\ b \preceq a)),$$

那么 $\equiv$ 是 A 上的一个等价关系, 并且关系式 $[a] \prec [b] \leftrightarrow a \prec b$ 定义出商集 $A/\equiv$ 的一个秩序, 并且对于每一个 $a \in A$, 令 $\varphi(a)$ 为 $\{[b] \in A/\equiv\ \mid [b] \prec [a]\}$ 的序型, 那么 φ 就是 A 上的一个范数.

反之, 若 φ 是 A 上的一个范数, 对于 $a, b \in A$, 定义

$$a \preceq b \leftrightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b),$$

那么 $\preceq$ 就是 A 上的一个准秩序.

练习 3.2 证明: 如果马丁公理成立, 那么任何严格少于 $2^{\aleph_0}$ 个零测集的并是一个零测集; 任何严格少于 $2^{\aleph_0}$ 个稀疏集的并是一个稀疏集.

练习 3.3 证明: 如果马丁公理成立并且连续统假设不成立, 那么每一个 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 实数集合都是勒贝格可测的, 也都具有贝尔特性.

练习 3.4 证明: 每一个 $\Delta_2^1(a)$ 实数集合都是勒贝格可测的当且仅当在内模型 $L[a]$ 之上存在一个随机实数; 每一个 $\Delta_2^1(a)$ 实数集合都具有贝尔特性当且仅当在内模型 $L[a]$ 之上存在一个科恩实数.

练习 3.5 证明: 每一个 Σ_2^1 集合都有一根 Σ_2^1 标尺, 从而每一个 Σ_2^1 二元关系 $A \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 都携带一个 Σ_2^1 展示函数.

练习 3.6 A 是一个广泛贝尔集合当且仅当对于任意一个无穷基数 λ, A 都是 λ-广泛贝尔集合.

练习 3.7 令 $\mathcal{B} = \{X \subseteq 2^\omega \mid X \text{ 具有伯恩斯坦特性}\}$. 证明: 每一个 2^ω 的闭子集都具有伯恩斯坦特性; $\mathcal{B}$ 是一个 σ- 代数.

练习 3.8 证明: 如果 κ 是一个弱紧基数, $S \subset \mathrm{V}_\kappa$ 是一个荟萃集合, 那么一定存在一个 $\gamma < \kappa$ 以至于 $S \cap \mathrm{V}_\gamma$ 也是一个荟萃集合.

练习 3.9 证明: 如果 κ 是一个拉姆齐基数, 那么 κ 是一个全杨森基数.

练习 3.10 证明: 如果 κ 是一个不可达基数, $D \subseteq \mathbb{P}_{<\kappa}$ 是半恰当的, 那么 D 是准稠密的.

练习 3.11 设 κ 是一个不可达基数, $G \subseteq \mathbb{P}_{<\kappa}$ 是 V 上的 $\mathbb{P}_{<\kappa}$-泛型超滤子, $j : \mathrm{V} \prec \mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 是 G 诱导的泛型超幂嵌入映射. 证明: 如果 $j(\kappa) = \kappa$, 并且在 $\mathrm{V}[G]$ 中 κ 的梯度不可数, 那么 $j(\kappa^+) = (\kappa^+)^{\mathrm{V}[G]} = (\kappa^+)^{\mathrm{V}}$, 并且 $\mathrm{ult}(\mathrm{V}, G)$ 是有秩的.

练习 3.12 证明: 如果 κ 是一个不可达基数, $D \subseteq \mathbb{P}_{<\kappa}$ 是准稠密的, 并且 $D \in X \prec \mathrm{V}_\kappa$, 那么 $\exists d \in D \cap X\ ((X \cap (\bigcup d)) \in d)$.

练习 3.13 如果 κ 是一个可测基数, 那么每一个 $\mathbf{\Sigma}_2^1$ 实数子集都是 κ-弱整齐苏斯林.

练习 3.14 假设 κ 是一个不可达基数并且存在一个具有下述特点的力迫构思泛型扩张 $\mathrm{V}[G]$: 在 $\mathrm{V}[G]$ 中, $\kappa = \omega_1$, 以及存在一个泛型嵌入映射 $j : \mathrm{V} \prec M$ 以至于 $\omega_1 = \mathrm{Crit}(j)$, 并且 $M^\omega \subset M$. 假设 $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ 具备下述特点: 存在两棵树 T 和 S 来实现等式 $A = p[T]$ 以及 $\mathbb{R} - A = p[S]$, 并且在 $\mathrm{V}[G]$ 中这两个等式依旧成立. 假设 $\lambda < \kappa$ 是一个 T-强基数. 那么 A 是 λ-弱整齐苏斯林.

练习 3.15 设 T 是 $\omega \times \lambda\,(\lambda \geqslant \omega)$ 上的一棵 κ-弱整齐树. 设 $A = p[T]$. 设

$$\left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega} \right\rangle$$

见证 T 是 κ-弱整齐树的超滤子集合. 设 $\alpha \geqslant \left(2^{|\lambda|}\right)^+$, 令

$$S = \left\{ (p,t) \in \coprod^{w} \left(T, \left\langle U_{(p,r)} \mid p \odot r \in \mathbb{N}^{<\omega} \otimes \mathbb{N}^{<\omega} \right\rangle\right) \mid \mathrm{rng}(t) \subset \alpha \right\}.$$

证明: 如果 $\mathbb{P}$ 是一个力迫构思并且 $|P| < \kappa$, 那么 $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathbb{R} - p\left[\check{T}\right] = p\left[\check{S}\right]$. 从而, A 是 $(< \kappa)$-广泛贝尔集合.

练习 3.16　设 n 为一个正整数. 证明: 如果每一个 $\mathbf{\Sigma}_n^1$ 实数集合都是胜负确定的, 那么每一个 $\mathbf{\Pi}_n^1$ 实数集合都是胜负确定的; 反之亦然.

索　引

M

N

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　　他

跋

这本《集合论导引》是作者的“导引”系列中的第三部, 也是最后一部. 诚如读者所知, 第一部是《数理逻辑导引》, 第二部是《线性代数导引》. 这三部都与作者这些年来所教的一些课程相关. 在长时间的教学过程中, 虽然也给学生写过一些适应课程需要的讲义, 但终究不成体系. 现在, 作者将这三部导引呈献给读者, 算作对自己的一个交代. 这三部互相关联着的“导引”事实上是作者希望向读者呈献的一个人类认识的非常基础的智慧之圆. 简单地说,《数理逻辑导引》希望回答的哲学问题为：数学基础的核心内涵是什么？《线性代数导引》希望回答的哲学问题为：集合论与数理逻辑是怎样作为数学基础的？《集合论导引》希望回答的哲学问题是：为什么关于无穷的数学理论是包括数理逻辑乃至整个数学在内的理性思维的思想基础？这是作者开始思考“导引”三部时的牵引问题.

于本, 于立, 遂作“导引”. 基础之为本. 立本求末. 建筑者, 本在先, 末随后; 一旦本有拓展, 末必如雨后春笋. 思想者, 立在先, 破随后; 一旦真理显露, 谬误必定消除. 这些是作者写完“导引”三部之后的感悟.

写完《集合论导引》三卷九章, 昨日将书稿送科学出版社李静科编辑, 夜不成眠, 细细回味书中内容, 心潮难平. 凌晨即起, 有诗为证：

从无到有建天宫, 集少合多筑无穷;
一一对应数实数, 此势更比那势宏;
秩序刚性量长短, 序数云梯至苍穹;
张子超幂造寰宇, 力迫构思变大同;
朗朗乾坤聚祥瑞, 集合运算才十种;
浩瀚宇宙无疆域, 公理九条不足用;
若问实数为何物, 超紧基数示真容;
内核模型今安在, 极尽智慧有奇功.

冯　琦

2019 年 5 月 5 日

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
3　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健　王隽骧　刘秀芳　著
7　数理逻辑基础(下册)　1982.8　胡世华　陆钟万　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论(下册)　1987.12　柯　召　魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
31　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋等　编著
32　代数拓扑与示性类　1989.11　马德森著　吴英青　段海鲍译
33　非线性发展方程　1989.12　李大潜　陈韵梅　著
34　反应扩散方程引论　1990.2　叶其孝等　著
35　仿微分算子引论　1990.2　陈恕行等　编
36　公理集合论导引　1991.1　张锦文　著
37　解析数论基础　1991.2　潘承洞等　著
38　拓扑群引论　1991.3　黎景辉　冯绪宁　著
39　二阶椭圆型方程与椭圆型方程组　1991.4　陈亚浙　吴兰成　著
40　黎曼曲面　1991.4　吕以辇　张学莲　著
41　线性偏微分算子引论(下册)　1992.1　齐民友　许超江　编著
42　复变函数逼近论　1992.3　沈燮昌　著
43　Banach 代数　1992.11　李炳仁　著
44　随机点过程及其应用　1992.12　邓永录等　著
45　丢番图逼近引论　1993.4　朱尧辰等　著
46　线性微分方程的非线性扰动　1994.2　徐登洲　马如云　著
47　广义哈密顿系统理论及其应用　1994.12　李继彬　赵晓华　刘正荣　著
48　线性整数规划的数学基础　1995.2　马仲蕃　著
49　单复变函数论中的几个论题　1995.8　庄圻泰　著
50　复解析动力系统　1995.10　吕以辇　著
51　组合矩阵论　1996.3　柳柏濂　著
52　Banach 空间中的非线性逼近理论　1997.5　徐士英　李　冲　杨文善　著
53　有限典型群子空间轨道生成的格　1997.6　万哲先　霍元极　著
54　实分析导论　1998.2　丁传松等　著
55　对称性分岔理论基础　1998.3　唐　云　著
56　Gel’fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用　1998.10　乐茂华　著
57　半群的 S-系理论　1999.2　刘仲奎　著
58　有限群导引(下册)　1999.5　徐明曜等　著
59　随机模型的密度演化方法　1999.6　史定华　著
60　非线性偏微分复方程　1999.6　闻国椿　著
61　复合算子理论　1999.8　徐宪民　著
62　离散鞅及其应用　1999.9　史及民　编著
63　调和分析及其在偏微分方程中的应用　1999.10　苗长兴　著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德　郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林　杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军　张　祥　董梅芳　编著
71　随机分析学基础(第二版)　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚　马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎　陆传荣　张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯　顾凡及　蔡志杰　编著
78　同调论 —— 代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒　李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川　崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙　李登峰　谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷　吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群　尹景学　王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)　2003.10　万哲先　霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版)　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正　刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文 著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰 著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林　闫宝强　刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪守宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p空间引论　2010.5　许全华　吐尔德别克　陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
142　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著
143　有约束条件的统计推断及其应用　2012.3　王金德　著
144　混沌、Mel′nikov 方法及新发展　2012.6　李继彬　陈凤娟　著
145　现代统计模型　2012.6　薛留根　著
146　金融数学引论　2012.7　严加安　著
147　零过多数据的统计分析及其应用　2013.1　解锋昌　韦博成　林金官　编著
148　分形分析引论　2013.6　胡家信　著
149　索伯列夫空间导论　2013.8　陈国旺　编著
150　广义估计方程估计方法　2013.8　周　勇　著
151　统计质量控制图理论与方法　2013.8　王兆军　邹长亮　李忠华　著
152　有限群初步　2014.1　徐明曜　著
153　拓扑群引论(第二版)　2014.3　黎景辉　冯绪宁　著
154　现代非参数统计　2015.1　薛留根　著
155　三角范畴与导出范畴　2015.5　章　璞　著
156　线性算子的谱分析(第二版)　2015.6　孙　炯　王　忠　王万义　编著
157　双周期弹性断裂理论　2015.6　李　星　路见可　著
158　电磁流体动力学方程与奇异摄动理论　2015.8　王　术　冯跃红　著
159　算法数论(第二版)　2015.9　裴定一　祝跃飞　编著
160　偏微分方程现代理论引论　2016.1　崔尚斌　著
161　有限集上的映射与动态过程——矩阵半张量积方法　2015.11　程代展　齐洪胜　贺风华　著
162　现代测量误差模型　2016.3　李高荣　张　君　冯三营　著
163　偏微分方程引论　2016. 3　韩丕功　刘朝霞　著
164　半导体偏微分方程引论　2016.4　张凯军　胡海丰　著
165　散乱数据拟合的模型、方法和理论(第二版)　2016.6　吴宗敏　著

166　交换代数与同调代数(第二版)　2016.12　李克正　著
167　Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论　2017.3　钱　涛　李澎涛　著
168　有限 p 群构造(上册)　2017.5　张勤海　安立坚　著
169　有限 p 群构造(下册)　2017.5　张勤海　安立坚　著
170　自然边界积分方法及其应用　2017.6　余德浩　著
171　非线性高阶发展方程　2017.6　陈国旺　陈翔英　著
172　数理逻辑导引　2017.9　冯　琦　编著
173　简明李群　2017.12　孟道骥　史毅茜　著
174　代数 K 理论　2018.6　黎景辉　著
175　线性代数导引　2018.9　冯　琦　编著
176　基于框架理论的图像融合　2019.6　杨小远　石　岩　王敬凯　著
177　均匀试验设计的理论和应用　2019.10　方开泰　刘民千　覃　红　周永道　著
178　集合论导引(第一卷：基本理论)　2019.12　冯　琦　著
179　集合论导引(第二卷：集论模型)　2019.12　冯　琦　著
180　集合论导引(第三卷：高阶无穷)　2019.12　冯　琦　著

(O-7917.31)



科学出版社互联网入口

科学数理分社
电 话：(010) 64019814
Email：lijingke@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-063623-2

定 价：198.00 元